

## 1- CINEMÁTICA

1 - Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo a la ecuación

$$x = -kt^3 + bt^2, \text{ con } k, b \text{ constantes } \geq 0.$$

- Calcule la velocidad y la aceleración del cuerpo en función del tiempo, y gráfíquelas.
- Halle el instante de tiempo, y la correspondiente posición, en el cual el cuerpo tendrá velocidad nula.
- Describa cualitativamente el movimiento indicando en qué intervalos de tiempo el movimiento es acelerado y en cuáles desacelerado.

2 - Una partícula se desplaza en línea recta de acuerdo a la ecuación

$$x = \sqrt{x_0^2 + 2kt}, \text{ con } x_0, k \text{ constantes } > 0.$$

- Calcule la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo.
- Expresé las magnitudes del punto a) en función de la posición, y gráfíquelas partiendo de la posición a  $t = 0$ .

3 - Un cuerpo se mueve en línea recta partiendo a  $t = 0$  de la posición  $x(t = 0) = 0$  con velocidad  $v(t = 0) = v_0$ .

Encuentre  $x(t)$  y  $x(v)$  en los casos en que la aceleración del cuerpo está dada por la ecuación ( $k$  constante):

- $a = kt^2$  ,  $k > 0$ .
- $a = -kv^2$  ,  $k > 0$ .
- $a = kvx$  ,  $k > 0$ .

4 - A  $t=0$  se deja caer un cuerpo sin velocidad inicial desde una altura  $H$  del piso. Además del peso actúa una fuerza en la dirección horizontal que provoca una aceleración en esa dirección que puede expresarse como  $a_x = -kt^2$  con  $k > 0$ .

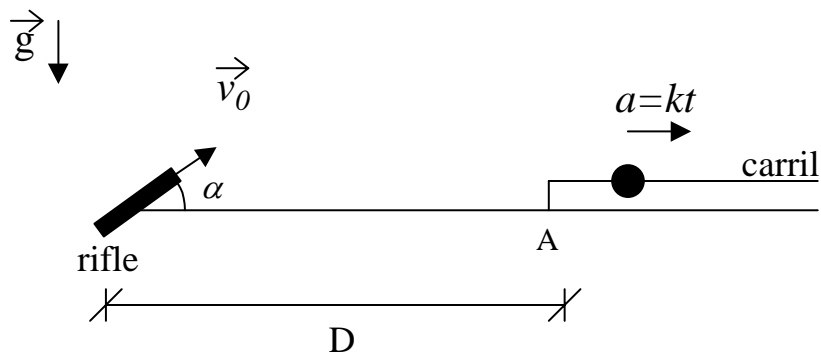
- Escriba las ecuaciones de movimiento y halle la ecuación de la trayectoria.
- Diga en qué punto del eje  $x$  el cuerpo tocará el suelo. Compare con los resultados que se obtienen para  $a_x = 0$

5 - Un helicóptero se encuentra suspendido en la posición  $x = L$ ,  $y = H$ . En  $t = 0$  el

helicóptero comienza a descender con aceleración  $a_y = -kt$  ( $k$  constante  $> 0$ ). En el origen de coordenadas hay un cañón que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal y dispara proyectiles con velocidad de salida  $v_0$ .

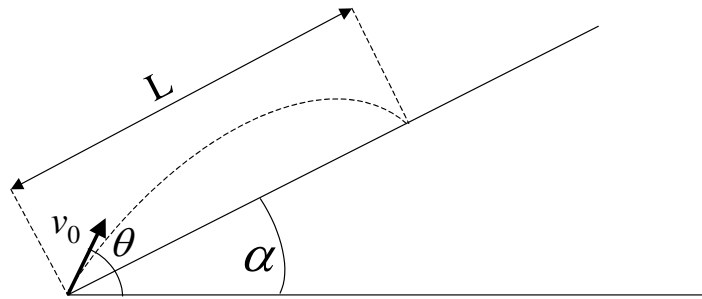
- Encuentre la trayectoria del proyectil ( $y$  en función de  $x$ ). Grafique  $y$  vs  $x$  para el proyectil y para el helicóptero.
- Diga para qué valores de  $v_0$  la trayectoria del proyectil y la del helicóptero se intersectan.
- Si  $v_0$  es alguno de los valores hallados en b) diga en qué instante debe efectuarse el disparo para que el proyectil haga impacto sobre el helicóptero.

6 - Un juego de un parque de diversiones consiste en una pelotita que se mueve por un carril rectilíneo con aceleración  $a = kt$  hacia la derecha, con  $k$  constante  $> 0$ . A  $t = 0$ , la pelotita se halla en reposo en el extremo izquierdo del carril (punto A). El jugador dispone de un rifle, ubicado a una distancia  $D$  del punto A, que dispara bolas con velocidad  $v_0$  variable, pero con un ángulo  $\alpha$  fijo.



- ¿Con qué velocidad  $v_0$  debe disparar el jugador para que le sea posible acertar en la pelotita? Es decir, ¿para qué valor de  $v_0$  las trayectorias de la bala y la pelotita se intersectan?
- Si  $v_0$  es alguna de las velocidades halladas en a), ¿en qué instante debe disparar el jugador para pegarle a la pelotita?

7 - Un jugador de fútbol patea la pelota fuera de la cancha hacia las tribunas con velocidad inicial  $v_0$  y ángulo de elevación  $\theta$ . La tribuna forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal (ver fig.). Se aconseja utilizar un sistema de referencia con los ejes  $(x,y)$  en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente.



a) Muestre que la expresión del alcance  $L$  en función del ángulo  $\theta$  está dada por:

$$L = \frac{2v_0^2}{g \cos^2 \alpha} \sin(\theta - \alpha) \cos \theta .$$

b) Grafique el alcance  $L$  en función de  $\theta$  y demuestre que para cada valor de  $L$  hay dos valores posibles de  $\theta$  (tiro rasante y tiro de elevación).

c) ¿Cuál es el ángulo  $\theta$  para el cual el alcance es máximo?

8 - Un cuerpo inicialmente en reposo ( $\theta(t=0) = 0$ ,  $\omega(t=0) = 0$ ) es acelerado en una trayectoria circular de 1,3 m de radio, de acuerdo a la ley  $\gamma = 120s^{-4}t^2 - 48s^{-3}t + 16s^{-2}$  donde  $\gamma$  es la aceleración angular medida en  $seg^{-2}$ .

Halle:

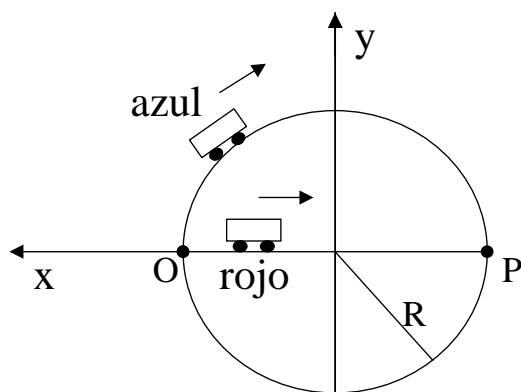
- a)  $\theta = \theta(t)$
- b)  $\omega = \omega(t)$
- c) el vector aceleración (utilice la descomposición polar).
- d) ¿cuánto vale  $\vec{v}$  en  $t = 2$  seg ?

9 - Un mecanismo de relojería utilizado para controlar cierta maquinaria consiste de dos agujas A y B que se mueven ambas en sentido horario. La aguja A se mueve con velocidad angular constante  $\omega_0$  partiendo de  $\varphi_A(t=0) = 0$ , mientras que la aguja B se mueve con una aceleración angular constante  $\gamma$  partiendo con velocidad angular  $\omega_B(t=0) = 2\omega_0$  de la posición  $\varphi_B(t=0) = 0$ .

- a) Calcule en qué instantes ambas agujas coinciden.
- b) Idem en el caso en que la aguja A se mueva en sentido antihorario.

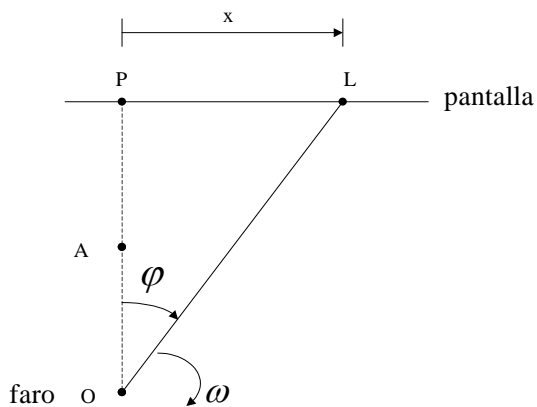
10 - Un auto azul parte del reposo desde el punto  $O$  en el instante  $t = 0$ , y describe una trayectoria circular de radio  $R = 90$  m con una aceleración angular  $\Gamma_a = kt$  ( $k = \frac{\pi}{6} s^{-3}$ ). Pasado un tiempo de 3 s desde la partida del auto azul, parte del reposo desde  $O$  un auto rojo que se mueve en línea recta hacia el punto  $P$  con una aceleración constante:

$$a_r = -a_0 \hat{x}$$



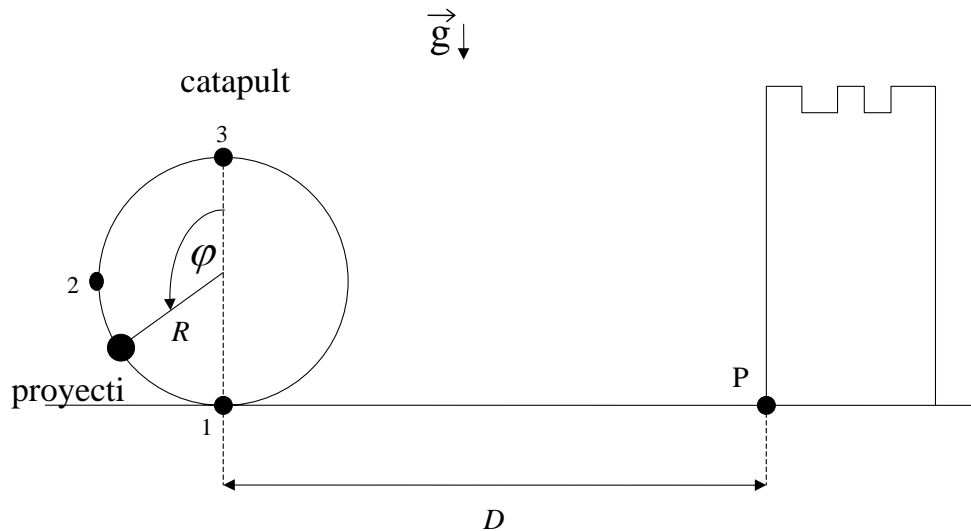
- a) Calcule la aceleración y la velocidad del auto azul como función del tiempo.
- b) ¿Cuánto tiempo tarda el auto azul en llegar al punto  $P$  ?.
- c) ¿Cuál debe ser el valor de  $a_0$  para que el auto rojo pueda alcanzar al auto azul en el punto  $P$  ?.

11 - Un faro que gira con velocidad angular constante  $\omega$ , proyecta su luz sobre una pantalla ubicada a una distancia  $d = \overline{OP}$  (ver fig.).



- a) Halle la velocidad lineal del punto luminoso sobre la pantalla en función de datos y de  $x$ .
- b) Calcule en función de datos y de  $x$  la velocidad angular del punto luminoso para un observador situado a una distancia  $D = \overline{AP}$  de la pantalla. (Sugerencia: haga este cálculo usando trigonometría).
- c) ¿Cómo debería ser la velocidad angular del faro para que el punto luminoso se mueva con velocidad constante?

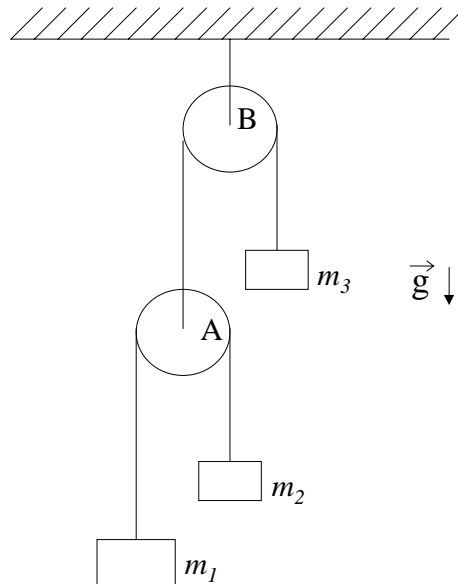
12 - Una catapulta está ubicada a una distancia  $D$  de un castillo (ver fig.). La catapulta se utiliza para lanzar proyectiles y consiste en un dispositivo mediante el cual cada proyectil parte desde la posición (1) con velocidad nula, luego se mueve sobre la trayectoria circular de radio  $R$  con una aceleración angular  $\ddot{\varphi}$  dada por  $\ddot{\varphi} = -\frac{(n+1)K}{\pi^{n+1}}\varphi^n$  (donde  $K$  y  $n$  son constantes,  $n = 4$ ) y finalmente es liberado en la posición (3).



- Exprese la velocidad tangencial  $v$  del proyectil (cuando está en la catapulta) en función de  $K$ ,  $R$  y  $\varphi$ . Calcule  $v$  para la posición (2).
  - Calcule (en función de  $K$ ,  $R$  y  $g$ ) la distancia  $D$  a la que hay que ubicar la catapulta para que los proyectiles lanzados por ella peguen en el punto P del castillo.
- 13 - Un nadador puede nadar a 0,7 m/seg. respecto del agua. Quiere cruzar un río de 50 m de ancho, cuya corriente de agua tiene una velocidad de 0,5 m/seg.
- Si quiere llegar al punto opuesto en la otra orilla, ¿en qué dirección debe nadar? ¿cuánto tarda en cruzar?
  - Si quiere cruzar en el menor tiempo posible, ¿en qué dirección debe nadar?, ¿a qué punto llegará?
- 14 - Sobre una rampa inclinada a  $30^\circ$  respecto de la horizontal, un móvil asciende con una aceleración de  $1 \text{ m/seg}^2$ . Si la rampa se acelera a partir del reposo hacia la derecha a  $0,5 \text{ m/seg}^2$ :
- ¿Cuál es la aceleración del móvil respecto de la tierra?
  - ¿Qué velocidad adquiere el móvil al cabo de 1 seg respecto de la rampa y de la tierra?

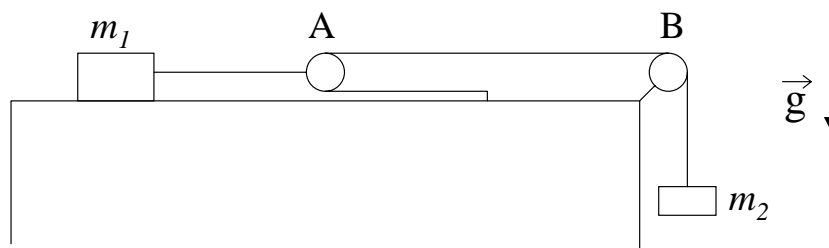
## 2- DINÁMICA

1 - El sistema de la figura está inicialmente en reposo, las poleas y los hilos tienen masas despreciables y los hilos son inextensibles.



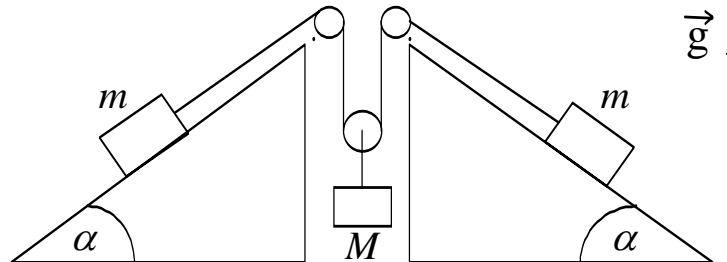
- Escriba las ecuaciones de Newton para las masas y la condición de vínculo que relaciona sus posiciones.
- Halle la aceleración de cada cuerpo y las tensiones en los hilos en función de las masas y de  $g$ .

2 - Un cuerpo de masa  $m_1$  está ubicado sobre una mesa horizontal sin fricción, unido a otro cuerpo de masa  $m_2$  por medio de un sistema de poleas, como se muestra en la figura. Considere que las sogas son inextensibles, y que sogas y poleas tienen masas despreciables. El sistema está inicialmente en reposo y la polea A es móvil.

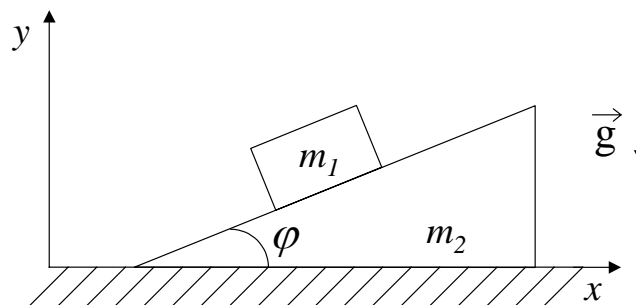


- Escriba las ecuaciones de Newton para ambas masas y la condición de vínculo que relaciona sus posiciones.
- Encuentre la aceleración de cada masa y las tensiones en los hilos en función de  $m_1$ ,  $m_2$  y  $g$ .

- 3 - El sistema de la figura utiliza dos contrapesos de masa  $m$  para levantar un cuerpo de masa  $M$ , que se halla inicialmente en reposo sobre el piso. Considere que las sogas son inextensibles, y que sogas y poleas tienen masas despreciables.



- a) Escriba las ecuaciones de Newton y de vínculo para los cuerpos que forman el sistema.  
 b) Calcule la aceleración de cada cuerpo en función de  $m$ ,  $M$ ,  $\alpha$  y  $g$ .  
 c) Si el sistema comienza a accionar cuando se quitan los soportes que sostienen los contrapesos, indicar cuál es el mínimo valor de  $m$  para levantar el cuerpo a una altura  $H$  en un tiempo  $T$ .
- 4 - Un bloque de masa  $m_1$  está ubicado sobre un plano inclinado de masa  $m_2$  e inclinación  $\varphi$ , el cual descansa sobre una superficie horizontal, como muestra la figura. Ambas superficies carecen de fricción, y tanto el bloque como el plano pueden moverse.



- i) Si el plano inclinado está fijo, halle las componentes  $x$  e  $y$  de la aceleración del bloque.  
 ii) Si el plano inclinado es libre de moverse:  
 a) Muestre que la componente  $x$  de la aceleración del bloque es:

$$a_{1x} = -m_2 g \tan \varphi / (m_2 \sec^2 \varphi + m_1 \tan^2 \varphi).$$

- b) Muestre que la componente  $x$  de la aceleración del plano inclinado (y su única

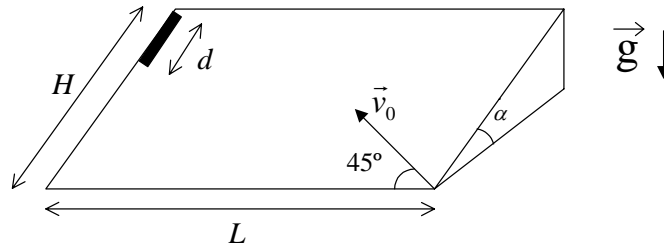
componente) es:

$$a_{2x} = m_1 g \tan \varphi / (m_2 \sec^2 \varphi + m_1 \tan^2 \varphi).$$

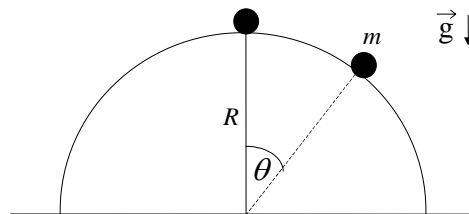
c) Muestre que  $a_{1y}$  es:

$$a_{1y} = -(m_1 + m_2)g \tan^2 \varphi / (m_2 \sec^2 \varphi + m_1 \tan^2 \varphi).$$

- 5 - Una varilla de longitud  $d$  se deja caer sobre un plano inclinado sin rozamiento como se ve en la figura, con  $H$ ,  $L$  y  $\alpha$  como datos. Un segundo después se dispara un proyectil sobre el plano con una velocidad inicial  $\vec{v}_0$  formando un ángulo de  $45^\circ$  con respecto a la base del plano.



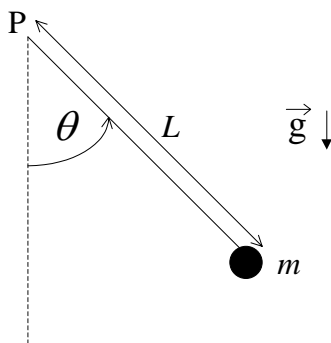
- a) Escriba las ecuaciones de Newton para el proyectil y la varilla utilizando un sistema de referencia fijo a la superficie del plano.  
 b) Calcule las aceleraciones de ambos cuerpos.  
 c) Diga para qué valores de  $v_0$  el proyectil alcanza la varilla.
- 6 - Una bolita de masa  $m$  se desliza sobre una semiesfera de radio  $R$ , carente de fricción, como se muestra en la figura.





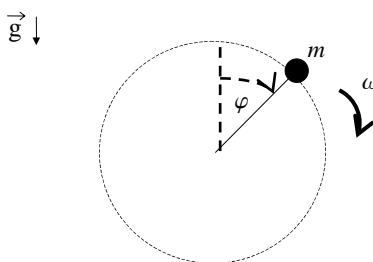
- a) Si inicialmente la bolita es apartada de  $\theta = 0$  en un ángulo muy pequeño y su velocidad inicial es cero, calcular el ángulo  $\theta$  para el cual se separa de la superficie esférica.
- b) Si ahora la bolita se engarza en un riel semicircular sin fricción de radio  $R$ , hallar la velocidad con que llega al suelo. ¿Qué aceleración tangencial tiene en ese instante ?
- \*c) Si la bolita está engarzada en el riel, estime numéricamente el tiempo que tarda en llegar al suelo si  $R = 1\text{cm}, 10\text{ cm}, 50\text{ cm}, 100\text{ cm}$ . Confeccione un gráfico del tiempo de llegada en función de  $g/R$  (si lo necesita, calcule el tiempo para otros valores de  $R$ ).

- 7 - Se tiene una bolita de masa  $m$  unida al extremo de una barra rígida, de longitud  $L$  y masa despreciable. La barra es libre de girar en el plano vertical alrededor de su otro extremo, fijo en un punto  $P$ . Se conoce la velocidad  $v_0$  de la partícula cuando pasa por el punto más bajo de su trayectoria.



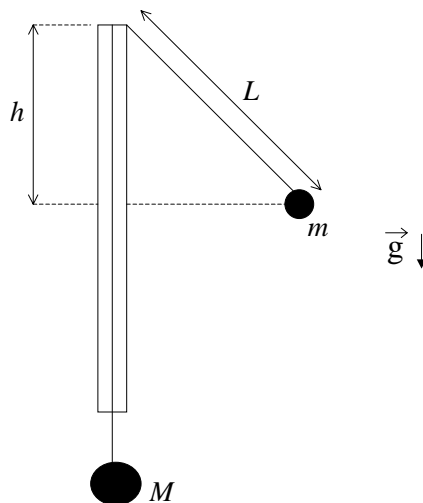
Determine, en función de  $v_0, m, L$  y  $g$  :

- a) Los valores del ángulo  $\theta$  que pueden ser alcanzados durante el movimiento y el ángulo  $\theta_v$  para el cual la velocidad de la bolita se anula.
- b) El ángulo  $\theta_f$  para el cual la fuerza que hace la barra sobre la bolita se anula. Observe que  $\theta_f$  puede no existir.
- c) ¿Bajo qué condiciones se puede reemplazar la barra por una cuerda inextensible sin modificar la cinemática de la partícula ? Justifique.
- \*d) Analice el problema numéricamente para varias condiciones iniciales. ¿Qué tipo de movimiento observa? Confeccione un gráfico que muestre la dependencia del período de movimiento con su amplitud.
- 8 - Considere una bolita de masa  $m$  sujeta a una varilla rígida que le comunica un movimiento circular uniforme con velocidad angular de módulo  $\omega$  en un plano vertical.



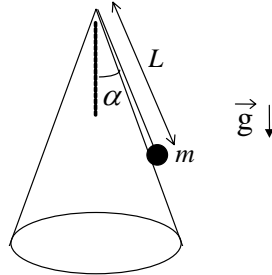
- a) Escriba la ecuación de Newton para la bolita y las condiciones de vínculo a las que está sujeto el movimiento.
- b) Calcule la fuerza ejercida por la barra en función del ángulo  $\varphi$ .

- 9 - Dos cuerpos de masas  $M$  y  $m$ , respectivamente, se hallan unidos a los extremos de un hilo inextensible que pasa a través de un tubo delgado de vidrio, tal como se muestra en la figura. El cuerpo de masa  $m$  describe una trayectoria circular alrededor del tubo, en un plano horizontal, de tal forma que  $M$  permanece en reposo, siendo  $T$  el período del movimiento circular. Considere la masa del hilo despreciable y  $M > m$ .



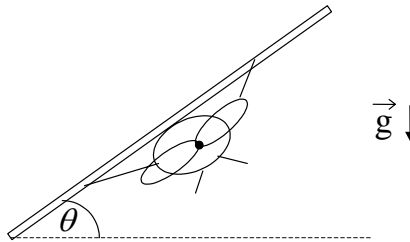
- a) Escriba las ecuaciones de Newton y de vínculo para los cuerpos que forman el sistema.
  - b) Diga cuál es el ángulo entre el hilo y el tubo en función de  $m$  y  $M$ .
  - c) Exprese el valor de  $L$  en función de  $T$ ,  $m$ ,  $M$  y  $g$ .
  - d) Exprese  $T$  en función de  $g$  y  $h$ .
- 10 - Un cuerpo de masa  $m$  se halla apoyado sobre una superficie cónica sin fricción, colgando del extremo de una cuerda inextensible de longitud  $L$ . En el instante inicial el

cuerpo rota con velocidad angular de módulo  $\omega_0$ .



- Escriba las ecuaciones de Newton y las condiciones de vínculo para el cuerpo.
- Calcule la aceleración del cuerpo.
- Halle el valor de la tensión de la cuerda y de la fuerza de interacción ejercida por la superficie. Diga para que valor de  $\omega_0$  esta última fuerza se anula.

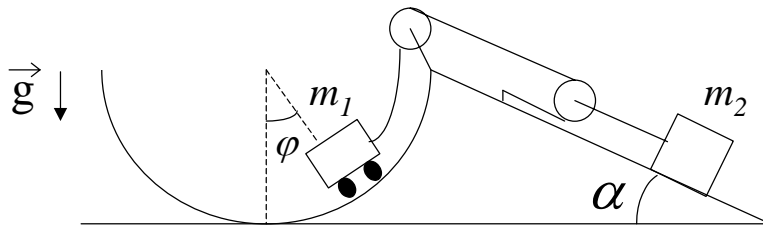
11 - Para que un avión que vuela con  $|\vec{v}| = \text{cte.}$  pueda realizar una trayectoria circular de radio  $R$ , debe inclinar el plano de sus alas en un ángulo  $\theta$  respecto de la horizontal. Considere que sobre el avión actúa, además del peso, la fuerza de empuje aerodinámico, la cual apunta hacia arriba, perpendicular al plano de las alas.



- Escriba la ecuación de Newton para el avión.

b) Determine el ángulo  $\theta$  en términos de  $|\vec{v}|$ ,  $R$  y  $g$ . ¿Cuál es el ángulo para  $|\vec{v}| = 60$  m/seg y  $R = 1$  km ?

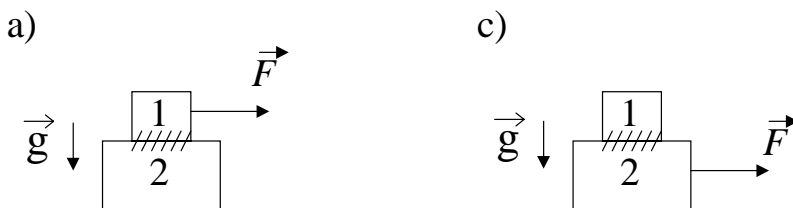
12 - Un juego de un parque de diversiones consiste en un carro de masa  $m_1$  que se desplaza sobre un riel semicircular de radio  $R$ , carente de rozamiento. El carro es arrastrado mediante una soga que se desliza a lo largo del riel y que está enganchada a un sistema de poleas del cual cuelga un contrapeso de masa  $m_2$ . Este contrapeso se mueve sobre un plano inclinado, sin fricción, que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Considere que las sogas son inextensibles, y que sogas y poleas tienen masas despreciables.



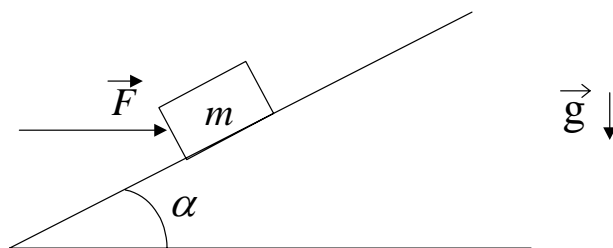
- Escriba las ecuaciones de Newton y de vínculo para ambas masas.
- Diga para qué valor de  $\varphi$  el carro podrá permanecer en reposo.
- Encuentre la velocidad del carro como función de  $\varphi$ .
- \*d) Resuelva numéricamente la ecuación de movimiento y encuentre el tiempo que tarda el carrito en subir hasta  $\varphi = \pi/2$ , suponiendo que  $\sin \alpha = 1/2$ ,  $m_1 = m_2$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

### 3- INTERACCIÓN DE ROZAMIENTO

- 1 - Un cuerpo de masa  $m_1$  se apoya sobre otro de masa  $m_2$  como indica la figura. No hay rozamiento entre la mesa y el cuerpo 2, pero si entre los cuerpos 1 y 2, siendo  $\mu_E$  el coeficiente de rozamiento estático entre ambos.

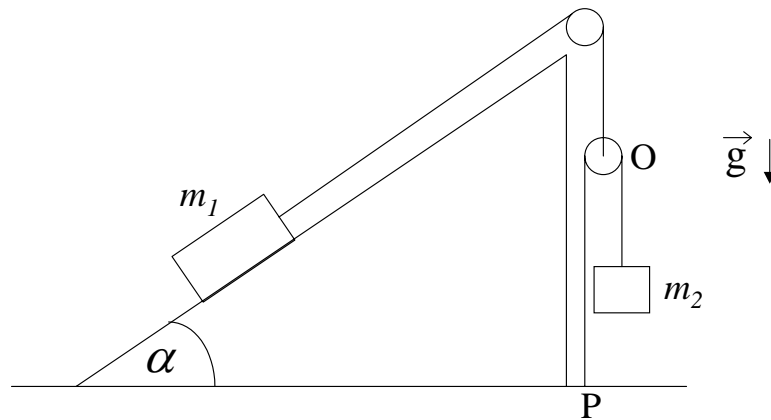


- a) ¿Cuál es la fuerza máxima aplicada sobre el cuerpo 1 que acelera a ambos cuerpos, sin que deslice uno respecto del otro?  
 b) ¿Cuál es la aceleración del sistema?  
 c) Idem que a) y b) pero si se aplica la fuerza sobre el cuerpo 2.  
 d) Se aplica ahora sobre la masa 2 una fuerza el doble de la calculada en c). ¿Cuál es la aceleración de  $m_1$  y  $m_2$  si el coeficiente de rozamiento dinámico es  $\mu_D$ ?  
 e) Si la dimensión del cuerpo 2 es  $L$  y la del cuerpo 1 es  $l$ , siendo  $l \ll L$  ¿Cuánto tardará en caerse  $m_1$  si inicialmente estaba apoyada en el centro de  $m_2$ ?
- 2 - Se trata de mover un bloque de masa  $m$  sobre un plano inclinado ejerciendo una fuerza  $\vec{F}$ , tal como indica la figura. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es  $\mu_E$ .

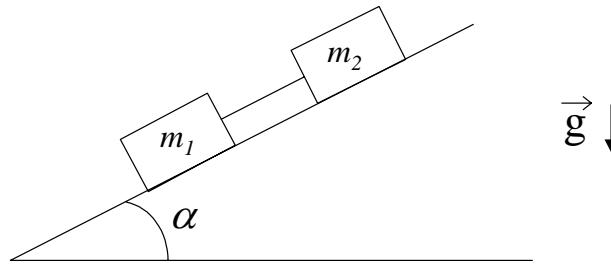


- a) Si  $\vec{F} = 0$  ¿para qué valores de  $\alpha$  el bloque estará en reposo?  
 b) Si  $\alpha$  es alguno de los hallados en a), ¿para qué valores de  $\vec{F}$  permanecerá el bloque en reposo?  
 c) Si  $m = 2$  kg y  $\mu_E = \text{tg } \alpha = 0.3$  hallar la  $\vec{F}$  máxima que se puede ejercer de modo que el bloque no se mueva.
- 3 - Dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  se hallan unidos entre sí a través de un sistema de poleas, tal como indica la figura. El cuerpo  $m_1$  se desliza sobre un plano inclinado, de inclinación  $\alpha$ , el cual posee rozamiento, siendo  $\mu_e$  y  $\mu_d$  los coeficientes de rozamiento

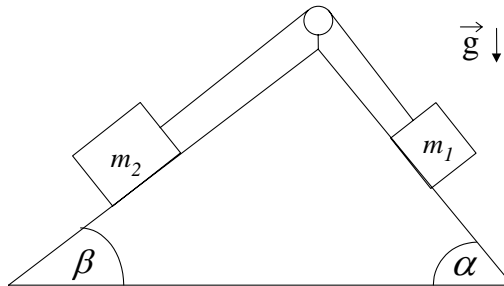
estático y dinámico, respectivamente. Considere que los hilos son inextensibles y de masa despreciable, y que las poleas tienen masas despreciables.



- a) Plantee las ecuaciones de Newton y de vínculo para el sistema.
  - b) Si el sistema se halla inicialmente en reposo, encuentre dentro de qué rango de valores debe estar  $m_2$  para que el sistema permanezca quieto.
  - c) Diga cuánto debe valer  $m_2$  para que dicha masa descienda con aceleración constante  $a$ . Diga, justificando su respuesta, si la aceleración  $a$  puede ser tal que  $a > g$ .
  - d) Para el caso considerado en c), halle la posición de la polea  $O$  como función del tiempo, sabiendo que en el instante inicial estaba a distancia  $h$  del piso con velocidad nula. ¿La polea se acerca o se aleja del piso?.
- 4 - Un automóvil recorre una autopista con velocidad constante  $v$  en un tramo en el cual el camino tiene un radio de curvatura  $R$ . La autopista es perfectamente horizontal, es decir, sin peralte.
- a) ¿Cuál debe ser el mínimo coeficiente de rozamiento para que el automóvil no deslice? ¿El rozamiento será estático o dinámico? ¿Por qué?
  - b) ¿Con qué peralte le aconsejaría a un ingeniero que construya una autopista que en una zona tiene un radio de curvatura  $R$ ? Suponga que no hay rozamiento y que todos los autos tienen velocidad  $v$ .
- 5 - **Pregunta:** Si sabe que un sistema de partículas está en reposo y quiere hallar la fuerza de rozamiento ¿la obtiene a partir de las ecuaciones de Newton y de vínculo o la obtiene poniendo  $f_r = \mu_e N$ ?
- 6 - Dos bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  se hallan apoyados sobre un plano inclinado, de inclinación  $\alpha$ , con rozamiento, unidos entre sí por una barra rígida, de masa despreciable, tal como se indica en la figura. Los coeficientes de rozamiento estático entre los bloques (1) y (2) y la superficie son  $\mu_{e1}$  y  $\mu_{e2}$ , respectivamente.



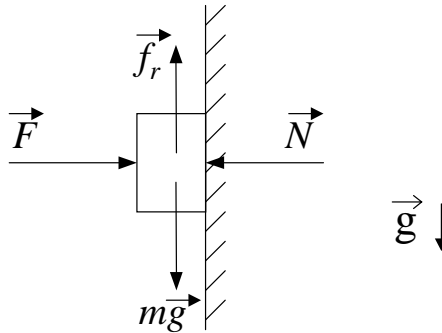
- Suponga que los bloques están en reposo y encuentre una relación entre  $fr_1$ ,  $fr_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  y  $\alpha$  ( $fr$  = fuerza rozamiento). Grafique la relación en un gráfico  $fr_2$  vs.  $fr_1$ .
  - Si los datos son  $\mu_{e2} = 0.6$ ,  $\mu_{e1} = 0.9$ ,  $m_1 = 5$  kg,  $m_2 = 10$  kg,  $\alpha = 30^\circ$ , dibuje en el gráfico anterior la zona en donde el rozamiento puede ser estático.
  - Diga si es posible, con estos datos, el estado de reposo que hemos supuesto.
  - ¿Puede determinar los valores de  $fr_1$  y  $fr_2$ ? Diga qué valores puede tomar  $\alpha$  para que el sistema permanezca en reposo.
- 7 - Dos bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  se hallan apoyados sobre sendos planos inclinados, de inclinaciones  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente, unidos entre sí por un hilo inextensible y de masa despreciable, tal como se indica en la figura. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre los bloques y las correspondientes superficies son  $\mu_E = 0.3$  y  $\mu_D = 0.25$ , respectivamente.



- Inicialmente se traba el sistema, de modo que esté en reposo, diga qué relaciones se deben cumplir entre las masas y los ángulos para que quede en reposo cuando se lo destrabe.
- Si  $m_1 = 1$  kg,  $m_2 = 2$  kg,  $\alpha = 60^\circ$  y  $\beta = 30^\circ$ , ¿se pondrá en movimiento el sistema?.
- Suponga ahora que inicialmente se le da al sistema cierta velocidad inicial y que los

datos son los dados en b). Encuentre la aceleración y describa cómo será el movimiento del sistema teniendo en cuenta los dos sentidos posibles de dicha velocidad.

8 - **Pregunta:** ¿Cuál es el vicio del siguiente razonamiento? Sobre un cuerpo apoyado sobre la pared se ejerce una fuerza  $F$ .

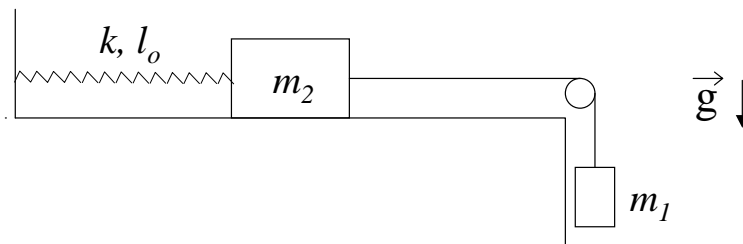


El cuerpo está en reposo porque su peso es equilibrado por la fuerza de rozamiento. Como  $f_r$  es proporcional a la normal, podemos conseguir que el cuerpo ascienda aumentando el valor de  $F$ .

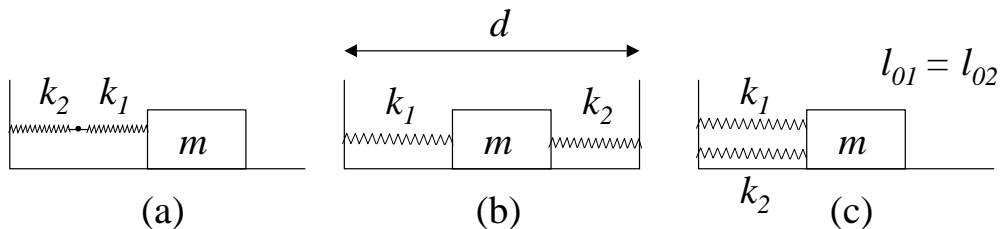


## 4- MOVIMIENTO OSCILATORIO

- 1 - Considere una partícula de masa  $m$  suspendida del techo por medio de un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0$ . Determine cómo varía la posición con el tiempo sabiendo que en  $t = 0$  la partícula se halla a una distancia  $2l_0$  del techo, con velocidad nula.
- 2 - El sistema de la figura, compuesto por dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  y un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0$ , se encuentra inicialmente en equilibrio. Se lo pone en movimiento imprimiendo a la masa  $m_1$  una velocidad  $v_0$  hacia abajo. Considere que no hay rozamiento entre los cuerpos y las superficies.



- a) Plantee las ecuaciones de Newton y de vínculo para  $m_1$  y  $m_2$ .
  - b) Diga cómo varía la posición de  $m_2$  con el tiempo.
- 3 - Un cuerpo de masa  $m$  se desliza sobre una superficie horizontal, sin rozamiento, conectado a dos resortes de constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$ , y longitudes naturales  $l_{01}$  y  $l_{02}$ , respectivamente, tal como se muestra en las figuras a), b) y c).



- i) Demostrar que la frecuencia de oscilación vale, en el caso a)

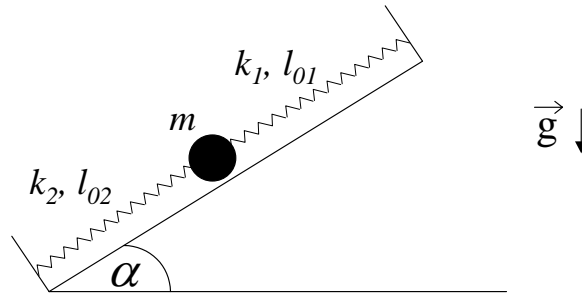
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) m}}$$

y en los casos b) y c):

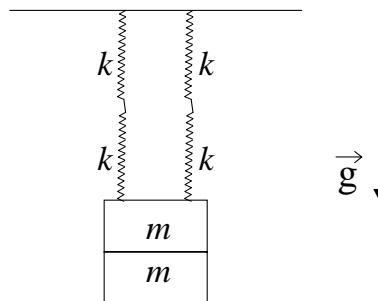
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

ii) Encuentre las posiciones de equilibrio en cada uno de los casos.

- 4 - Una bolita de masa  $m$  se halla sobre un plano inclinado sostenida por dos resortes, de constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$ , y longitudes libres  $l_{01}$  y  $l_{02}$ , respectivamente, los cuales se encuentran fijos a dos paredes separadas una distancia  $L$ .



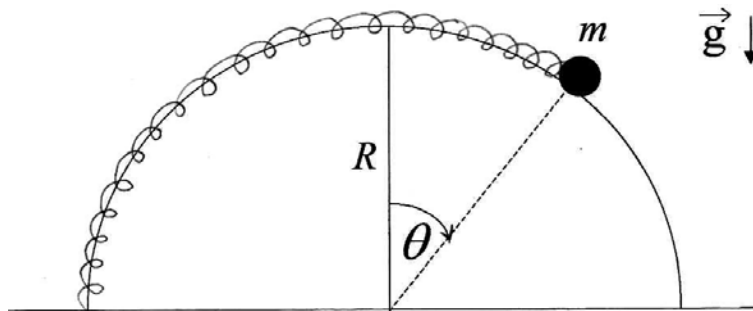
- a) Plantee la ecuación de Newton para la bolita y encuentre la ecuación de movimiento.  
 b) Halle la posición de equilibrio y determine si es estable o inestable.  
 c) Si partiendo de la posición de equilibrio el sistema se pone en movimiento imprimiéndole a la bolita una velocidad  $v_0$  hacia arriba, encuentre la posición de la bolita como función del tiempo.
- 5 - Cuatro resortes idénticos, de constante elástica  $k$  desconocida y longitud natural  $l_0$ , se hallan sosteniendo un cuerpo formado por dos pesas de masa  $m$  cada una, como muestra la figura.



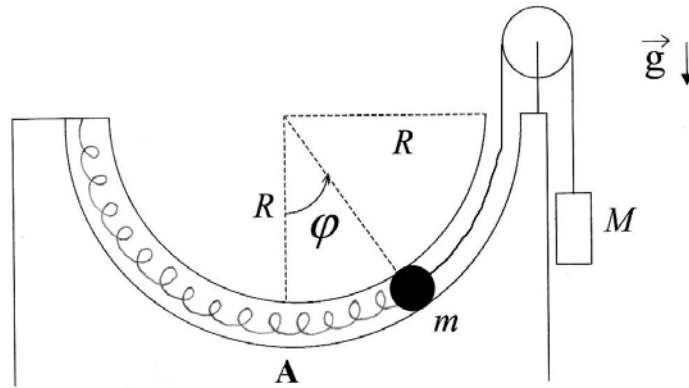
- a) Sabiendo que la posición de equilibrio del cuerpo se halla a una distancia  $d$  del techo, encuentre el valor de  $k$ .  
 b) Estando el sistema en su posición de equilibrio se retira una de las pesas sin perturbarlo y se lo deja en libertad.  
 i) Obtenga la ecuación que rige el movimiento posterior del sistema. Calcule el período de oscilación y la nueva posición de equilibrio.  
 ii) Utilizando las condiciones iniciales halle la posición del cuerpo en función del tiempo.

- 6 - Un cuerpo de masa  $m$  que se halla suspendido de un hilo inextensible, de longitud  $L$  y masa despreciable, realiza un movimiento oscilatorio en un plano vertical, siendo  $\theta$  el ángulo entre la vertical y el hilo.
- Plantee las ecuaciones de Newton y de vínculo para el cuerpo.
  - Si  $L=80$  cm ¿Bajo qué aproximación el movimiento es armónico? ¿Qué período tiene el movimiento?
  - Si en  $t = 0$  vale  $\theta = 0$  y  $\dot{\theta} = 0.2 \text{ seg}^{-1}$  ¿se satisface la aproximación de b)  $\forall t$ ?
  - Usando las ecuaciones planteadas en a) halle la posición de equilibrio y diga si es estable o inestable y por qué.

- 7 - Una bolita de masa  $m$  está enhebrada en un aro semicircular de radio  $R$  y sujeta a un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0 = \pi R/2$ , como muestra la figura.

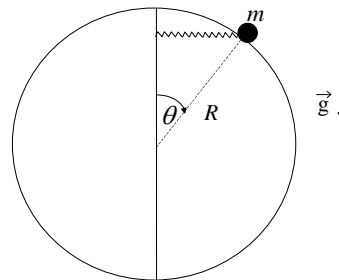


- Halle la ecuación diferencial que rige el movimiento de la bolita.
  - Encuentre posiciones de equilibrio y determine, justificando su respuesta, si son estables o inestables.
- 8 - Una bolita de masa  $m$  se mueve por un tubo delgado, carente de rozamiento, el cual describe una semicircunferencia de radio  $R$ . La bolita se halla sujeta por un extremo a un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0 = \pi R/2$ , y por el otro a una soga, deslizando ambos elementos por el interior del tubo, tal como muestra la figura. Del extremo de la soga pende, a través de una polea, otro cuerpo de masa  $M$  que actúa como contrapeso. Considere la soga inextensible, y las masas de soga, resorte y poleas despreciables. En el instante inicial la bolita se halla en el punto A ( $\varphi = 0$ ) con velocidad  $v_0$ .



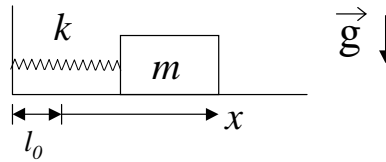
- Plantee las ecuaciones de Newton y de vínculo para los cuerpos que forman el sistema.
- Encuentre la ecuación diferencial que rige el movimiento de la bolita.
- Halle gráficamente la o las posiciones de equilibrio de la bolita, determinando si corresponden a posiciones de equilibrio estable o inestable.
- Halle la expresión de la fuerza de vínculo ejercida por el tubo sobre la bolita como función del ángulo  $\varphi$ .

9 - Una bolita de masa  $m$  está enhebrada en un aro circular, carente de fricción y de radio  $R$ , unida al extremo de un resorte de constante  $k$  y longitud natural nula (se considera despreciable frente al radio del aro). El otro extremo del resorte corre libremente a lo largo de un eje vertical, de modo tal que el resorte permanece siempre en posición horizontal, tal como muestra la figura.



- Halle las ecuaciones de Newton y de vínculo para la bolita.
- Si inicialmente bolita se encuentra en  $\theta = \pi/2$  con velocidad nula, halle la expresión de la fuerza de vínculo ejercida por el aro en función del ángulo  $\theta$ .
- Encuentre las posiciones de equilibrio y analice si son estables o inestables.

10 - El sistema de la figura, formado por un cuerpo de masa  $m$  que desliza sobre una superficie horizontal unido un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$ , se halla sumergido en un medio viscoso que le ejerce una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad del cuerpo, siendo  $r$  la constante de proporcionalidad.



- a) Escriba la ecuación diferencial que rige el movimiento del cuerpo.  
 c) Definiendo  $\beta = r/2m$ ,  $\omega_0^2 = k/m$ , halle las soluciones  $x(t)$  de la ecuación de movimiento y verifique que son:

i) si  $\beta^2 > \omega_0^2$

$$x(t) = e^{-\beta t} \left( A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

ii) Si  $\beta^2 = \omega_0^2$

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 + A_2 t)$$

iii) Si  $\beta^2 < \omega_0^2$

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi)$$

- d) Grafique  $x$  versus  $t$  para los tres casos considerados en el punto c), y analice los gráficos.

- 11 - Un péndulo simple de 10 g de masa tiene inicialmente un período de 2 seg y una amplitud de  $2^\circ$ . Luego se lo sumerge en un medio viscoso, con constante de amortiguamiento  $r$ , y después de dos oscilaciones completas la amplitud se reduce a  $1.5^\circ$
- a) Expresar el ángulo que forma el péndulo con la vertical como función del tiempo, antes y después de sumergirse en el medio viscoso.  
 b) Usando los datos numéricos del problema, encuentre el valor de la constante de amortiguamiento  $r$ .

- 12 - Una partícula de masa  $m$  está unida al extremo de un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0$ . El otro extremo del resorte está unido a una pared que se mueve de acuerdo a la ley  $x_p(t) = L \cos(\omega t)$ . La partícula está sometida también a la acción de una fuerza viscosa tal que  $\vec{F}_v = -r\dot{x}\hat{x}$ .

- a) Escriba la ecuación de Newton para la partícula. Indique claramente cuáles son las fuerzas que actúan sobre ella.  
 c) Para el caso  $\frac{k}{m} > \left(\frac{r}{2m}\right)^2$ , diga cuál es la solución de la ecuación de movimiento  $x(t)$ . Para tiempos largos ( $\beta t \gg 1$ , con  $\beta = \frac{r}{2m}$ ), diga en qué dirección se mueve la partícula cuando la pared se mueve hacia la derecha, si  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

## 5- SISTEMAS NO INERCIALES

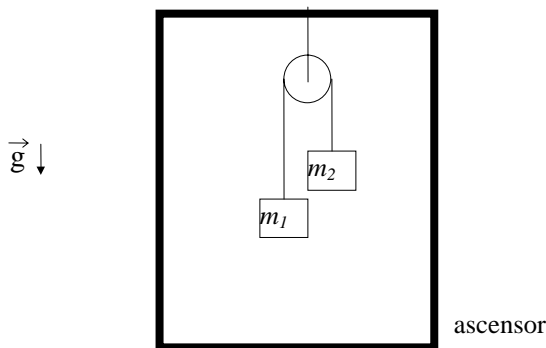
1 - Un paquete de masa  $m$  está apoyado en el piso de un colectivo, el cual parte del reposo con una aceleración constante  $a$ .

Diga cuáles son las fuerzas aplicadas sobre el paquete, cuáles son de interacción y cuáles de inercia. Describa el movimiento del paquete visto por un observador en el colectivo y por otro que está en la calle, en los casos:

i) El paquete no desliza sobre el piso del colectivo. Para este caso calcule, además, la relación entre la máxima aceleración que puede tener el colectivo y el coeficiente de rozamiento estático entre el paquete y el piso.

ii) Se reduce a cero el rozamiento entre el paquete y el piso (por ejemplo, apoyando el paquete en un carrito).

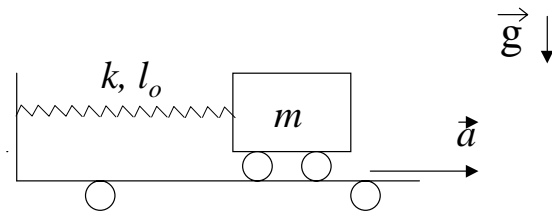
2 - Dos cuerpos de masas,  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, penden de los extremos de un hilo inextensible que pasa a través de una polea ideal fija al techo de un ascensor.



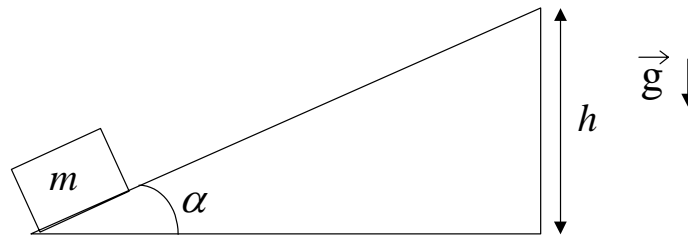
Halle la aceleración de las masas para un observador que se halla dentro del ascensor y para otro que se halla quieto afuera del ascensor si:

- El ascensor sube con velocidad constante.
- El ascensor sube con aceleración  $a$ .
- El ascensor baja con aceleración  $a$ .
- Se corta el cable del ascensor.

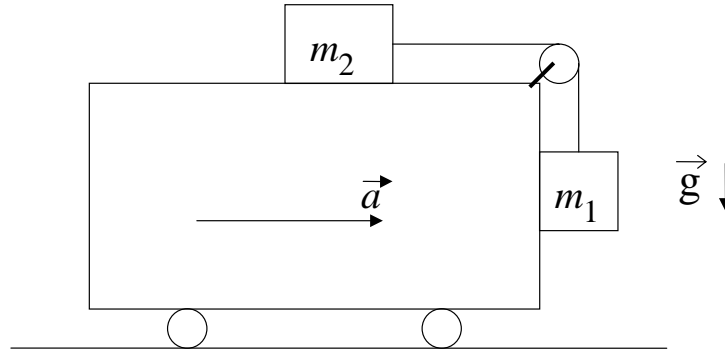
3 - Un cuerpo de masa  $m$ , en reposo sobre una plataforma horizontal exenta de rozamiento, está sujeto al extremo de un resorte de la manera indicada en la figura. La constante elástica del resorte es  $k$  y su longitud natural es  $l_0$ . Súbitamente se pone en movimiento la plataforma con una aceleración constante  $a$ , en la dirección horizontal.



- a) Dibuje las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en un sistema de referencia unido a la plataforma y luego en otro, exterior a ella, en reposo.
  - b) Describa el movimiento de  $m$  respecto de la plataforma.
  - c) Si la plataforma tiene masa  $M$ , determinar la fuerza necesaria para mantener constante su aceleración.
- 4 - Un bloque de masa  $m$  se halla sobre un plano inclinado, de inclinación  $\alpha$  y altura  $h$ , el cual descansa sobre una superficie horizontal, como muestra la figura. Ambas superficies carecen de fricción, y tanto el bloque como el plano pueden moverse.
- a) ¿Cuál es la aceleración  $\vec{a}$  que debe imprimirse al plano inclinado para que el bloque llegue al extremo superior del mismo con velocidad  $v_1$  partiendo de su extremo inferior con velocidad inicial nula? Considere que ambas velocidades del bloque son medidas con respecto al plano inclinado.



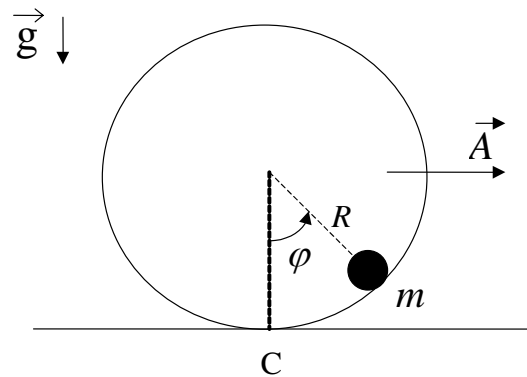
- 5 - Un cuerpo de masa  $m_2$  se halla apoyado sobre el techo de un vagón, unido por medio de un hilo inextensible a otro cuerpo de masa  $m_1$ , que pende del otro extremo del hilo, tal como muestra la figura. El vagón se mueve hacia la derecha con aceleración constante  $a$  y los coeficientes de rozamiento estático en las superficies horizontal y vertical son  $\mu_{e2}$  y  $\mu_{e1}$ .
- a) Escriba las ecuaciones de Newton y de vínculo de ambos cuerpos para un observador que viaja en el vagón.
  - b) ¿Para qué valores de la aceleración  $a$ ,  $m_1$  no sube ni baja?



- 6 - Un tren sube una pendiente que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. El movimiento es uniformemente acelerado con una aceleración  $a$ . En el interior de uno de los vagones se hacen los siguientes experimentos:
- Se determina la dirección de la vertical usando una plomada.
  - Se determina el período de un péndulo para oscilaciones pequeñas.
  - Se determina la fuerza que registra un dinamómetro cuando se cuelga del mismo un objeto de masa  $m$ .
- Describe cualitativamente los resultados en los casos:
- $\alpha = 0$ ,  $a \neq 0$ .
  - $\alpha \neq 0$ ,  $a = 0$ .
  - $\alpha \neq 0$ ,  $a = -g \operatorname{sen} \alpha$ ; (¿qué significan estos datos ?)
  - $\alpha \neq 0$ ,  $a \neq 0$ .

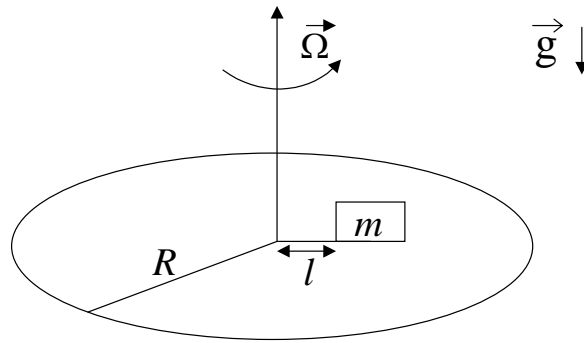
- 7 - Una partícula de masa  $m$  se halla engarzada en un riel circular de radio  $R$ , carente de rozamiento. En un dado instante la partícula se encuentra en reposo en el punto  $C$ , y se aplica sobre el riel una fuerza tal que a partir de ese instante el mismo se mueve con aceleración constante  $\vec{A}$ , tal como indica la figura. Utilice para resolver el problema un sistema no inercial fijo al riel.





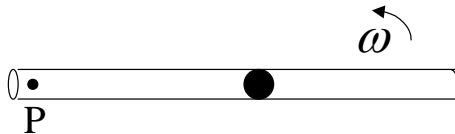
- Haga un diagrama de las fuerzas que actúan sobre  $m$ , y determine cuáles son sus pares de interacción. Plantee las ecuaciones de Newton, y encuentre la ecuación que rige el movimiento de la partícula.
- Expresar el valor de la normal ejercida por el riel sobre  $m$  como función del ángulo  $\varphi$ .
- Encuentre la posición de equilibrio, y determine si el equilibrio es estable o inestable.

8 - Una plataforma de radio  $R$ , gira con velocidad angular  $\Omega$  constante alrededor de un eje vertical situado en su centro. Sobre la plataforma se halla apoyado un paquete de masa  $m$  (hay rozamiento entre el paquete y la superficie de la plataforma, siendo  $\mu_e$  y  $\mu_d$  los coeficientes de rozamiento estático y dinámico, respectivamente). En el instante  $t = 0$  el paquete se halla en reposo sobre la plataforma a una distancia  $l$  del centro, con  $l < R$ .

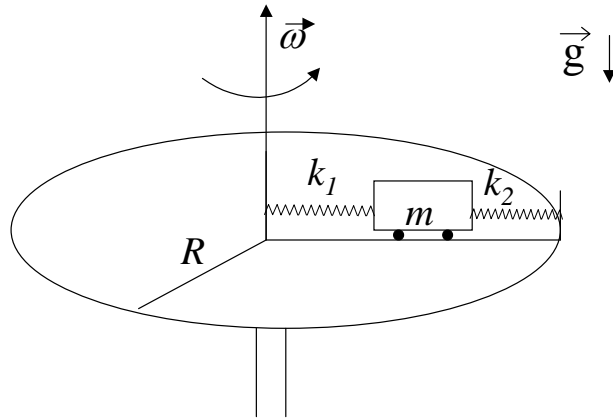


- Escriba las ecuaciones de Newton para el paquete en un sistema solidario a la plataforma,  $S'$ , indicando los pares de acción y reacción de las fuerzas que actúan sobre él.
- Halle la máxima velocidad angular  $\Omega_{\max}$  que puede tener la plataforma para que el paquete no deslice sobre la plataforma.
- Si desaparece el rozamiento, halle la velocidad del paquete en el sistema  $S'$  como función de la distancia al centro de la plataforma. Describa cualitativamente el movimiento del paquete.

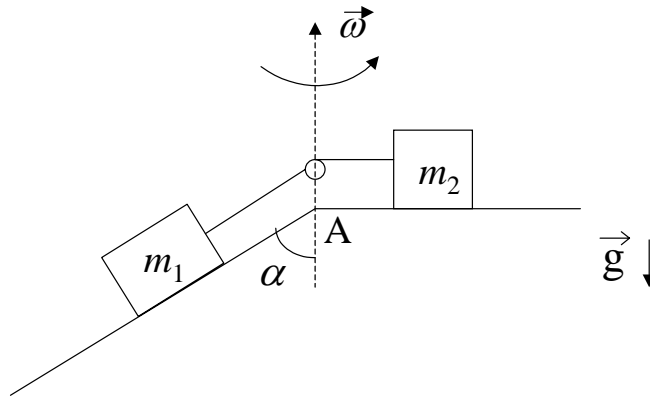
9 - Una bolita de masa  $m$  se encuentra dentro de un tubo sin fricción que gira alrededor de  $P$ , en un plano horizontal, con velocidad angular  $\omega$  constante. Inicialmente la bolita se halla en reposo con respecto al tubo y a una distancia  $L$  del punto  $P$ .



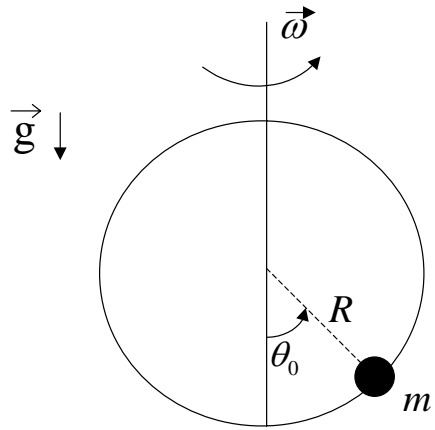
- Escriba las ecuaciones de Newton para la bolita utilizando un sistema de referencia fijo al tubo.
  - Encuentre la distancia de la bolita con respecto a  $P$  como función del tiempo.
  - Encuentre la fuerza ejercida por el tubo sobre la bolita como función del tiempo.
- 10 - Sobre una vía recta montada sobre una mesa horizontal que puede girar alrededor de un eje vertical se mueve un carrito de masa  $m$ . Este está sujeto entre dos resortes que, a su vez, están unidos a la vía como en la figura y tienen constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$  y longitudes naturales  $l_{01}$  y  $l_{02}$ , respectivamente.
- Escriba las ecuaciones dinámicas para el carrito en un sistema de referencia fijo a la mesa.
  - Encuentre la distancia del carrito al centro de la mesa como función del tiempo.
  - Encuentre la fuerza ejercida por el riel sobre el carrito como función del tiempo.



- 11 - Dos masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por una soga inextensible de longitud  $L$  y de masa despreciable (ver figura). Los dos cuerpos están sobre un riel que gira con velocidad angular  $\omega$  constante y el riel no permite que los cuerpos se muevan hacia los costados. En el instante  $t = 0$ , la masa  $m_1$  se encuentra en la posición A con velocidad nula con respecto al riel.

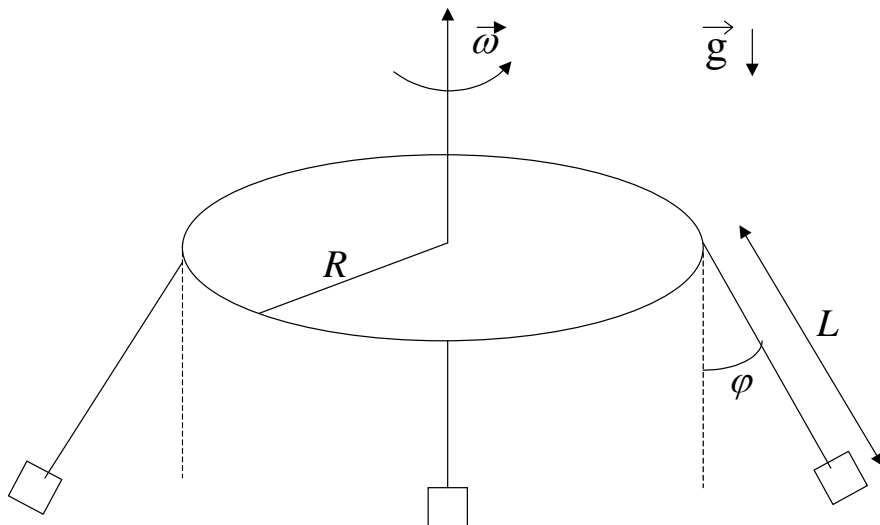


- En un sistema no inercial solidario al riel, indique cuáles son las fuerzas y pseudofuerzas que actúan sobre cada masa. Identifique los pares de acción y reacción.
  - Plantee las ecuaciones de Newton y de vínculo en un sistema no inercial solidario al riel.
  - Resuelva las ecuaciones de movimiento y describa cómo será el movimiento de las partículas.
- 12 - Una bolita de masa  $m$  se encuentra engarzada en un alambre circular de radio  $R$ , ubicado en posición vertical. El aro de alambre gira alrededor de su diámetro vertical con velocidad angular  $\omega$  constante, de manera tal que la bolita se halla en la posición de equilibrio  $\theta_0$ .



- Escriba las ecuaciones de Newton utilizando un sistema de referencia fijo al aro, indicando las fuerzas de interacción que actúan sobre la bolita.
- Calcule el ángulo  $\theta_0$  y determine si el equilibrio es estable o inestable.
- Determine la ecuación de movimiento y encuentre la fuerza de vínculo ejercida por el alambre sobre la bolita.

13 - Un entretenimiento llamado silla voladora consiste en un disco horizontal de radio  $R$  de cuyo perímetro cuelgan hilos de longitud  $L$ . En el extremo de cada uno de estos hilos hay una canastilla dentro de la cual se ubica una persona. Considere un sistema de coordenadas fijo al disco el cual gira con velocidad angular constante  $\omega$  (ver figura).



Si todos los hilos forman con la vertical el mismo ángulo  $\varphi$ ,

- ¿Es razonable inferir que todos los pasajeros tienen igual masa?.
- Halle  $\omega$ .