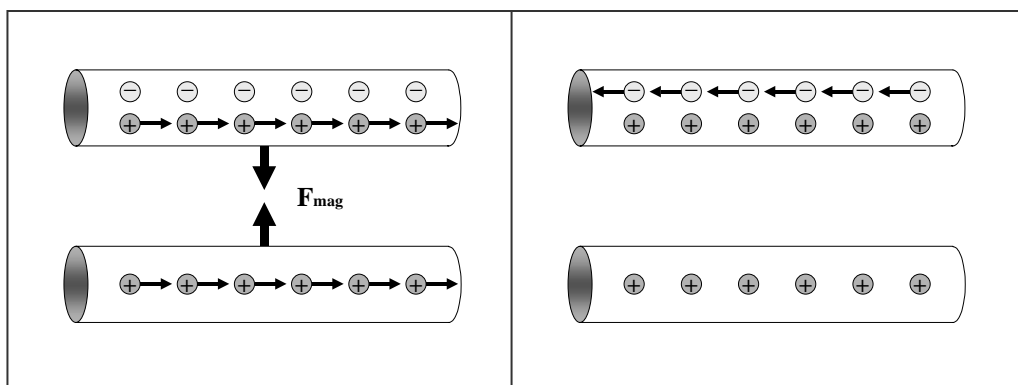


# Relatividad Especial \*

Rafael Ferraro

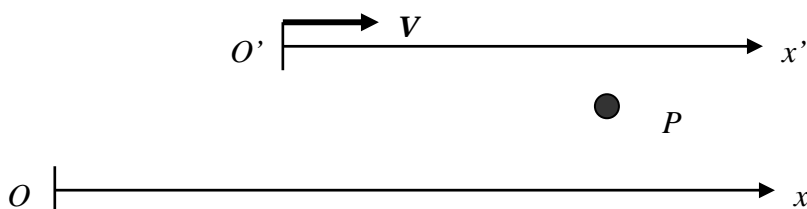
## El Principio de relatividad y las leyes de Maxwell

El Principio de relatividad afirma que las mismas leyes fundamentales de la Física se satisfacen en todos los sistemas inerciales. Cabría entonces preguntarse si las leyes de Maxwell tienen o no el status de leyes fundamentales de la Física, en el sentido de que se aplique a ellas el enunciado del Principio de Relatividad. Para analizar esta cuestión consideremos la siguiente distribución de cargas:



La Figura de la izquierda muestra dos hilos infinitos que portan corrientes iguales; uno es neutro y el otro está cargado. Las leyes del electromagnetismo nos dicen que existe una interacción magnética entre ambos hilos. En la Figura de la derecha se representa la misma configuración vista en un sistema de referencia que acompaña a las cargas positivas. En este caso las leyes de Maxwell nos dicen que no existe interacción alguna pues uno de los hilos carece de corriente mientras que el otro hilo carece de carga. Los resultados obtenidos de aplicar las mismas leyes en dos sistemas de referencia distintos son claramente contradictorios (la existencia de una interacción debería ser un hecho absoluto, independiente del sistema de referencia). A primera vista esta contradicción parecería indicar que no es posible utilizar las leyes de Maxwell en dos sistemas de referencia distintos. En tal caso las leyes de Maxwell no cumplirían el Principio de Relatividad, y sería menester identificar el sistema de referencia donde las leyes de Maxwell son aplicables. Sin embargo, debe remarcarse que el paso de la Figura de la izquierda a la Figura de la derecha no es completamente inocente porque entraña dos suposiciones: que las distancias no cambian y que las cargas no cambian.

La creencia en distancias absolutas ha sido una piedra basal en la construcción de la Mecánica de Newton, y debemos admitir que nuestra experiencia cotidiana nos da repetidas muestras de que se trata de una buena hipótesis sobre la naturaleza del espacio. Sin embargo la experiencia cotidiana es buena consejera sólo en el rango de fenómenos que ella misma abarca. Examinemos cómo entra la creencia en distancias absolutas en las transformaciones de Galileo:



\* Versión en castellano de R. Ferraro, *Relatividade Especial*, Anais da V Escola do CBPF (Vol. 1), p. 207-232, editado por L.M.C.S. Rodrigues et al., Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (Rio de Janeiro, 2005), ISBN 85-85752-13-0. <http://mesonpi.cat.cbpf.br/e2004/docs/G9-ferraro.pdf>

En la Figura está claro que  $d_{OP} = d_{OO'} + d_{O'P}$ . Esta relación entre distancias vale si todas las distancias están medidas en un mismo sistema, ya sea  $S$  o  $S'$ . Lo que llamamos coordenada  $x$  no es más que la distancia  $d_{OP}$  medida en  $S$ , mientras que  $x'$  es la distancia  $d_{O'P}$  medida en  $S'$ . Por otro lado,  $d_{OO'}$  medida en  $S$  es igual a  $Vt$ . De aquí se concluye que

$$d_{O'P} \text{ medida en } S = x - Vt \quad (1)$$

Sólo nuestra creencia en distancia absolutas nos incita a reemplazar el miembro izquierdo por  $x'$ , para así obtener las transformaciones de Galileo. Dicho sea de paso, la hipótesis de distancias absolutas lleva inexorablemente a considerar tiempos igualmente absolutos. En efecto, para que no haya privilegio entre  $S$  y  $S'$  la transformación de Galileo inversa debe verse igual a la directa salvo por el cambio de  $V$  por  $-V$ :

$$x' = x - Vt, \quad x = x' + Vt', \quad (2)$$

pero esto es consistente sólo si

$$t' = t. \quad (3)$$

El problema planteado más arriba sobre el uso de las leyes de Maxwell en sistemas de referencia distintos suele exponerse en esta sentencia: las leyes de Maxwell NO son invariantes ante transformaciones de Galileo. Si las transformaciones de Galileo son nuestra herramienta para pasar de un sistema de referencia a otro, entonces las leyes de Maxwell no podrían ser utilizadas más que en un único sistema de referencia, y no entrarían dentro del Principio de relatividad. En realidad, esta cuestión tenía sin cuidado a Maxwell porque las ondas electromagnéticas que resultaban de sus ecuaciones eran vistas por aquel entonces como ondas *materiales* (resultado de la perturbación de un medio material: el éter), como otras tantas ondas materiales conocidas (el sonido, la perturbaciones de la superficie del agua de un estanque, etc.). Este tipo de fenómenos tiene un sistema de referencia naturalmente privilegiado, que es el sistema fijo al medio material donde la perturbación se propaga. La ecuación de onda que describe esa propagación es válida sólo en el sistema fijo al medio, y nadie pretendía que sea invariante ante transformaciones de Galileo (es fácil verificar que no lo es). Más aún, la velocidad de propagación de la onda está escrita en la propia ecuación de onda, apareciendo como un coeficiente relacionado con las propiedades del medio material; es evidente que ésa sólo puede ser la velocidad de propagación relativa al medio. En efecto, de las transformaciones de Galileo resulta que las velocidades no son invariantes:

$$u_x' = u_x - V, \quad (4)$$

por lo tanto una ecuación de onda no podría valer más que un único sistema de referencia.

La teoría ondulatoria de la luz era anterior a Maxwell: nació con Huygens (1678), y alcanzó su formulación matemática acabada con Fresnel (1818). La semejanza entre el valor medido de la velocidad de la luz y la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en la teoría de Maxwell, demostró que la luz es un fenómeno electromagnético. El carácter intangible del éter (la luz se propaga en regiones aparentemente “vacías”), movió a los físicos del siglo XIX a intentar detectar no ya el éter mismo, sino nuestro estado de movimiento respecto del éter. Los experimentos buscaban medir diferencias en las velocidades de propagación de rayos de luz, que revelarían una composición galileana de velocidades entre la velocidad de la luz relativa al éter y la velocidad del laboratorio relativa al éter (Hoek, 1868; Michelson, 1881; Michelson-Morley, 1887; etc.), o alteraciones de la ley de Snell debidas al movimiento relativo al éter del material transparente donde un rayo se refracta (Arago, 1810; Airy, 1871). Los resultados de estos experimentos fueron siempre negativos: el movimiento del laboratorio relativo al éter nunca se evidenció. Se tejieron distintas hipótesis acerca de la interacción del éter con la materia para justificar estos resultados. Estas teorías dinámicas sobre la interacción entre éter y el resto de la materia alcanzaron su forma más elaborada en la *Teoría de los electrones* de Lorentz (1895).

## La relatividad de Einstein

Mientras la comunidad científica debatía estas cuestiones, en 1905 Einstein cambió el enfoque del problema proponiendo que las leyes de Maxwell son leyes fundamentales que integran, por lo tanto, el conjunto de leyes que satisfacen el Principio de relatividad. Para Einstein el campo electromagnético tiene entidad propia, y no precisa una “materialización” mediante la idea de un éter. Si el éter no existe, entonces no hay nada que privilegie un sistema de referencia frente a otro, y las leyes de Maxwell deben ser válidas en cualquier sistema de referencia inercial. Esto significa que la luz se propaga con la misma velocidad  $c$  en cualquier sistema de referencia inercial. No existen entonces las diferencias de velocidad buscadas por los experimentadores, y la ley de Snell se cumple en cualquier laboratorio donde el material refractante esté en reposo relativo. Claro que admitir una velocidad finita invariante rompe con el teorema de adición de velocidades de Galileo, y supone entonces el abandono de nuestra creencia en distancias y tiempos absolutos. Einstein propuso elevar las leyes de Maxwell al rango de leyes fundamentales, abandonando nuestras nociones intuitivas de espacio y tiempo para subordinarlas a la invariancia de la velocidad de la luz.

Procederemos ahora a replantear la transformación de coordenadas cuidando de no introducir en ellas prejuicio alguno sobre la naturaleza del espacio y el tiempo. En la Figura se muestra una barra recorrida por una partícula; el movimiento relativo barra-partícula está caracterizado por la velocidad relativa  $V$ :



En la Figura de la izquierda se describe el movimiento relativo en el sistema fijo a la barra, mientras que la Figura de la derecha lo describe en el sistema fijo a la partícula. Como no estamos dispuestos a prejujgar sobre la naturaleza del espacio y el tiempo, hemos dibujado la barra con distintas longitudes en cada sistema. Llamamos *longitud propia*  $L_o$  a la longitud de la barra en el sistema donde se encuentra en reposo. El tiempo que demora el recorrido de la partícula a lo largo de la barra también puede depender del sistema de referencia. Llamaremos *tiempo propio*  $\Delta\tau$  al tiempo transcurrido entre dos *eventos* medido en el sistema de referencia donde los eventos ocurren en la misma posición (siempre que tal sistema exista). En el caso bajo estudio, los dos eventos son el paso de la partícula por un extremo de la barra y el paso de la partícula por el otro extremo de la barra. Estos dos eventos ocurren en la misma posición en el sistema fijo a la partícula; de modo que el tiempo transcurrido entre los eventos es un tiempo propio en el sistema de la Figura de la derecha. La mera definición de velocidad nos permite escribir:

$$L_o = V \Delta t, \quad L = V \Delta\tau, \quad (5)$$

donde  $\Delta t$  es el tiempo del recorrido de la partícula a lo largo de la barra en el sistema de la Figura de la derecha. De aquí resulta

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{L_o}{L} \quad (6)$$

Esta relación nos dice que si estamos dispuestos a renunciar a distancias absolutas ( $L_o \neq L$ ) también habremos de renunciar a tiempos absolutos ( $\Delta\tau \neq \Delta t$ ). Además nos dice que la relación entre la longitud en movimiento y la longitud propia de un mismo cuerpo tiene el mismo carácter que la relación entre tiempo propio y el tiempo entre el mismo par de eventos en otro sistema de referencia. Concretamente, ambas relaciones no pueden depender más que de la velocidad relativa  $V$  entre el sistema propio correspondiente y el otro sistema de referencia arbitrario. La ecuación (6) dice entonces que la misma función  $\gamma(V)$  que expresa la relación entre longitudes ha de expresar también la relación entre tiempos:

$$\frac{L_o}{L} = \gamma(V) \quad \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \gamma(V) \quad (7)$$

En realidad las relaciones (7) suponen que el espacio y el tiempo son isótropos y homogéneos; de otra forma las relaciones podrían depender del lugar o el instante de ocurrencia de los eventos o de la orientación de la barra. Vamos a admitir, como en la Física clásica, que el espacio está dotado de una geometría euclidiana –por lo tanto es isótropo y homogéneo–, y que las relaciones (7) no dependen del tiempo (homogeneidad del tiempo).

La forma de la función  $\gamma(V)$  será dictada por la invariancia de la velocidad de la luz a la cual se subordinarán las nociones de espacio y tiempo. Para hallar  $\gamma(V)$  reemplacemos la partícula del experimento anterior por un rayo de luz, coloquemos un espejo en un extremo de la barra, y consideremos como par de eventos el paso del rayo de luz por el extremo libre de la barra, y su regreso al mismo luego de reflejarse en el espejo. En este caso el tiempo propio entre los eventos corresponde al sistema fijo a la barra pues ambos eventos ocurren en el mismo extremo de la barra. Como la luz viaja con velocidad  $c$  (¡en cualquier sistema!) diremos que

$$c \Delta \tau = 2 L_0, \quad (8)$$

en tanto en el otro sistema el tiempo  $\Delta t$  entre los eventos lo calculamos con la misma velocidad  $c$  para el rayo de luz; teniendo en cuenta el desplazamiento de la barra de longitud  $L$  resulta

$$c \Delta t_{ida} = V \Delta t_{ida} + L, \quad c \Delta t_{vuelta} = L - V \Delta t_{vuelta},$$

entonces

$$\Delta t = \Delta t_{ida} + \Delta t_{vuelta} = \frac{L}{c-V} + \frac{L}{c+V} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \quad (9)$$

Dividiendo (8) y (9), y usando las relaciones (7) se obtiene

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \quad (10)$$

Luego

$$\text{contracción de longitudes} \quad L = L_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \quad (11)$$

$$\text{dilatación del tiempo} \quad \Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad (12)$$

Estas son las relaciones entre longitudes y tiempos que resultan de admitir la existencia de una velocidad finita  $c$  invariante (igual en todos los sistemas de referencia). Las transformaciones de Galileo, en cambio, no dejan ninguna velocidad finita invariante (véase (4)); podría decirse que la única velocidad “invariante” en (4) es la velocidad

infinita. Consistentemente podemos reencontrar las nociones clásicas de espacio y tiempo tomando en (11-12) el límite  $c \rightarrow \infty$ . También podemos ver en (11-12) la razón por la cual nuestra experiencia cotidiana no es capaz de revelarnos la relatividad de distancias y tiempos: la velocidad invariante  $c$  (la velocidad de la luz) es mucho mayor que las velocidades  $V$  involucradas en el rango de fenómenos cotidianos, de modo que el factor  $\gamma(V)$  es prácticamente igual a 1 en ese rango. ¿Intuyen ahora cuál es la respuesta relativista al problema planteado en la primera Figura?

Podríamos preguntarnos qué sucede con el factor  $\gamma(V)$  si  $V > c$ . Si  $V$  fuera mayor que  $c$  entonces el rayo de luz no alcanzaría al espejo en el sistema donde la barra se mueve. Esto nos llevaría a una situación absurda donde un evento que ocurre en un sistema (la llegada del rayo de luz al espejo) no sucede en otro sistema. Esto nos está indicando que la velocidad  $c$  debe ser una velocidad límite para los cuerpos materiales:  $V < c$ . Volveremos a esta cuestión en la clase de Dinámica relativista.

Ahora sabemos qué hacer con “ $d_{O'P}$  medida en  $S$ ” en la ecuación (1). La coordenada  $x'$  es  $d_{O'P}$  medida en  $S'$ , y puede pensarse como la longitud  $L_o$  de una regla en reposo en el sistema  $S'$ . Entonces  $d_{O'P}$  medida en  $S$  es la longitud contraída de esa regla:  $d_{O'P}$  medida en  $S = \gamma(V)^{-1} d_{O'P}$  medida en  $S' = \gamma(V)^{-1} x'$ , y la ecuación (1) resulta:

$$x' = \gamma(V) (x - Vt) \quad (13)$$

**Ejercicio 1:** Para que los sistemas  $S$  y  $S'$  estén en pie de igualdad, la transformación inversa de (13) debe tener su misma forma salvo por el cambio de  $V$  por  $-V$

$$x = \gamma(V) (x' + Vt') \quad (14)$$

Utilice (13) y (14) para obtener

$$t' = \gamma(V) (t - Vc^{-2}x) \quad (15)$$

$$t = \gamma(V) (t' + Vc^{-2}x') \quad (16)$$

**Ejercicio 2:** Mediante un experimento pensado, como el que permitió obtener  $\gamma(V)$ , demuestre que las longitudes transversales a la dirección del movimiento no cambian:

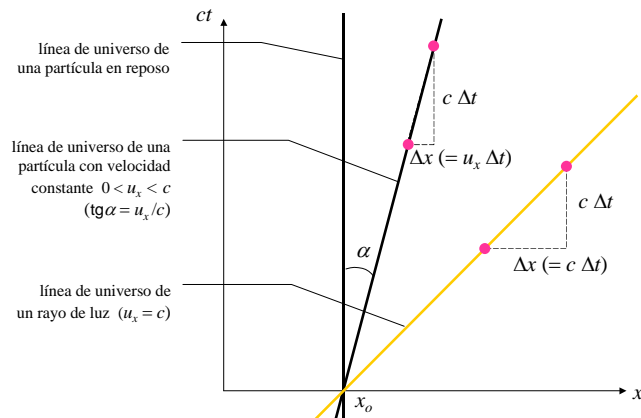
$$y' = y \quad (17)$$

$$z' = z \quad (18)$$

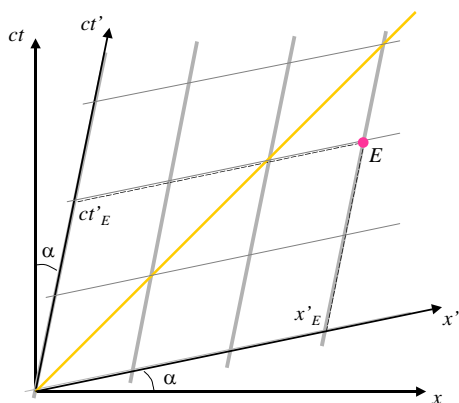
(Ayuda: coloque la barra con el espejo perpendicular a la dirección del eje  $x$ ).

Las transformaciones (13), (15), (17) y (18) son las transformaciones de coordenadas que dejan invariante la ecuación de onda con velocidad de propagación  $c$ . Se llaman *transformaciones de Lorentz* (Voigt, 1887; Larmor, 1900; Lorentz, 1899, 1904). Aunque fueron obtenidas antes del trabajo de Einstein, su interpretación era completamente diferente. Mientras que para Einstein la contracción de longitudes y la dilatación del tiempo son efectos puramente cinemáticos que no privilegian a sistema de referencia alguno (la barra tendrá longitud  $L_o$  en *cualquier* sistema de referencia donde se encuentre fija, y tendrá longitud  $L$  en *cualquier* sistema de referencia donde se mueva longitudinalmente con velocidad  $V$ ), según Lorentz la velocidad  $V$  era la velocidad de la barra respecto del éter, y la contracción era un hecho absoluto (verificado en todo sistema de referencia) producido por una interacción con el éter. Según Lorentz la “dilatación del tiempo” no afectaba al tiempo absoluto sino que involucraba a un “tiempo matemáticamente auxiliar”.

En Relatividad es común utilizar gráficos  $ct$  vs.  $x$ . En tales gráficos un evento es un punto, y un rayo de luz es una recta a  $45^\circ$ . Los movimientos de las partículas se denominan *líneas de universo*:



Es común insertar las líneas coordenadas del sistema  $S'$  en el gráfico espacio-temporal del sistema  $S$ . Para ello usamos las transformaciones (13) y (15) para determinar el lugar geométrico de los eventos que tienen  $t' = \text{constante}$  y  $x' = \text{constante}$ ; resultan ser rectas de pendiente  $V/c$  y  $(V/c)^{-1}$  respectivamente. En particular  $t' = 0$  caracteriza a los eventos que forman el eje  $x'$ , mientras que  $x' = 0$  caracteriza a los eventos que forman el eje  $t'$ :



Para extraer resultados cuantitativos de estos gráficos mixtos es necesario *calibrar* previamente los ejes de ambos sistemas de referencia. A diferencia de las rotaciones, las transformaciones de Lorentz no dejan invariantes circunferencias sino hipérbolas (como veremos enseguida); de manera que las unidades de medida en los ejes de  $S'$  difieren de las de los ejes de  $S$ . En cambio no hay dificultad en extraer resultados cualitativos, y el más evidente de todos es que los eventos que son simultáneos en  $S$  no lo son en  $S'$  y viceversa. La simultaneidad de eventos es una noción relativa (mientras que en Física clásica es absoluta). En efecto, en el sistema  $S$  son simultáneos todos los eventos que tengan la misma coordenada  $t$ , es decir todos los puntos que estén sobre una misma recta paralela al eje  $x$  de la Figura anterior. Por otro lado, en  $S'$  son simultáneos todos los eventos que tengan la misma coordenada  $t'$ , es decir que se trata de puntos dispuestos sobre rectas paralelas al eje  $x'$  de la Figura anterior. Evidentemente las nociones de simultaneidad de cada sistema difieren entre sí ( $\Delta t = 0$  NO implica  $\Delta t' = 0$  en las transformaciones de Lorentz). La relatividad de la simultaneidad es el ingrediente necesario para justificar que dos sistemas de referencia no acuerden en las dimensiones de un objeto. La medición de una barra en el sistema  $S$  implica la determinación de las posiciones *simultáneas* de sus extremos. Esta medición no es “buena” para el sistema  $S'$  porque éste no comparte la noción de simultaneidad de aquél.

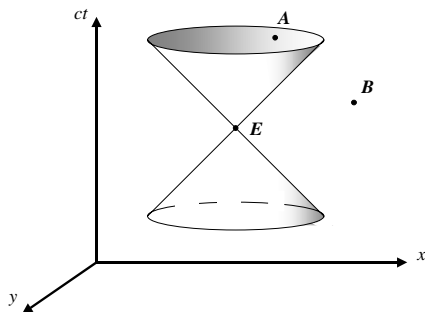
**Ejercicio 3:** Muestre que las transformaciones de Lorentz dejan invariante la siguiente combinación de distancias y tiempos que llamamos *intervalo*:

$$\Delta s^2 \equiv c^2 (\Delta t)^2 - |\Delta \mathbf{r}|^2 \quad (18)$$

donde  $\Delta t$  y  $|\Delta \mathbf{r}|$  son el tiempo transcurrido y la distancia entre dos eventos cualesquiera ( $|\Delta \mathbf{r}|^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ ). *Invariante* significa que la magnitud en cuestión tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia.

El intervalo tendría el aspecto de una distancia euclidiana en un *espacio-tiempo* de cuatro dimensiones, si no fuera porque las coordenadas espaciales entran con signo opuesto al de la coordenada temporal. Se dice entonces que el espacio-tiempo tiene una geometría *pseudo-euclidiana* (espacio-tiempo de Minkowski).

La invariancia del intervalo permite clasificar pares de eventos en forma independiente de los sistemas de referencia. Diremos que un par de eventos tiene separación temporal, espacial o nula según si el intervalo entre ellos es positivo, negativo o cero. Los eventos con separación nula están sobre rayos de luz ( $\Delta s = 0 \Leftrightarrow c \Delta t = \pm |\Delta \mathbf{r}|$ ) Esta clasificación absoluta introduce en el espacio-tiempo la noción de *cono de luz* de un evento. El cono de luz de un evento  $E$  está formado por todos los eventos que tienen separación nula con  $E$ . Esto significa que el cono de luz de  $E$  está generado por todos los rayos de luz que pasan por  $E$ . Los eventos interiores al cono de  $E$  están separados temporalmente de  $E$ . Los eventos exteriores al cono de  $E$  están separados espacialmente de  $E$ . A partir de la Figura anterior no es difícil ver que si dos eventos  $E$  y  $A$  están separados temporalmente siempre es posible construir un sistema de referencia donde los dos eventos ocurren en la misma posición (de manera que para ellos existe un tiempo propio). En cambio si dos eventos  $E$  y  $B$  están separados espacialmente siempre existe un sistema de referencia donde los dos eventos son simultáneos; en el resto de los sistemas de referencia o bien ocurre  $E$  antes que  $B$ , o bien ocurre  $B$  antes que  $E$ . Por lo tanto no puede hablarse de una relación causa-efecto entre eventos separados espacialmente. En cambio el orden temporal de dos eventos separados temporalmente es el mismo en todos los sistemas de referencia.



## Composición relativista de movimientos

Volvamos a realizar un experimento pensado para averiguar cuál es la corrección relativista que ha de sufrir el teorema de adición de velocidades de Galileo (4). Nuevamente consideremos una partícula que recorre con velocidad  $u_x$  la longitud de una barra que se mueve con velocidad  $V$ .



El tiempo transcurrido entre los pasos de la partícula frente a cada extremo de la barra satisface

$$u_x \Delta t = L + V \Delta t = \gamma(V)^{-1} L_0 + V \Delta t = \gamma(V)^{-1} u'_x \Delta t' + V \Delta t$$

En este caso, ni  $\Delta t$  ni  $\Delta t'$  son tiempos propios, porque el tiempo propio transcurre en el sistema fijo a la partícula. La relación del tiempo propio con  $\Delta t$  y  $\Delta t'$  es entonces

$$\Delta t = \gamma(u) \Delta \tau, \quad \Delta t' = \gamma(u') \Delta \tau, \quad \text{de modo que} \quad \gamma(u')^{-1} \Delta t' = \gamma(u)^{-1} \Delta t$$

y reemplazando

$$\gamma(u') u'_x = \gamma(u) \gamma(V) (u_x - V). \quad (19)$$

Si agregamos al movimiento de la partícula una componente transversal y recordamos que  $\Delta y = \Delta y'$ , entonces  $u_y \Delta t = u'_y \Delta t'$  y resulta

$$\gamma(u') u'_y = \gamma(u) u_y, \quad \text{y análogamente} \quad \gamma(u') u'_z = \gamma(u) u_z. \quad (20)$$

Cuando  $c \rightarrow \infty$  los factores  $\gamma$  tienden a 1 y se recuperan las transformaciones de velocidad galileanas.

En las transformaciones (19-20) podemos desembarazarnos de  $\gamma(u)$  y  $\gamma(u')$ . Para esto construimos la transformación inversa de (19) valiéndonos del argumento de que el único cambio debe ser el de  $\mathbf{V}$  por  $-\mathbf{V}$ :

$$\gamma(u) u_x = \gamma(u') \gamma(V) (u'_x + V). \quad (21)$$

Reemplazando (19) en (21) se obtiene

$$\gamma(u') = \gamma(u) \gamma(V) \left[ 1 - \frac{u_x V}{c^2} \right], \quad (22)$$

y dividiendo (19) y (20) por (22):

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} u_y}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}, \quad u'_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} u_z}{1 - \frac{u_x V}{c^2}} \quad (23)$$

**Ejercicio 4:** Reobtenga las transformaciones (23) derivando las transformaciones de Lorentz de las coordenadas a lo largo de la línea de universo de la partícula.

**Ejercicio 5:** Derive las transformaciones (23) para obtener las transformaciones de la aceleración.



## Dinámica relativista

Las nuevas nociones de espacio y tiempo, adecuadas para dar a las leyes de Maxwell el status de leyes fundamentales que verifican el Principio de relatividad, obligan a reformular la Dinámica clásica. En efecto las leyes de la Dinámica newtoniana se basan en la invariancia de distancias y tiempos. En la Segunda Ley de Newton  $-\mathbf{F} = m \mathbf{a}-$ , la fuerza es dictada por una ley para la interacción (como la ley de gravitación, la ley de Hooke, etc.); las interacciones fundamentales dependen de distancias, y como las distancias son invariantes también lo son las fuerzas. Por otro lado las aceleraciones son invariantes ante transformaciones de Galileo. De esta forma la Segunda Ley de Newton es consistente con el Principio de relatividad galileano (la masa es considerada una propiedad de la partícula independiente del sistema de referencia). En cambio, en Relatividad la interacción paradigmática es la interacción electromagnética, de manera que la fuerza paradigmática es la fuerza de Lorentz que depende de la velocidad de la carga. Por otro lado, lejos de ser invariante, la aceleración se transforma de manera muy complicada ante transformaciones de Lorentz. Esto significa que no parece un buen plan reformular la Dinámica comenzando por la Segunda Ley de Newton.

Cuando se combinan la Segunda Ley de Newton con el Principio de Acción y Reacción (Tercera Ley de Newton) se obtiene la conservación de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas aislado. La conservación resulta de la cancelación de a pares de todas las fuerzas internas (las únicas que existen en un sistema aislado) debido a que en cada instante son iguales y opuestas. Cualquier variación de la cantidad de movimiento de una parte del sistema es compensada instantáneamente por una variación igual y opuesta de otra parte del sistema. Esta compensación instantánea ocurre aún si ambas partes están separadas, porque en Física clásica se admite la existencia de interacciones instantáneas a distancia. La conservación de la cantidad de movimiento se verifica en todos los sistemas inerciales, como podemos comprobar si multiplicamos el teorema de adición de velocidades por la masa de la partícula y sumamos sobre todas las partículas del sistema:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{V}, \quad m \mathbf{u}' = m \mathbf{u} - m \mathbf{V}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} - m \mathbf{V}, \quad \Sigma \mathbf{p}'_i = \Sigma \mathbf{p}_i - \mathbf{V} \Sigma m_i. \quad (24)$$

El último término de la última ecuación es la masa total del sistema multiplicada por la velocidad relativa  $S'-S$ . En Física clásica se acepta la conservación de la masa de un sistema aislado. Entonces la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento en  $S$  conducen a la conservación de la cantidad de movimiento en  $S'$ .

¿Será la ley de conservación de la cantidad de movimiento un buen punto de partida para reformular la Dinámica? En primer lugar, la Relatividad no puede aceptar que una magnitud se conserve porque una variación de esa magnitud en un lugar se compense *instantáneamente* por otra variación igual y opuesta en otro lugar. La noción de simultaneidad no es absoluta; eventos separados espacialmente que son simultáneos en un sistema de referencia no lo son en otro sistema de referencia. Entonces la compensación instantánea a distancia conservaría una magnitud en un único sistema de referencia y violaría el Principio de relatividad. Las únicas compensaciones admisibles deben ser *locales*. El electromagnetismo –nuestra interacción paradigmática– nos enseña cómo deben ser las leyes de conservación en una teoría relativista. Por ejemplo, la conservación de la carga se expresa mediante la ecuación de continuidad, que es una ecuación diferencial que dice que las variaciones locales de carga se deben exclusivamente a un flujo de cargas hacia puntos vecinos. Del mismo modo la variación local de la cantidad de movimiento del campo electromagnético es balanceada por un flujo dado por el tensor de esfuerzos y una transferencia a las cargas presentes en ese lugar. Es decir que si en un sistema de cargas varía la cantidad de movimiento de alguna de ellas, esta variación se debe exclusivamente a un intercambio de cantidad de movimiento entre la carga y el campo en la posición de la carga. Como el campo transporta energía y cantidad de movimiento con una velocidad finita, más tarde podrá intercambiar cantidad de movimiento con cargas en otro lugar. En electromagnetismo no hay compensaciones instantáneas a distancia; sólo hay intercambios locales y conservaciones locales. En Relatividad la interacción instantánea a distancia es reemplazada por interacciones *mediadas* por campos que transportan energía y cantidad de movimiento con velocidad finita. Por lo tanto, cuando se estudia un sistema de partículas en interacción, no se conserva la cantidad de movimiento de las partículas por separado (como diría la Tercera Ley), sino que se conserva *localmente* la cantidad de movimiento de las partículas y *el campo mediador*.

Nuestro objetivo es averiguar cuál es la magnitud que tiene el papel de la cantidad de movimiento relativista de una partícula. Para evitar considerar campos mediadores, comenzaremos estudiando un sistema de partículas *libres*, que sólo interactúan *localmente* a través de choques. Así la única cantidad de movimiento en juego será la de las

partículas. Si repetimos el esquema de la ecuación (24) con las transformaciones relativistas de velocidad (19-20) obtenemos:

$$m\gamma(u')u'_x = \gamma(V) [m\gamma(u)u_x - m\gamma(u)V] , \quad m\gamma(u')u'_y = m\gamma(u)u_y , \quad m\gamma(u')u'_z = m\gamma(u)u_z .$$

Estas expresiones sugieren fuertemente que la magnitud que juega el papel de cantidad de movimiento de una partícula de acuerdo con las nociones relativistas de espacio y tiempo debería ser

$$\mathbf{p} \equiv m\gamma(u) \mathbf{u} = \frac{m \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} . \quad (25)$$

Naturalmente, el experimento estará encargado de confirmar si esta es la magnitud conservada o no. En 1908 Bucherer verificó experimentalmente que la deflexión de una partícula cargada de alta velocidad en un campo eléctrico uniforme no seguía la ley  $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ ; el apartamiento era convincentemente descrito por  $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$ , donde  $\mathbf{p}$  es la cantidad de movimiento relativista (25).

Según vemos en las ecuaciones anteriores,  $\mathbf{p}$  se transforma de la siguiente manera:

$$p'_x = \gamma(V) [p_x - m\gamma(u)V] , \quad p'_y = p_y , \quad p'_z = p_z . \quad (26)$$

Esta transformación trae una sorpresa que podría decirse el resultado más dramático de la Relatividad Especial. Para que se conserve  $\sum \mathbf{p}_i$  en  $S$  y en  $S'$  ya no es la masa total del sistema la que debe conservarse por separado (como ocurría en la ecuación (24)). Su lugar ha sido tomado por  $\sum m_i \gamma(u_i)$ . De modo que la conservación de la cantidad de movimiento relativista en todo sistema inercial, en acuerdo con el Principio de relatividad, exigiría ya no la conservación de la masa de un sistema aislado sino la conservación de una magnitud que combina las masas con las velocidades de las partículas individuales. Para entender qué tipo de magnitud es ésta, desarrollaremos  $\gamma(u)$ :

$$m\gamma(u) = m + \frac{1}{2} m \frac{u^2}{c^2} + O(u^4/c^4) .$$

Naturalmente, el primer término del desarrollo es la masa. Pero el segundo término es la energía cinética clásica dividida  $c^2$ . Definimos la *energía relativista* de una partícula como

$$E \equiv m\gamma(u) c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \equiv m c^2 + T , \quad (27)$$

donde  $m c^2$  es la *energía en reposo* y  $T$  es la *energía cinética relativista*. La energía relativista total de un sistema aislado debe conservarse; si así no fuera, la conservación de la cantidad de movimiento total no verificaría el Principio de relatividad. Igualmente, la conservación de la energía relativista de un sistema aislado cumple el Principio de relatividad gracias a la conservación de la cantidad de movimiento. En un sistema de partículas libres que sólo interactúan mediante choques, la energía relativista total es la suma de las energías de las partículas:  $\mathcal{E} = \sum E_i$ . Si las partículas interactúan "a distancia" la energía relativista total incluye la energía de los campos mediadores.

Combinando las definiciones de energía y cantidad de movimiento se obtiene:

$$\mathbf{p} = c^{-2} E \mathbf{u} . \quad (28)$$

Este es un típico resultado relativista: la cantidad de movimiento es un flujo de energía (lo mismo sucede con el campo electromagnético, donde el vector densidad de cantidad de movimiento es proporcional al vector de Poynting)

Multiplicando por  $m c^2$  en la ecuación (22) obtenemos la transformación de la energía. Podemos reunir este resultado con la ecuación (26) para escribir:

$$E' = \gamma(V) [E - V p_x], \quad p'_x = \gamma(V) [p_x - V c^{-2} E], \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z. \quad (29)$$

Las transformaciones (29) son enteramente similares a las transformaciones de Lorentz de las coordenadas. La razón es bien simple: ya hemos dicho que entre dos eventos pertenecientes a la línea de universo de una partícula se cumple que  $dt = \gamma(u) d\tau$ , entonces  $\mathbf{u} = d\mathbf{r} / dt = \gamma(u)^{-1} d\mathbf{r} / d\tau$ ,  $\mathbf{p} = m d\mathbf{r} / d\tau$ ,  $E = m c^2 dt / d\tau$ . Como  $d\tau$  es invariante, se comprende entonces que  $(c^{-1}E, \mathbf{p})$  se transforme igual que  $(ct, \mathbf{r})$ . Una misma transformación implica un mismo tipo de invariante. El invariante de la transformación de Lorentz de las coordenadas es el intervalo. Análogamente el *invariante energía-cantidad de movimiento* es  $c^{-2}E^2 - p^2$ , cuyo valor es

$$E^2 - p^2 c^2 = E^2 - E^2 u^2 c^{-2} = E^2 \gamma(u)^{-2} = m^2 c^4 \quad (30)$$

El invariante energía-cantidad de movimiento da la medida de la masa de la partícula. Si diferenciamos la ecuación (30) y reemplazamos la ecuación (28):

$$0 = 2E dE - 2c^2 \mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = 2E (dE - \mathbf{u} \cdot d\mathbf{p}) \Rightarrow dE = d\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (31)$$

La ecuación (31) debe verse como la relación entre trabajo y variación de la energía, e indica que la fuerza debe igualarse con  $d\mathbf{p} / dt$ :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (32)$$

(luego podremos verificar que la fuerza de Lorentz y  $d\mathbf{p} / dt$  se transforman de la misma manera). Está claro que  $d\mathbf{p} / dt$  no resulta proporcional a la aceleración  $\mathbf{a}$ , pues  $\mathbf{p}$  no es proporcional a  $\mathbf{u}$ . En Relatividad la fuerza y la aceleración no son colineales. Como la energía relativista de una partícula tiende a infinito cuando su velocidad tiende a  $c$ , habría que hacer un trabajo infinito para que la velocidad de una partícula se incremente hasta alcanzar la velocidad de la luz. Por lo tanto la velocidad de la luz es una velocidad límite para una partícula.

## Sistema centro de momento

Se llama sistema centro de momento al sistema de referencia donde se anula la cantidad de movimiento de un sistema aislado de partículas. Si la cantidad de movimiento es  $\mathbf{P}' = 0$  en un sistema  $S'$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{U}_c$  respecto de  $S$ , entonces el valor de  $\mathbf{P}$  en  $S$  es (úsense las transformaciones (29)):

$$\mathbf{P} = c^{-2} \mathcal{E}_c \gamma(U_c) \mathbf{U}_c = c^{-2} \mathcal{E} \mathbf{U}_c. \quad (33)$$

Comparando la relación (33) para un sistema de partículas con la expresión (25) para una partícula se concluye que la energía  $\mathcal{E}_c$  del sistema físico en el sistema centro de momento juega el papel de masa del sistema (multiplicada por  $c^2$ ). Esto significa que la energía interna de un sistema compuesto contribuye a su masa. Por ejemplo, la masa de un gas ideal contenido en un volumen en reposo no es tan sólo la suma de las masas de sus partículas sino que recibe una contribución de la energía cinética de las mismas.

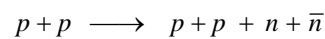
## Equivalencia masa-energía

La conservación de la energía relativista en reemplazo del principio clásico de conservación de la masa, abre la posibilidad de convertir masa en otros tipos de energía y viceversa, siendo este el resultado más dramático de la Relatividad Especial. Según Einstein (1905), “*la masa de un cuerpo es una medida de su contenido de energía*”. Esta equivalencia masa-energía se puede observar en distintos fenómenos físicos:

–*defecto de masa*: la masa de un sistema compuesto no es la suma de las masas de sus “constituyentes” pues la energía de ligadura contribuye a su masa. Por ejemplo un núcleo de  ${}^4\text{He}$  está formado por dos protones y dos neutrones, y su energía en reposo (masa) es 3727,379 MeV. Podemos pensar al  ${}^4\text{He}$  como constituido por dos deuterones (un protón y un neutrón cada uno). La energía en reposo (masa) de un deuterón es 1875,612 MeV. Como se ve, la masa de dos deuterones excede en 23,845 MeV a la masa del  ${}^4\text{He}$ . La masa del  ${}^4\text{He}$  es menor que la suma de las masas de sus constituyentes porque recibe una contribución negativa de la energía interna de ligadura que mantiene unidos a los deuterones.

–*fusión y fisión nuclear, desintegración espontánea*: son reacciones nucleares donde la masa de los productos es menor que la masa de los reactivos; como la energía relativista se conserva, esto significa que la diferencia de masa se ha convertido en otro tipo de energía. La disminución de masa que se produce tanto en la *fusión* –donde núcleos livianos se unen para formar un núcleo más grande–, como en la *fisión* –donde un núcleo pesado se divide en núcleos más chicos– puede verse como consecuencia de que la energía de ligadura (negativa) por nucleón es creciente para núcleos livianos (hasta unos 60 nucleones por núcleo) mientras que decrece para núcleos pesados.

–*energía umbral*: existen reacciones donde la masa de los productos es mayor que la masa de los reactivos. Por ejemplo, la creación de un par neutrón-antineutrón en la colisión entre dos protones:



Esta reacción ocurre sólo si los protones que chocan tienen energía cinética suficiente para dar cuenta de la masa que se crea. En el sistema centro de momento, donde se anula la cantidad de movimiento del sistema de partículas, la energía umbral de la reacción  $\mathcal{E}_{c \text{ umbral}}$  es la que permite crear las partículas dejando todos los productos en reposo. De acuerdo con la transformación de la energía, en otro sistema de referencia la energía umbral es  $\mathcal{E}_{\text{umbral}} = \gamma(U_c) \mathcal{E}_{c \text{ umbral}}$ .

## Fotones

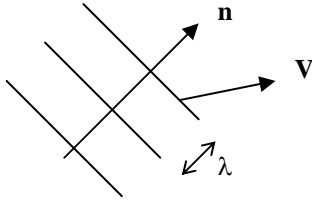
La Teoría Cuántica enseña que el campo electromagnético intercambia su energía y cantidad de movimiento con la materia como lo harían partículas de energía y cantidad de movimiento

$$E = h\nu, \quad \mathbf{p} = h\nu c^{-1} \mathbf{n} \quad (34)$$

donde  $\nu$  es la frecuencia y  $\mathbf{n}$  es la dirección de propagación de las ondas planas que configuran el campo ( $h$  es la constante de Planck). Como  $\mathbf{p} = E c^{-1} \mathbf{n}$ , resulta que las partículas tienen la velocidad de la luz (véase la ecuación (28)) y masa nula (véase la ecuación (30)).

## Transformación de un rayo de luz

En un sistema de referencia  $S$ , sea un rayo de luz con frecuencia  $\nu$  y dirección de propagación  $\mathbf{n}$ . Sea  $\Delta t$  el tiempo transcurrido en el sistema  $S$  entre los pasos de dos frentes sucesivos por la posición de un observador que se mueve con velocidad  $\mathbf{V}$ . De manera que el segundo frente cubre en el tiempo  $\Delta t$  la longitud de onda, que lo separa del primer frente, más el desplazamiento del observador normal a los frentes de onda. Entonces



$$c \Delta t = \lambda + \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\nu^{-1} c}{c - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}}$$

Transformando  $\Delta t$  en tiempo propio del observador, obtenemos el período en el sistema del observador:  $\Delta t = \gamma(V) T_{obs} = \gamma(V) \nu'^{-1}$ . Luego

$$\nu' = \frac{1 - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \nu. \quad (35)$$

En particular, hay efecto Doppler aún cuando  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Este efecto Doppler *transversal* es un efecto típicamente relativista proveniente de la dilatación del tiempo. Su verificación experimental es una comprobación directa de la dilatación del tiempo.

Para hallar la transformación de la dirección de propagación nos valdremos de la transformación inversa de (35),

$$\nu = \frac{1 + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \nu', \quad (36)$$

entonces multiplicando (35) y (36), y llamando  $\theta$  al ángulo entre la dirección de propagación y el vector  $\mathbf{V}$ :

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = \left(1 - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}}{c}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}'}{c}\right) \rightarrow -\frac{V}{c} = \cos \theta' - \cos \theta - \frac{V}{c} \cos \theta' \cos \theta$$

Por lo tanto la dirección de propagación en  $S'$  (*aberración de la luz*) es:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta} \quad (37)$$

**Ejercicio 6:** Reobtenga la ecuación (35) usando la transformación de la energía (29) aplicada a un fotón (véase (34)).

**Ejercicio 7:** Reobtenga la ecuación (37) reemplazando en las transformaciones (23) las componentes de la velocidad de una partícula que se mueve con velocidad  $c$ :  $u_x = c \cos \theta$ ,  $u_y = c \sin \theta$ ,  $u'_x = c \cos \theta'$ ,  $u'_y = c \sin \theta'$ .

## Transformaciones de E y B

Las transformaciones de Lorentz de las coordenadas es una condición necesaria para la invariancia de las leyes de Maxwell en cumplimiento del Principio de relatividad. Pero no sólo las coordenadas sino también los campos deben transformarse adecuadamente para ese fin. La linealidad de las leyes de Maxwell invita a probar con una transformación lineal de los campos. Además la transformación deberá ser homogénea, pues si el campo electromagnético es nulo en un sistema de referencia entonces es igualmente nulo en cualquier sistema de referencia. Los coeficientes de la transformación lineal sólo pueden depender de la velocidad  $\mathbf{V}$  relativa entre  $S$  y  $S'$ . No pueden depender de las coordenadas del evento donde se evalúan los campos porque el espacio-tiempo es homogéneo. Los vectores  $\mathbf{E}'$  y  $\mathbf{B}'$  serán entonces combinaciones de vectores lineales en los campos, contruidas con  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{V}$ . En esta construcción deben atenderse los caracteres de vector polar del campo eléctrico y de pseudo-vector o vector axial del campo magnético. Son vectores polares  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{E})$ ,  $\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E})$ , y son vectores axiales  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{V} \times \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})$ ,  $\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ . No hace falta considerar más vectores lineales en los campos: por ejemplo,  $\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}))$  es proporcional a  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ . Por otra parte  $\mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}) = V^2 \mathbf{E}_{\parallel}$ , mientras que  $\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E}) = \mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp}) = -V^2 \mathbf{E}_{\perp}$  (llamamos  $\mathbf{E}_{\parallel}$  y  $\mathbf{E}_{\perp}$  a las proyecciones de  $\mathbf{E}$  longitudinal y transversal a  $\mathbf{V}$ ). Esto significa que ambas proyecciones de los campos pueden entrar en la transformación con coeficientes diferentes:  $\mathbf{E}'$  es entonces alguna combinación lineal de  $\mathbf{E}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{E}_{\perp}$  y  $\mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}$  con coeficientes dependientes a lo sumo de  $V$ :

$$\mathbf{E}' = e_1(V) \mathbf{E}_{\parallel} + e_2(V) \mathbf{E}_{\perp} + e_3(V) \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}.$$

Análogamente:

$$\mathbf{B}' = b_1(V) \mathbf{B}_{\parallel} + b_2(V) \mathbf{B}_{\perp} + b_3(V) \mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp}.$$

En particular las proyecciones longitudinales de estas transformaciones son

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = e_1 \mathbf{E}_{\parallel} \qquad \mathbf{B}'_{\parallel} = b_1 \mathbf{B}_{\parallel},$$

y como las transformaciones inversas deben verse igual que las directas, se concluye que  $e_1 = 1 = b_1$ :

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \qquad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}. \qquad (38)$$

La proyección transversal de la transformación del campo eléctrico es

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \Gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \kappa \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}),$$

donde hemos redefinido los coeficientes  $e_2$  y  $e_3$ . Es claro que  $\kappa$  debe ser igual a  $c^{-1}$ . En efecto, una carga en reposo en  $S'$  está sometida a una fuerza proporcional a  $\mathbf{E}'$ , mientras que en  $S$  la fuerza es proporcional a  $\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{V} \times \mathbf{B}$  (pues la carga se mueve en el sistema  $S$  con velocidad  $\mathbf{V}$ ). La anulación de la fuerza en un sistema tiene que conducir a la anulación de la fuerza en cualquier otro sistema; pero esto sólo es posible si  $\kappa = c^{-1}$ .

Resta entonces averiguar el valor de  $\Gamma$ . Como siempre, apelamos a que las transformaciones inversa y directa deben tener la misma forma, salvo por el cambio de  $\mathbf{V}$  por  $-\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \Gamma (\mathbf{E}_{\perp} + c^{-1} \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}), \qquad \mathbf{E}_{\perp} = \Gamma (\mathbf{E}'_{\perp} - c^{-1} \mathbf{V} \times \mathbf{B}'_{\perp}),$$

de donde resulta además que

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \Gamma (\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1 - \Gamma^{-2}}{V^2 c^{-1}} \mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp}).$$

Para determinar el coeficiente  $\Gamma$  sustituiremos en estas transformaciones los campos correspondientes a una onda plana propagándose en la dirección de  $\mathbf{V}$ . Una onda plana es plana en cualquier sistema de referencia inercial (los

campos dependen linealmente de las coordenadas, y las transformaciones de Lorentz de las coordenadas son lineales). Además sabemos que si la onda se propaga en la dirección de  $\mathbf{V}$  entonces no sufre aberración (en la ecuación (37) es  $\theta=0 \Rightarrow \theta'=0$ ). Como las leyes de Maxwell deben ser válidas en cualquier sistema de referencia inercial, entonces la onda plana estará caracterizada tanto en  $S$  como en  $S'$  por

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{n}' \times \mathbf{E}'. \quad (39)$$

En nuestro caso es  $\mathbf{n} = \mathbf{V}/V = \mathbf{n}'$ , y reemplazando en las transformaciones

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \Gamma \left( \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \frac{(\mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp})}{Vc} \right) = \Gamma \left( 1 - \frac{V}{c} \right) \mathbf{E}_{\perp},$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = \Gamma \left( \mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{V} \times \frac{(\mathbf{V} \times \mathbf{E}'_{\perp})}{Vc} \right) = \Gamma \left( 1 + \frac{V}{c} \right) \mathbf{E}'_{\perp}.$$

Multiplicando escalarmente estas dos ecuaciones resulta  $\Gamma = \gamma(V)$ . En suma, las transformaciones de Lorentz de las componentes transversales de los campos son

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(V) (\mathbf{E}_{\perp} + c^{-1} \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}) \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(V) (\mathbf{B}_{\perp} - c^{-1} \mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp}). \quad (40)$$

Es importante enfatizar que podríamos haber obtenido el resultado  $\kappa = c^{-1}$  con un poco más de esfuerzo, sin hacer mención alguna a cargas. Por ejemplo, podríamos haber utilizado una onda plana propagándose en  $S$  con una dirección transversal a  $\mathbf{V}$ , y, valiéndonos de la aberración (37), llegar al mismo resultado. Las transformaciones de los campos sólo tienen que ver con las leyes de Maxwell en ausencia de cargas y el carácter vectorial o pseudo-vectorial de los mismos.

## Transformaciones de las densidades de carga y corriente

El método más directo para transformar las fuentes de campo es buscar una configuración sencilla de fuentes y obtener las transformaciones de las fuentes a partir de las transformaciones de los campos. En el plano  $x$ - $y$  consideremos una lámina de espesor  $d$  cargada uniformemente con densidad  $\rho$  y recorrida por una corriente uniforme  $\mathbf{j} = j_x \hat{\mathbf{x}} + j_y \hat{\mathbf{y}}$ . Según las leyes de Maxwell los campos resultan uniformes fuera de la lámina, y sus valores en el semiespacio  $z > 0$  son:

$$\mathbf{E} = 2\pi \rho d \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{B} = \frac{2\pi}{c} j_y d \hat{\mathbf{x}} - \frac{2\pi}{c} j_x d \hat{\mathbf{y}}.$$

En un sistema  $S'$  que se mueve a lo largo del eje  $x$  respecto de  $S$ , la distribución de carga y corriente es cualitativamente similar gracias al tipo de configuración de fuentes elegido, y las leyes de Maxwell son igualmente válidas, de modo que:

$$\mathbf{E}' = 2\pi \rho' d' \hat{\mathbf{z}}', \quad \mathbf{B}' = \frac{2\pi}{c} j'_y d' \hat{\mathbf{x}}' - \frac{2\pi}{c} j'_x d' \hat{\mathbf{y}}'.$$

Además  $d = d'$ , pues las longitudes transversales a la dirección del movimiento relativo no cambian. Entonces reemplazando estos valores de los campos en las transformaciones (38) y (40) se obtiene

$$\rho' = \gamma(V) \left( \rho - \frac{V}{c^2} j_x \right), \quad j'_x = \gamma(V) (j_x - V \rho), \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z. \quad (41)$$

**Ejercicio 8:** Demuestre que la carga eléctrica contenida en un elemento de volumen es invariante. Ayuda: comience evaluando la carga en el sistema donde ésta se encuentra en reposo, y luego tranforme a un sistema de referencia arbitrario.

**Ejercicio 9:** Utilice la transformación de los campos para demostrar que la fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{u} \times \mathbf{B})$  sobre una carga  $q$  (invariante) se transforma según:

$$\mathbf{F}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{F}_{\parallel} - \frac{V}{c^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{V}}{c^2}}, \quad \mathbf{F}'_{\perp} = \frac{\gamma(V)^{-1} \mathbf{F}_{\perp}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{V}}{c^2}}. \quad (42)$$

**Ejercicio 10:** Compruebe que  $d\mathbf{p}/dt$  obedece una transformación análoga a (42).

**Ejercicio 11:** Resuelva la cuestión sobre los cables paralelos planteada en la primera clase.

**Ejercicio 12:** Utilice la transformación de los campos para demostrar que los potenciales se transforman según:

$$\phi' = \gamma(V) (\phi - c^{-1} V A_x), \quad A'_x = \gamma(V) (A_x - c^{-1} V \phi), \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z. \quad (43)$$



## Cuadritensores

Del mismo modo que el lenguaje vectorial ordinario es el más adecuado para formular enunciados que son invariantes frente a rotaciones espaciales, existe un lenguaje matemático natural para enunciar relaciones matemáticas que son invariantes no sólo frente a rotaciones espaciales sino frente a transformaciones del grupo de Lorentz en general. Ese es el lenguaje cuadrivectorial desarrollado por Minkowski. Llamaremos cuadrivector *contravariante* a cualquier objeto  $A^j$  formado por una magnitud  $A^0$  invariante frente a rotaciones y un vector ordinario  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,

$$A^j = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \mathbf{A}) \quad (44)$$

que ante transformaciones de Lorentz se transforme como lo hace el cuadrivector  $x^j$  formado por las coordenadas de un evento:

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z . \quad (45)$$

Llamaremos  $\Lambda^{j'}_j$  a los coeficientes de la transformación de Lorentz que transforma desde  $S$  a  $S'$ . Por ejemplo, si la transformación es un *boost* (transformación de Lorentz sin rotación espacial de ejes cartesianos) a lo largo del eje  $x$  entonces la matriz  $\Lambda^{j'}_j$  es

$$\Lambda^{j'}_j = \begin{pmatrix} \gamma(\beta) & -\gamma(\beta)\beta & 0 & 0 \\ -\gamma(\beta)\beta & \gamma(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (46)$$

donde  $\beta = V/c$ . Usando la *convención de Einstein* (suma sobre pares subíndice-supraíndice iguales), la transformación de un cuadrivector contravariante se escribe

$$A^{j'} = \Lambda^{j'}_j A^j . \quad (47)$$

Ya conocemos varios cuadriectores contravariantes:

|                             |       |  |
|-----------------------------|-------|--|
| coordenadas de un evento    | $x^j$ | $(ct, \mathbf{r})$                         |
| energía-momento             | $p^j$ | $(c^{-1}E, \mathbf{p})$                    |
| cuadrivector de onda        | $k^j$ | $2\pi(\nu c^{-1}, \lambda^{-1}\mathbf{n})$ |
| densidad de carga-corriente | $j^j$ | $(\rho c, \mathbf{j})$                     |
| potencial electromagnético  | $A^j$ | $(\phi, \mathbf{A})$                       |

Podemos generar otros cuadriectores multiplicando un cuadrivector por un invariante. Por ejemplo, sean  $x^j = x^j(\tau)$  las ecuaciones paramétricas de la línea de universo de una partícula en función de su tiempo propio (el tiempo propio  $\tau$  a lo largo de una línea de universo resulta de tomar el intervalo entre dos eventos vecinos de esa línea de universo,  $ds^2 = c^2 dt^2 - |d\mathbf{r}|^2 = c^2 dt^2 - u^2 dt^2 = c^2 \gamma(u)^{-2} dt^2 = c^2 d\tau^2$ , e integrarlo a lo largo de esa línea de universo:  $\tau = \int c^{-1} ds$ ;  $\tau$  es un invariante). Podemos entonces definir una *cuadrivelocidad*:

$$U^j \equiv \frac{dx^j(\tau)}{d\tau} = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) = \gamma(u)(c, \mathbf{u}) . \quad (48)$$

Puede verse que

$$p^j = m U^j . \quad (49)$$

Valiéndonos nuevamente de la relación  $d\tau = \gamma(u)^{-1} dt$  construimos la derivada de  $p^j$  respecto de  $\tau$  (a lo largo de la línea de universo de la partícula):

$$\frac{dp^j}{d\tau} = \gamma(u) \left( c^{-1} \frac{dE}{dt}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) ;$$

entonces definimos la *cuadrifuerza* (véanse las ecuaciones (31) y (32))

$$K^j \equiv \gamma(u) \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{F} \right) . \quad (50)$$

Llamaremos cuadrivector *covariante* a todo objeto de componentes cartesianas  $C_j$  que se transforma con los coeficientes de la matriz *inversa* de  $\Lambda^{j'}_j$ . Nótese que usamos supraíndices para indicar el carácter contravariante de un cuadrivector, mientras que usamos subíndices para indicar el carácter covariante. La matriz inversa de  $\Lambda^{j'}_j$  es aquella matriz que compuesta con ésta da por resultado la matriz identidad. En el caso de una transformación de Lorentz la matriz inversa no es otra que la correspondiente a la transformación que retorna de  $S'$  a  $S$ ; entonces haremos bien en llamarla  $\Lambda^{j'}_j$ :

$$\Lambda^{j'}_j \Lambda^{j'}_{k'} = \delta_{k'}^{j'} , \quad \Lambda^j_{j'} \Lambda^{j'}_k = \delta_k^j \quad (51)$$

y la transformación que define a un cuadrivector covariante es entonces

$$C_{j'} = C_j \Lambda^{j'}_j . \quad (52)$$

Este comportamiento garantiza que una combinación (*contracción*) del tipo  $C_{j'} A^{j'}$  es invariante (independiente del sistema de referencia):

$$C_{j'} A^{j'} = C_j \Lambda^{j'}_j A^{j'} = C_j A^j . \quad (53)$$

Las derivadas parciales cartesianas componen un cuadrivector covariante. Llamamos *gradiente*  $\partial_j$ :

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (54)$$

En efecto

$$\partial_{j'} = \frac{\partial}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \partial_j \Lambda^{j'}_j .$$

La *cuadridivergencia* de  $A^j$ ,

$$\partial_j A^j = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} , \quad (55)$$

es entonces un invariante. A modo de ejemplo, nótese que la ecuación de continuidad -que expresa la conservación local de la carga eléctrica- no es más que la cuadridivergencia de  $j^i = (\rho c, \mathbf{j})$  igualada a cero:

$$\partial_i j^i = 0 ; \quad (56)$$

como  $\partial_i j^i$  es invariante ante transformaciones del grupo de Lorentz, entonces queda garantizado que la ecuación (56) se cumple en cualquier sistema de referencia. Este es un primer ejemplo para mostrar que el lenguaje cuadvivectorial es el lenguaje natural para escribir leyes físicas que mantengan su forma cuando se pasa de un sistema de referencia inercial a otro mediante transformaciones del grupo de Lorentz (boosts y rotaciones espaciales). Es decir que la *formulación covariante* de las leyes físicas automáticamente manifiesta el cumplimiento del Principio de relatividad ante transformaciones de Lorentz.

En general llamamos *cuadritensor* a todo objeto cuyas componentes cartesianas se identifican mediante  $r$  índices contravariantes y  $s$  índices covariantes, y que ante transformaciones del grupo de Lorentz cambian según

$$T^{i'j'\dots k'l'm'\dots} = \Lambda^{i'}_i \Lambda^{j'}_j \dots T^{ij\dots klm\dots} \Lambda^k_{k'} \Lambda^{l'}_l \Lambda^{m'}_m \dots \quad (57)$$

La multiplicación de cuadritensores resulta en cuadritensores con mayor cantidad de índices (*producto tensorial*):

$$T^{ijkl}_{mnp} = O B^{ij} C_m D^k_{np} E^l , \quad (58)$$

( $O$  es un invariante). En particular,  $\partial_m D^j_{np}$  es un cuadritensor. La contracción de índices (53) se generaliza a cualquier par de índices covariante-contravariante de un cuadritensor, y da por resultado otro tensor con menor cantidad de índices:

$$T^{ijkl}_{knp} = M^{ijl}_{np} . \quad (59)$$

**Ejercicio 13:** Demuestre que las cantidades definidas en las ecuaciones (58) y (59) se transforman como componentes de un cuadritensor.

Toda ley física que se escriba como un cuadritensor igualado a cero (o, lo que es igual, un cuadritensor igualado a otro cuadritensor) automáticamente atisface el Principio de relatividad ante transformaciones de Lorentz porque, como muestra la transformación (57), si un cuadritensor es cero en un sistema de referencia es cero en cualquier otro sistema de referencia.

## Producto escalar de cuadvectores. Tensor métrico

Como sabemos la componentes de un cuadvector contravariante  $A^i$  permiten construir el invariante

$$A \cdot A \equiv A^0{}^2 - A^1{}^2 - A^2{}^2 - A^3{}^2 = A^0{}^2 - |\mathbf{A}|^2 . \quad (60)$$

Casos particulares de este invariante son el intervalo asociado a  $\Delta x^i$ , y el invariante energía-cantidad de movimiento asociado a  $p^i$ . Otros invariantes de este tipo son  $k \cdot k = 0$  (para un rayo de luz) y  $U \cdot U = c^2$  (para cualquier partícula). El invariante (60) puede escribirse

$$A \cdot A = g_{ij} A^i A^j \quad (61)$$

con ayuda del cuadritensor simétrico

$$g_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

No cabe duda de que  $g_{ij}$  debe tener un comportamiento cuadrivectorial, pues si así no fuera entonces la combinación (61) no sería invariante. Por otra parte las componentes  $g_{ij}$  tienen la forma (62) en cualquier sistema de referencia cartesiano pues el invariante  $A \cdot A$  tiene la estructura (60) en cualquier sistema de referencia cartesiano. El invariante  $A \cdot A$  puede verse como un caso particular de *producto escalar* entre dos vectores contravariantes:

$$A \cdot B \equiv g_{ij} A^i B^j, \quad (63)$$

por lo que el cuadrivector  $g_{ij}$  recibe el nombre de *tensor métrico*. No obstante debe mencionarse que el producto escalar (63) no es positivo definido: la geometría del espacio-tiempo de Minkowski es *pseudo-euclidiana*. Los cuadrivectores se clasifican en *temporales* ( $A \cdot A > 0$ ), *espaciales* ( $A \cdot A < 0$ ) y *nulos* ( $A \cdot A = 0$ ).

**Ejercicio 14:** Se define la cuadiaceleración como  $\mathcal{A}^j \equiv dU^j/d\tau$ . Demuestre que la cuadiaceleración es espacial, y que  $U \cdot \mathcal{A} = 0$  (use que  $U \cdot U = c^2$ ).

Indicaremos con  $g^{ij}$  a las componentes del inverso del tensor métrico:

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \quad (64)$$

Es claro que las componentes  $g^{ij}$  coinciden con las  $g_{ij}$  (esto es propio de las geometrías euclidianas y pseudo-euclidianas). Con el tensor métrico y su inverso podemos establecer una correspondencia biunívoca entre vectores covariantes y contravariantes:

$$A_i = g_{ij} A^j \quad \Leftrightarrow \quad A^j = g^{jk} A_k \quad (65)$$

es decir  $A_0 = A^0$ ,  $A_\mu = -A^\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ), que permite escribir el producto escalar en forma indistinta con vectores covariante o contravariantes:

$$A \cdot B = g_{ij} A^i B^j = A_j B^j = g^{jk} A_j B_k = A^k B_k. \quad (66)$$

Se puede “subir” o “bajar” índices de tensores de cualquier tipo. Por ejemplo:

$$T^j{}_{klm} = g_{il} T^j{}_{k}{}^i{}_m, \quad T^j{}_{k}{}^i{}_m = g^{il} T^j{}_{klm}. \quad (67)$$

En particular la ecuación (64) dice que  $g^i{}_j = \delta^i{}_j$ .

## Formulación covariante del Electromagnetismo

Con las derivadas del cuadripotencial  $A^i = (\phi, \mathbf{A})$  podemos construir el cuadritensor antisimétrico

$$F_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad (68)$$

que llamamos *tensor de campo*. Recordando que  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - c^{-1} \partial\mathbf{A}/\partial t$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , resulta

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (69)$$

Se define también el *dual* del tensor de campo <sup>1</sup>

$${}^*F_{ij} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijkl} F^{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (70)$$

Con los tensores  $F_{ij}$  y  ${}^*F_{ij}$  se construyen los siguientes invariantes <sup>2</sup>

$${}^*F_{ij} F^{ij} = 4 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (71)$$

$$-F_{ij} F^{ij} = {}^*F_{ij} {}^*F^{ij} = 2 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2). \quad (72)$$

Las leyes del electromagnetismo pueden escribirse en forma manifiestamente covariante a partir de ambos tensores de campo. Las ecuaciones sin fuentes están contenidas en

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \quad \Rightarrow \quad \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \quad \text{ó} \quad \partial_j {}^*F^{ij} = 0. \quad (73) \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

(en ambos casos hay cuatro ecuaciones independientes; la primera de las ecuaciones cuadritensoriales consiste en la anulación de un tensor completamente antisimétrico de tres índices, que tiene tan sólo cuatro componentes independientes). Estas ecuaciones se reducen a meras identidades si se reemplazan los campos en función de los potenciales.

Las cuatro ecuaciones con fuentes se expresan como

<sup>1</sup> El dual de un tensor completamente antisimétrico de  $r$  índices se define como el (pseudotensor) completamente antisimétrico de  $(n-r)$  índices que resulta de su contracción con el símbolo de Levi-Civita multiplicado por  $(1/r!)$ .

<sup>2</sup>  ${}^*F_{ij} F^{ij}$  es un pseudo-escalar.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho$$

$$\Rightarrow \quad \partial_i {}^* F_{jk} + \partial_j {}^* F_{ki} + \partial_k {}^* F_{ij} = 4\pi c^{-1} {}^* j_{ijk} \quad \text{ó} \quad \partial_j F^{ij} = -4\pi c^{-1} j^i. \quad (74)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

La ecuación de continuidad resulta de la ecuación anterior notando que  $\partial_i \partial_j F^{ij} \equiv 0$  (pues se trata de la contracción de un operador tensorial simétrico con un tensor antisimétrico).

Reemplazando (68) en la ecuación (74) se obtiene una ecuación para el cuadripotencial:

$$-4\pi c^{-1} j_i = g^{kj} \partial_j F_{ik} = g^{kj} \partial_j (\partial_i A_k - \partial_k A_i) = \partial_i \partial_j A^j - \square A_i, \quad (75)$$

donde  $\square$  es el operador d'Alembertiano

$$\square \equiv g^{ij} \partial_i \partial_j = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (76)$$

Como sabemos los potenciales no están completamente determinados por los campos. La invariancia del tensor de campo ante una *transformación de gauge*,

$$A_i \rightarrow A_i + \partial_i \xi \quad F_{ij} \rightarrow F_{ij}, \quad (77)$$

puede aprovecharse para elegir  $\xi$  de manera que se anule la cuatridivergencia de  $A_i$  (*gauge de Lorentz*),

$$\partial_i A^i = 0, \quad (78)$$

simplificando así la ecuación (75):

$$\square A^i = 4\pi c^{-1} j^i. \quad (79)$$

En el caso de una onda plana, el gauge de Lorentz equivale a la condición  $k_j A^j = k^0 A^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$ , y establece una relación entre las componentes temporal y longitudinal del cuadripotencial. Esta relación basta para que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  resulten dependientes tan sólo de las componentes transversales de  $\mathbf{A}$ , que son los genuinos grados de libertad del campo (correspondientes a los dos estados de polarización independientes). No obstante el gauge de Lorentz no fija completamente la función  $\xi$ , la cual puede aún elegirse para anular las componentes temporal y longitudinal de  $A^j$ .

La cuadrifuerza (50) asociada a la fuerza de Lorentz sobre una carga  $q$ ,  $\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ , es

$$K^i = q c^{-1} F^i_j U^j. \quad (80)$$

La fuerza por unidad de volumen sobre una distribución de carga y corriente,

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (81)$$

está asociada al cuadrivector

$$f^i = c^{-1} F^i_k j^k = (c^{-1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, \mathbf{f}). \quad (82)$$

El tensor de esfuerzos de Maxwell  $\mathbf{T}$ , el vector de Poynting  $\mathbf{S}$ , la densidad de cantidad de movimiento  $\mathbf{g}$  y la densidad de energía electromagnética  $u_{em}$  no son más que distintos sectores de un cuadrivolumen simétrico llamado tensor de energía-momento del campo electromagnético  $T^{ik}_{campo}$  :

$$T^{ik}_{campo} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^i_j F^{kj} + \frac{1}{4} g^{ik} F^{jl} F_{jl} \right) \quad (83)$$

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} u_{em} & c^{-1} \mathbf{S} \\ c \mathbf{g} & -\mathbb{T} \end{pmatrix}$$

La traza  $T^i_i$  del tensor de energía-momento del campo electromagnético es nula. Las leyes de conservación de la energía y la cantidad de movimiento de un sistema aislado de cargas y campo se expresan así:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} &= 0 \\ \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbb{T} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad f^i + \partial_k T^{ik}_{campo} = 0 . \quad (84)$$

**Ejercicio 15:** Muestre que el cuadrivolumen  $d^4x$  es invariante ante transformaciones del grupo de Lorentz (calcule el Jacobiano de la transformación de coordenadas).

**Ejercicio 16:** Muestre que las ecuaciones de movimiento de una carga en un campo electromagnético resultan de variar la acción invariante

$$S[x^i(t)] = -mc \int ds - \frac{q}{c} \int A_i dx^i . \quad (85)$$

**Ejercicio 17:** Muestre que las leyes de Maxwell del campo electromagnético resultan de variar la acción invariante

$$S[A_i(x^j)] = -\frac{1}{16\pi c} \int g^{kl} g^{rs} F_{kr} F_{ls} d^4x - \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d^4x . \quad (86)$$

## Bibliografía

- R. Ferraro, *El espacio-tiempo de Einstein*, Buenos Aires: Ediciones Cooperativas, 2005.  
 L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Teoría Clásica de Campos (Curso de Física Teórica, Vol. 2)*, Barcelona: Reverté, 2002.  
 C. Møller, *The Theory of Relativity*, Oxford: Clarendon Press, 1972.  
 W. Rindler, *Relativity. Special, General and Cosmological*, N.Y.: Oxford University Press, 2001.  
 E.F. Taylor y J.A. Wheeler, *Space-Time Physics*, San Francisco: Freeman, 1992.