

Modelos Cosmológicos

$$c = \hbar = 1$$

Relatividad General + Hipótesis de isotropía espacial y homogeneidad

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$T^{\mu}_{\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$$

Ecuaciones de Friedman: ($\Lambda = 0$)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 \frac{d\Omega}{r^2} \right)$$

$$d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

Geometría espacial:

- $k=0 \rightarrow$ plana
- $k=1 \rightarrow$ Cerrada - Esferas 3D
- $k=-1 \rightarrow$ Abierta - Hiperbólicas 3D

$$1) \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 \equiv H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}$$

$$2) \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p)$$

(Podemos absorber Λ absorbiendo $T_{\Lambda} = -p_{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$)

2) es equivalente a:

$$3) \dot{\rho} = -3H(\rho + p) \leftarrow \text{Conservación de energía } (\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0) \Rightarrow E = \rho V = \rho V_0 a^3 \rightarrow dE = -P dV$$

Corrimiento al rojo (z):

$$\frac{z}{z_{\text{obs}}} = \frac{a(t_0)}{a(t)} = 1+z \quad (\text{conversión: } a(t_0) = 1)$$

$\rightarrow a(t)$ crece hacia el futuro "el Univ. se expande".

Diagrama de Hubble $\rightarrow H_0 = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0} = h \left(100 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \right) \quad (M_{\text{pc}} \cong 3.26 \text{ años-luz})$

$$h \sim 0.7$$

¿De qué está hecho el Universo?

Para cerrar las ecuaciones necesitamos dar la ecuación de estado.

$$\text{Ej. } p = w\rho \quad (w = \text{cte}) \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a} \rightarrow \rho(t) = \rho(t_0) \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^{3(1+w)}$$

$w = ?$ Analizamos fís. cosas...

Nota: El universo se vuelve más denso en el pasado ∇

(para ecuaciones de estado razonables, $1+w > 0$)

Supongamos $R=0$

- Universo dominado por Λ ($w_\Lambda = -1$) $\Rightarrow \rho_\Lambda = \text{cte}$ ✓

Ec. de Friedmann 1) $\rightarrow H = \text{cte} \Rightarrow \boxed{a = e^{Ht}} \quad (H = \frac{\dot{a}}{a})$

- Universo dominado por materia no relativista.

Supongamos que el número de partículas se conserva:

 $n = \frac{N}{V} \sim \frac{1}{a^3} \rightarrow \rho = m n \sim \frac{1}{a^3} = \frac{\rho(t_0)}{a^3} \rightarrow w = 0 \quad P \approx 0$
(presión despreciable)

1) $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho(t)}{a^3} \equiv \frac{H_0^2}{a^3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right)^2 a^3 = H_0^2 \Leftrightarrow \int_1^a da' a'^2 = \int_{t_0}^t H_0 dt$
 $\Leftrightarrow \frac{2}{3}(a^{3/2} - 1) = H_0(t - t_0) \Leftrightarrow a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0(t - t_0) + 1\right)^{2/3}$

Si tomamos $t = 0$ en $a = 0$ (en el Big-Bang) $\Rightarrow \frac{3}{2} H_0 t_0 = 1 \Rightarrow t_0 = \frac{2}{3} H_0$

$\Rightarrow \boxed{a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}}$

Noticia de la edad del Universo

- Universo dominado por radiación (partículas ultrarelativistas)

$P = \frac{1}{3} \rho \quad (w = \frac{1}{3}) \rightarrow \rho(t) = \frac{\rho(t_0)}{a^4} \rightarrow \text{en 1) } H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho(t)}{a^4} = \frac{H_0^2}{a^4}$

$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right)^2 a^4 = H_0^2 \rightarrow \int_1^a da' a'^3 = \int_{t_0}^t H_0 dt \quad a^4 - 1 = 4 H_0(t - t_0)$

$a = \sqrt{4 H_0(t - t_0) + 1} \quad \text{Con } t = 0 \text{ en } a = 0, t_0 = \frac{1}{4 H_0} \Rightarrow \boxed{a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}}$

El modelo Λ CDM

- 3 componentes (Λ + materia NR + radiación) y $R=0$

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \sum_{\mathcal{I}=\Lambda, m, r} \rho_{\mathcal{I}} = \frac{8\pi G}{3} [\rho_{\Lambda} + \rho_m(t) + \rho_r(t)] \quad (*)$$

- Se conservan separadamente:

$$dE_{\mathcal{I}} = -P_{\mathcal{I}} dV \Leftrightarrow d(\alpha^3 \rho_{\mathcal{I}}) = -P_{\mathcal{I}} d\alpha^3$$

$$P_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} \quad \rho_m(t) = \frac{\rho_m(t_0)}{\alpha^3} \quad \rho_r(t) = \frac{\rho_r(t_0)}{\alpha^4}$$

Se define: $\rho_{crit}(t) \equiv \frac{3 H^2(t)}{8\pi G}$ y las fracciones de energía $\Omega_{\mathcal{I}}(t) = \frac{\rho_{\mathcal{I}}(t)}{\rho_{crit}(t)}$
($\mathcal{I} = \Lambda, m, r$)

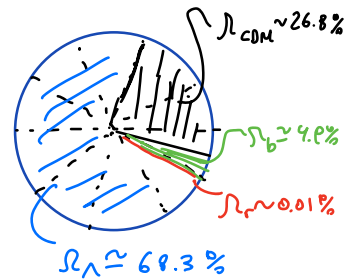
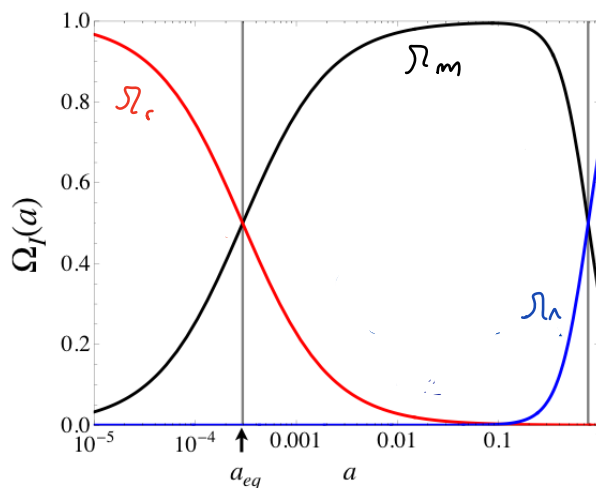
$\Rightarrow (*)$ puede escribirse como: $1 = \Omega_{\Lambda} + \Omega_m(t) + \Omega_r(t)$

H_0 y $t=t_0$

$$\bullet \rho_{crit}(t_0) \equiv \frac{3 H_0^2}{8\pi G} = 1.88 \underbrace{h^2 \times 10^{-26} \frac{g}{cm^3}}_{\left(h = \frac{H_0}{100 \text{ (km/s)/Mpc}}\right)}$$

$$\bullet \Omega_{\Lambda,0} \approx 0.7 \quad \Omega_{m,0} \approx 0.3 \quad \Omega_{r,0} \approx 10^{-4} \quad (\text{en } t=t_0)$$

Evolución cualitativa:



$$z_{ef}: \Omega_r(t_0) = \Omega_m(t_{ef}) \Leftrightarrow \frac{\Omega_{r,0}}{\alpha_{ef}^4} \approx \frac{\Omega_{m,0}}{\alpha_{ef}^3} \Leftrightarrow \alpha_{ef} \approx \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}}$$

Historia térmica

En el universo temprano la densidad de partículas aumenta $\Rightarrow$ más probabilidad que interactúen $\Rightarrow$ pueden estar en equilibrio térmico.

Estimaciones - análisis dimensional

Supongamos un proceso $1+2 \leftrightarrow 3+4$

Tasas de interacción: $\Gamma_1 = n_2 \sigma v$, $\Gamma_2 = n_1 \sigma v$

n = densidad número de partículas

σ = sección eficaz de la interacción

v = velocidad media de las partículas

Supongamos $n_1 = n_2 \equiv n$ y a todas las partículas ultrarelativistas $\Rightarrow v \approx c$
($m \ll T$)

Recordar:

- * Todas las partículas del modelo estándar son ultrarelativistas a $T \gtrsim 100 \text{ GeV}$
- * A $T \sim 100 \text{ GeV}$ las partículas adquieren masa mediante el mecanismo de Higgs.

Equilibrio térmico si: $\Gamma \gg H$

Por análisis dimensional $n \sim T^3$ y $\sigma \sim \left| \frac{g_A g_A}{s} \right|^2 \sim \frac{\alpha^2}{T^2}$

$\Rightarrow \Gamma \sim n \sigma v \sim \alpha^2 T$

$H^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} \sim \frac{T^4}{M_P^2}$

$M_P^2 = \frac{1}{8\pi G}$

$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{\alpha^2 M_P}{T}$

$Ej.$ Si $\alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\Gamma}{H} \sim 10^{16} \frac{\text{GeV}}{T}$

$\Rightarrow$ si $100 \text{ GeV} \lesssim T \lesssim 10^{16} \text{ GeV} \Rightarrow$ Equilibrio Térmico

$\alpha \equiv \frac{g_A^2}{4\pi} = \text{cte de acoplamiento fin de la int. correspondiente.}$

$M_P = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$

En el modelo del "Big Bang caliente", en el "Universo temprano" las especies se describen como partículas ultrarelativistas en equilibrio térmico a temperaturas muy altas, dando un universo dominado por radiación: $H \sim \frac{T^2}{M_p}$, $a \sim t^{1/2} \Rightarrow H = \frac{1}{2t}$
 $\Rightarrow t \sim \left(\frac{M_{\text{eV}}}{T}\right) \text{ seg}$. (En cosmología se suele usar $z = \frac{1}{a} - 1$ como variable temporal en lugar de t , que está más relacionada con las observaciones)

Especies ultrarelativistas en equilibrio (radiación en equilibrio)

$\Rightarrow$ Espectro de cuerpo negro (repaso)

- Densidad de energía radiada entre $\{\omega \text{ y } \omega+d\omega\}$: $\mu_\omega = \frac{8\pi\hbar \omega^3/c^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$

- Densidad número en $\{\omega \text{ y } \omega+d\omega\}$: $n_\omega = \frac{\mu_\omega}{\hbar\omega} = \frac{8\pi\hbar \omega^2/c^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$

- Intensidad espectral de un cuerpo negro en $\{\omega, \omega+d\omega\}$

$$I_\omega = \frac{c\mu_\omega}{4} \Rightarrow \int_0^{+\infty} I_\omega d\omega = \sigma_B T^4$$

$$\sigma_B = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 \hbar c^3} = \text{constante de Stefan - Boltzmann}$$

- Densidad número total $n = \int_0^{+\infty} n_\omega d\omega = 2 \frac{5(\pi)}{\pi^2} T^3$ ($\hbar=c=1$) $\downarrow$

- Densidad de energía $\rho = \int_0^{+\infty} \hbar\omega n_\omega d\omega = \frac{\pi^2}{15} T^4$

- Presión de radiación: $P = \frac{1}{3}\rho$

En FLRW $\rho \sim \frac{1}{a^4} \Rightarrow$ En equilibrio térmico $T \sim \frac{1}{a}$

$\Rightarrow$ Se enfría a medida que a crece.

$\Rightarrow$ Si estaban en equilibrio térmico debieron estar más calientes. ∇

La radiación cósmica de fondo: (CMB)

* Existen predicciones teóricas de una radiación con $T \sim 5$ o 10^4 K

(Para un resumen histórico ver charla de James Peebles "Golden Weibners" "El universo en expansión: descubrimiento y evidencias")

* En 1965 Penzias y Wilson estaban estudiando la radiación colectada por una antena de radio y encontraron un exceso de 3.5 ± 1 K para $\lambda \sim 7.5$ cm (Premio Nobel 1978!)

- Se midió una frecuencia en la región de Rayleigh-Jeans:

$$h \gg h_p(\omega) \simeq 8\pi^2 k_B T^4$$

- Para determinar si el espectro es de cuerpo negro es necesario medir a otras frecuencias

• La atmósfera se vuelve opaca a $\lambda \lesssim 0.3$ cm

* En 1989 se lanzó el satélite COBE con un espectrofotómetro (1/2 m de FWHM) dedicado a la medición del CMB.

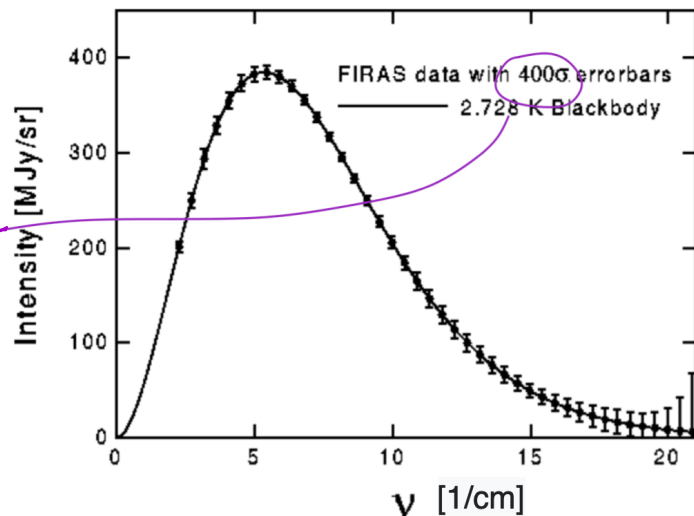
- Resultado:

Cuerpo negro

casi perfecto!

a $T \sim 2.728$ K

Error aumentado
en un factor 400
para que sea visible!



$$\Rightarrow \rho_{\gamma,0} = \frac{4\sigma}{c} T_0^4 = 4.64 \times 10^{-34} \frac{\text{J}}{\text{cm}^3} \Rightarrow n_\gamma \simeq 411 \text{ cm}^{-3}$$