

ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

2DO CUATRIMESTRE 2025

CLASE 3

RODOLFO SASSOT

CLASE 3: Simetrías en partículas: Isospin

Temas: Simetría de Isospin, Grupos de simetría, SU(2), SU(3)

isospin nuclear:

$${}^6_2\text{He} \quad (2,4) \quad \sim \quad {}^4_2\text{He} + 2n \quad (p^{3/2}) \quad |3/2 - 3/2| < J < |3/2 + 3/2|$$

$$J = \cancel{3}, 2, \cancel{1}, 0$$

$${}^6_3\text{Li} \quad (3,3) \quad \sim \quad {}^4_2\text{He} + n + p \quad (p^{3/2})$$

"dos fermiones idénticos con un mismo j ($3/2$)
se acoplan a J par"

fenómenos donde protón y el neutrón se comportan como dos estados de una misma partícula

$$|p\rangle, |n\rangle \quad |p\rangle \pm |n\rangle$$

isospín: Heisenberg 1932

$$|p\rangle \equiv |1/2, 1/2\rangle$$

$$|pp\rangle \equiv |1, 1\rangle$$

$$|n\rangle \equiv |1/2, -1/2\rangle$$

$$|nn\rangle \equiv |1, -1\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |pn + np\rangle \equiv |1, 0\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |pn - np\rangle \equiv |0, 0\rangle$$



CLASE 3: Simetrías en partículas

isospín: análisis fenomenológico de las interacciones nucleares + $m_n \simeq m_p$

→ otros multipletes candidatos

p	n	938.27	939.56	MeV	$I=1/2$	
π^+	π^0	π^-	139.57	134.97	MeV	$I=1?$
K^+	K^0	493	497	MeV	$I=1/2?$	
Δ^{++}	Δ^+	Δ^0	Δ^-	1230 – 1234	MeV	$I=3/2?$
Σ^+	Σ^0	Σ^-	1189	1187	MeV	$I=1?$

→ interacciones fuertes “conservan” I, I_3

simetría? ~ poder definir una operación que deja invariante algo

CLASE 3: Simetrías en partículas

simetrías:

U operación de simetría (p. ej. rotación)

$$|\Psi\rangle \longrightarrow |\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle$$

si pido que $\langle \Phi | \Psi \rangle$ no cambie cuando transformo todo el universo:

$$|\langle \Phi | \Psi \rangle|^2 = |\langle \Phi' | \Psi' \rangle|^2 = |\langle \Phi | U^\dagger U | \Psi \rangle|^2 \rightarrow U^\dagger U = \mathbb{1} \quad U \text{ unitario}$$

$$\langle \Phi' | H | \Psi' \rangle = \langle \Phi | U^\dagger H U | \Psi \rangle = \langle \Phi | H | \Psi \rangle \rightarrow H = U^\dagger H U \rightarrow [U, H] = 0$$

ejemplo: rotación de un estado de spin 1/2

$$U = e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} \quad \vec{J} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \quad \text{"generadores"} \quad \vec{\sigma} \text{ matrices de Pauli}$$

$$[U, H] = 0 \rightarrow [H, J^2] = [H, J_i] = 0$$

$$\rightarrow \text{isospin: } [H, I^2] = [H, I_i] = 0 \quad \text{"simetría aproximada"} \quad H = H_{strong} + H_{em}$$



CLASE 3: Simetrías en partículas

simetrías:

$$U_T = e^{-iHt} \text{ evolución temporal}$$

$$\text{si } [H, I^2] = [H, I_3] = 0 \quad \rightarrow \quad \langle \alpha', I', I'_3 | U_T | \alpha, I, I_3 \rangle = \delta_{I, I'} \delta_{I_3, I'_3} \quad \text{"no depende de } I_3 \text{"}$$

$$\mathbb{1} = U_R^\dagger U_R$$

$$\langle \alpha', I, I_3 | U_T | \alpha, I, I_3 \rangle = \langle \alpha', I, I_3 | U_T U_R^\dagger U_R | \alpha, I, I_3 \rangle = \langle \alpha', I, I'_3 | U_T | \alpha, I, I'_3 \rangle$$

$$[U_T, U_R^\dagger] = 0$$

Wigner-Eckart en chancletas

→ las amplitudes de probabilidad son iguales para las partículas de un mismo multiplete

(en la medida que la rotación dentro del multiplete sea simetría)

(en la medida que la asignación de la partícula sea correcta)



CLASE 3: Simetrías en partículas

simetrías:

ejemplo: producción de deuterio

$$\begin{array}{lcl} d & {}^2_1H & (1,1) \\ |pp\rangle \equiv |1,1\rangle & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}}|pn + np\rangle \equiv |1,0\rangle & & \frac{1}{\sqrt{2}}|pn - np\rangle \equiv |0,0\rangle \quad \checkmark \\ |nn\rangle \equiv |1,-1\rangle & & \end{array}$$

$$p + p \rightarrow d + \pi^+$$

$$\langle \gamma', 1, 1 | U_T | \gamma, 1, 1 \rangle = A_1$$

$$n + n \rightarrow d + \pi^-$$

$$\langle \gamma', 1, -1 | U_T | \gamma, 1, -1 \rangle = A_2$$

$$p + n \rightarrow d + \pi^0$$

$$\langle \gamma', 1, 0 | U_T \frac{1}{\sqrt{2}} [| \gamma, 1, 0 \rangle + | \gamma, \cancel{2}, 0 \rangle] = A_3$$

$$\langle \gamma', 1, 0 | U_T | \gamma, 1, 0 \rangle = \sqrt{2} A_3$$

$$A_1 = A_2 = \sqrt{2} A_3$$

$$P_3 = \frac{1}{2} P_1$$

CLASE 3: Simetrías en partículas

grupos de simetrías:

teorema de Noether: simetría $\rightarrow$ cantidad conservada

traslaciones espaciales $\rightarrow \vec{P}$

rotaciones espaciales $\rightarrow \vec{L}$

traslaciones temporales $\rightarrow H$

transformaciones de fase $\rightarrow e$

isospin $\rightarrow I$

"grupo" clausura: existe una ley de composición

identidad

existe inversa

asociatividad

abeliano/no abeliano

discreto/continuo



CLASE 3: Simetrías en partículas

grupos de simetrías:

muchos se pueden representar como matrices:

$U(n)$ unitarias de $n \times n$ p.ej. $U(1)$ transformaciones de fase compleja

$SU(n)$ idem+det=1 p.ej. $SU(2)$ isospin/interacciones débiles, $SU(3)$ fuertes

$O(n)$ matrices ortogonales

$SO(n)$ idem+det=1 p.ej. $SO(3)$ rotaciones en 3D

un mismo grupo puede tener varias "representaciones"

~ bases de estados donde actúan las transformaciones (para los físicos)

ejemplo1: para $SU(2)$ la de menor dimensión (fundamental) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2

donde definimos los generadores $\vec{J} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$ con $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

y los elementos del grupo (transformaciones) $U(\vec{\theta}) = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}$ $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k$

CLASE 3: Simetrías en partículas

grupos de simetrías:

ejemplo 2: SU(2) tiene otra representación de dimensión 3 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3

con 3 generadores $\vec{J}$ ahora de 3x3, y las mismas relaciones de conmutación $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$

y los elementos del grupo (transformaciones) $U(\vec{\theta}) = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}$

las representaciones de mayor dimensión se pueden pensar como composición de la fundamental

ejemplo 3: combinando dos espines 1/2 (2) genero un triplete de estados de espín 1 (3) y un single (1)

$$2 \otimes 2 = 3_S + 1_A$$

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 4_S + 2_{MS} + 2_{MA}$$

dilema: p, n pertenece a 2, o a $2_{MS}, 2_{MA}$?

$$p \quad n \quad 938.27 \quad 939.56 \text{ MeV} \quad I=1/2$$

$$\pi^+ \quad \pi^0 \quad \pi^- \quad 139.57 \quad 134.97 \text{ MeV} \quad I=1?$$

$$K^+ \quad K^0 \quad 493 \quad 497 \text{ MeV} \quad I=1/2?$$

$$\Delta^{++} \quad \Delta^+ \quad \Delta^0 \quad \Delta^- \quad 1230 - 1234 \text{ MeV} \quad I=3/2?$$

$$\Sigma^+ \quad \Sigma^0 \quad \Sigma^- \quad 1189 \quad 1187 \text{ MeV} \quad I=1?$$

CLASE 3: Simetrías en partículas

grupos de simetrías:

grupo de interés $SU(3)$: matrices unitarias de 3x3 y $\det=1$

representación fundamental: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (idéntica a la 3 de $SU(2)$)

pero los generadores son distintos (y más) $U(\alpha_a) = e^{-i\alpha_a J_a} \quad a = 1, \dots, 8$

$J_a = \frac{1}{2} \lambda_a$ (λ_a matrices de Gell-Mann)

en general $SU(N)$ necesita $N^2 - 1$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[J_a, J_b] = if_{abc} J_c$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f_{123} = 1 \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{378} = \frac{1}{2}$$