

ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

2DO CUATRIMESTRE 2025

CLASE 7

RODOLFO SASSOT

CLASE 7: Fenomenología de Dirac

Temas: Paradoja de Klein, Zitterbewegung

recapitulación:



$$\begin{cases} E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \end{cases} \quad H = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 \quad E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$
$$\alpha_i^2 = 1 \quad \beta^2 = 1 \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$E > 0$

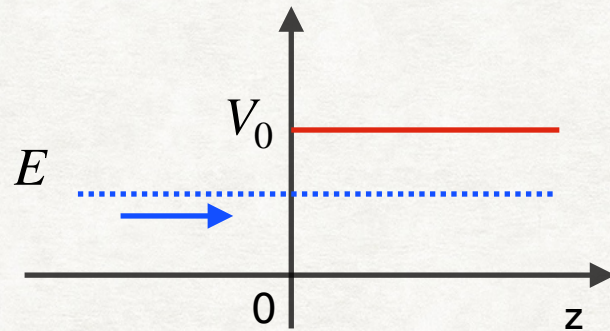
$$\psi^{(1)}(\vec{x}, t) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + mc^2}\right) 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} \quad \psi^{(2)}(\vec{x}, t) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \left(\frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + mc^2}\right) 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu}$$

$E < 0$

$$\psi^{(3)}(\vec{x}, t) = N \begin{pmatrix} \left(\frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E - mc^2}\right) 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} \quad \psi^{(4)}(\vec{x}, t) = N \begin{pmatrix} \left(\frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E - mc^2}\right) 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu}$$

CLASE 7: Fenomenología de Dirac

paradoja de Klein: *cuando las componentes débiles no son tan débiles...*



$$\psi_{inc} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikz} \quad \vec{k} = k\hat{z} \quad S_z = 1/2 \quad \hbar = c = 1$$

$$\psi_{refl} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikz} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \end{pmatrix} e^{ikz}$$

$$\psi_{trans} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q}{E-V_0+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iqz} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-q}{E-V_0+m} \end{pmatrix} e^{-iqz}$$

$$E = \sqrt{c^2 q^2 + m^2 c^4} + V_0$$

$$E - V_0 = \sqrt{c^2 q^2 + m^2 c^4}$$

$$cq = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2 c^4}$$

$$q = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2}$$

continuidad de ψ en $z=0$ $\psi_{inc}(z=0) + \psi_{refl}(z=0) = \psi_{trans}(z=0)$

$$1 + a = c$$

$$b = d$$

$$k(1 - a)/(E + m) = cq/(E - V_0 + m)$$

$$bk/(E + m) = -dq/(E - V_0 + m)$$

$$\rightarrow (1 - a) = cr$$

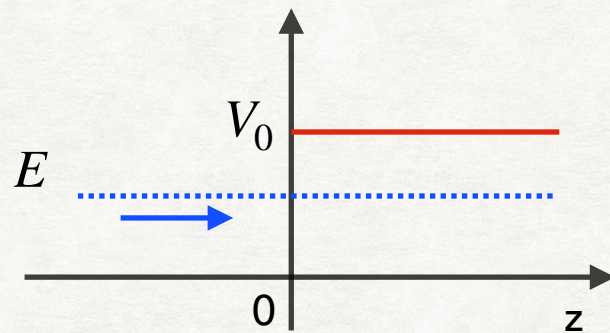
$$\Rightarrow b = d = 0$$

$$r \equiv \frac{q}{k} \frac{E + m}{E - V_0 + m}$$



CLASE 7: Fenomenología de Dirac

paradoja de Klein: cuando las componentes débiles no son tan débiles...



$$1 + a = c$$

$$r \equiv \frac{q}{k} \frac{E + m}{E - V_0 + m}$$

$$(1 - a) = cr$$

$$q = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2}$$



corrientes: $J^\mu \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ $J^3 \equiv \bar{\psi} \gamma^3 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \psi = \psi^\dagger \beta \alpha_3 \psi = \psi^\dagger \alpha_3 \psi$

$$J_{inc}^3 = \begin{pmatrix} 1, 0, \frac{k}{E+m}, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2k}{E+m}$$

$$J_{refl}^3 = \frac{2a^2 k}{E+m}$$

$$J_{trans}^3 = \frac{2c^2 q}{E - V_0 + m}$$

$$J_{inc}^3 = J_{refl}^3 + J_{trans}^3$$

$$T \equiv \frac{J_{trans}^3}{J_{inc}^3} = \frac{4r}{(1+r)^2}$$

$$R \equiv \frac{J_{refl}^3}{J_{inc}^3} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

a) $V_0 < E + m$ $r > 0$ $T > 0$ *hay transmisión*

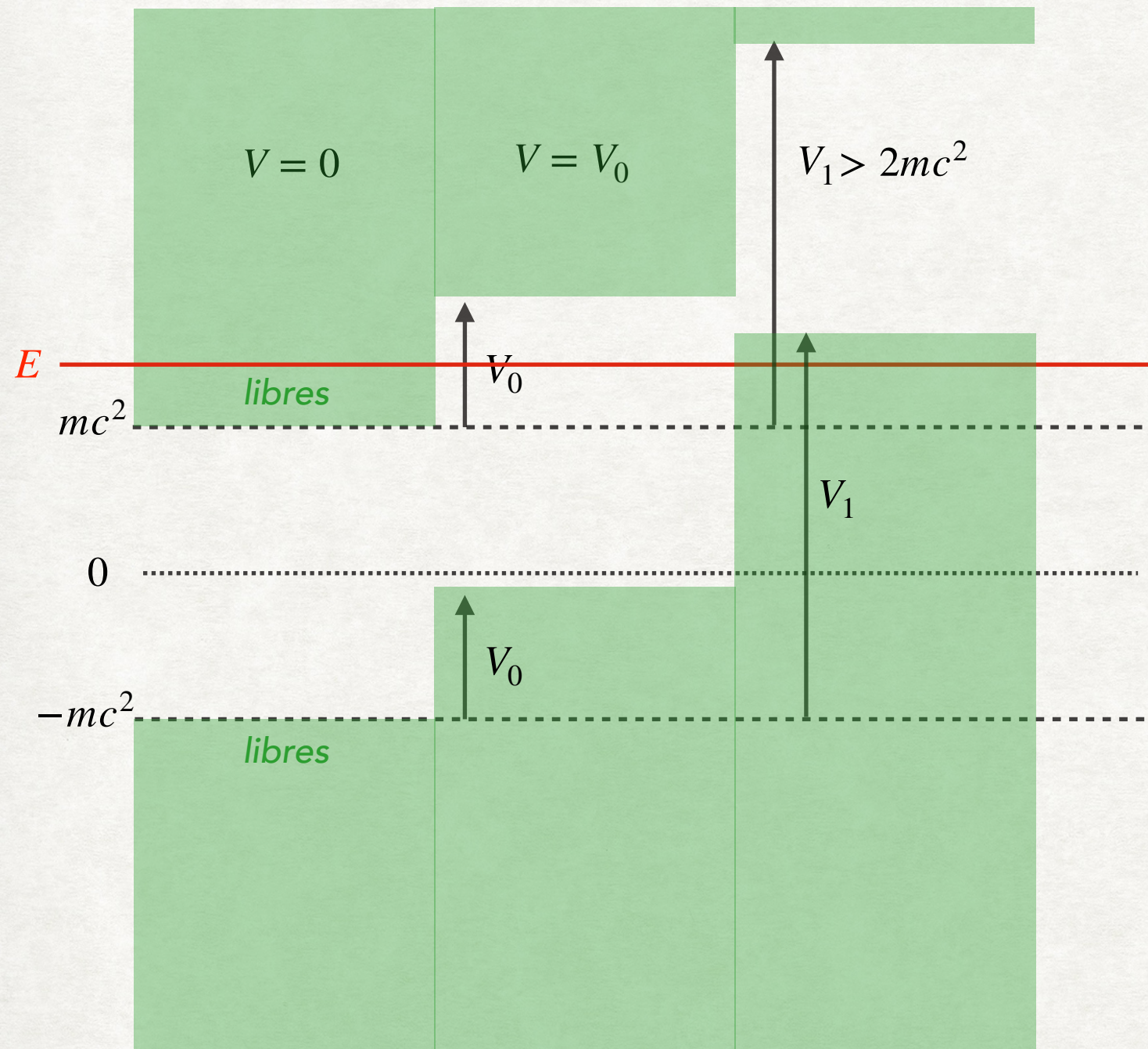
$R < 1$ *se reflejan menos que las incidentes*

b) $V_0 > E + m$ $r < 0$ $T < 0$ *transmitidas en dirección opuesta?*

$R > 1$ *más partículas reflejadas que las incidentes?*

CLASE 7: Fenomenología de Dirac

paradoja de Klein: *cuando las componentes débiles no son tan débiles...*





CLASE 7: Fenomenología de Dirac

trayectoria de una partícula de Dirac: *zitterbewegung*

velocidad de una partícula de Dirac:

$$\dot{x}_k \equiv \frac{i}{\hbar} [H, x_k] = \frac{ic}{\hbar} [\alpha_j p_j, x_k] = \frac{ic\alpha_j}{\hbar} [p_j, x_k] = c\alpha_k$$

nunca va estar en autotestado de velocidad (salvo que $m = 0$)

$$H = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 \quad [x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

además, $[\alpha_i, \alpha_j] \neq 0 \dots$

$$[H, p_k] = 0 \quad [H, \alpha_k] \neq 0$$

para una partícula libre, la velocidad no es constante de movimiento (salvo que $m = 0$)

aceleración de una partícula de Dirac:

$$\dot{\alpha}_k \equiv \frac{i}{\hbar} [H, \alpha_k] = \frac{i}{\hbar} (-2\alpha_k H + 2cp_k) \neq 0$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad \alpha_i \beta = -\beta \alpha_i \quad \frac{i}{\hbar} [\beta mc^2, \alpha_k] = \frac{imc^2}{\hbar} (\beta \alpha_k - \alpha_k \beta) = -2 \frac{i}{\hbar} \alpha_k \beta mc^2$$

$$\frac{i}{\hbar} [c \vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \alpha_k] = \frac{icp_i}{\hbar} [\alpha_i, \alpha_k] = \frac{icp_i}{\hbar} (\alpha_i \alpha_k - \alpha_k \alpha_i) = -\frac{icp_i}{\hbar} 2\alpha_k \alpha_i = -2 \frac{i}{\hbar} \alpha_k c \alpha_i p_i = -2 \frac{i}{\hbar} c \alpha_k \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + 2 \frac{i}{\hbar} c \alpha_k p_k \alpha_k$$

CLASE 7: Fenomenología de Dirac

trayectoria de una partícula de Dirac: *zitterbewegung*

velocidad de una partícula de Dirac:

$$\dot{x}_k \equiv \frac{i}{\hbar}[H, x_k] = \frac{ic}{\hbar}[\alpha_j p_j, x_k] = \frac{ic\alpha_j}{\hbar}[p_j, x_k] = c\alpha_k$$

$$H = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 \quad [x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

$$[H, p_k] = 0 \quad [H, \alpha_k] \neq 0$$

aceleración de una partícula de Dirac:

$$\dot{\alpha}_k \equiv \frac{i}{\hbar}[H, \alpha_k] = \frac{i}{\hbar}(-2\alpha_k H + 2cp_k) \neq 0$$

$$\alpha_k(t) = \frac{cp_k}{H} + (\alpha_k(0) - \frac{cp_k}{H})e^{-2iHt/\hbar}$$

$$x_k(t) = x_k(0) + \frac{c^2 p_k}{H}t + \frac{ic\hbar}{2H}(\alpha_k(0) - \frac{cp_k}{H})e^{-2iHt/\hbar}$$



*nunca va estar en autotestado de velocidad
(salvo que $m = 0$)*

además, $[\alpha_i, \alpha_j] \neq 0 \dots$

*para una partícula libre, la velocidad no es
constante de movimiento (salvo que $m = 0$)*

partícula libre...

$$(\nu \sim 1.5 \cdot 10^{21} s^{-1})$$

$$(\Delta x \sim 3.9 \cdot 10^{-11} cm)$$

Gargamelle bubble chamber: leptonic neutral current

