

FISICA DE LAS INTERACCIONES FUNDAMENTALES

1ER CUATRIMESTRE 2026

CLASE 20

RODOLFO SASSOT

CLASE 20: Relatividad General

Expansión del universo, Ecuaciones de Friedmann, Ondas Gravitacionales

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Ecuaciones de Einstein

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

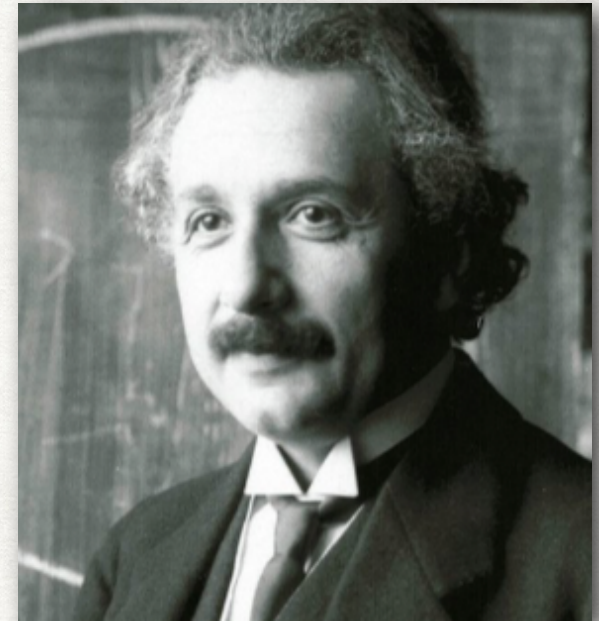
$$R - \frac{4}{2}R = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

$$-R = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

ecuación escalar

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}(\rho_{00} + \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3)$$

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}(\rho_{00} + 3\mathcal{P})$$



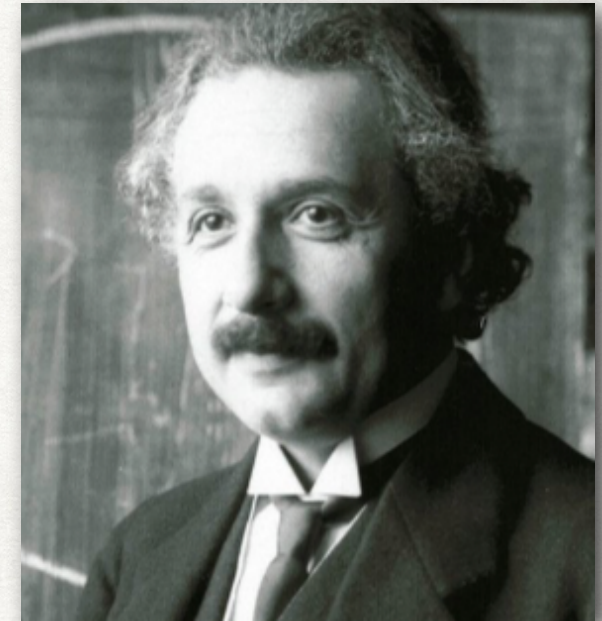
CLASE 20: Relatividad General

Expansión del universo, Ecuaciones de Friedmann, Ondas Gravitacionales

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}(\rho_{00} + 3\mathcal{P})$$

$$R = -g^{\mu\nu} \left[\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} \right] - \partial_{\nu} \left[g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - g^{\mu\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} \right]$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right)$$



Métrica FLRW (clase 19)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

$a(t), K(t)$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2(t)}{1 - Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

CLASE 20: Relatividad General

Expansión del universo:

1922 Friedmann: soluciones Ec. Einstein h&i

1927 Lemaître: universo homogéneo e isotópico en expansión

1929 Hubble: recesión de galaxias proporcional a la distancia



Georges Lemaître
1894-1966

$$v = HD \quad \text{ley de Lemaître-Hubble}$$

$$D = a \Delta x \quad \begin{array}{l} a(t) \text{ factor de escala} \\ \Delta x \text{ coordenadas co-traslacionales (fijas!)} \end{array}$$

$$\dot{D} = \dot{a} \Delta x$$

$$v = \frac{\dot{a}}{a} a \Delta x = \frac{\dot{a}}{a} D \quad H = \frac{\dot{a}}{a} \quad [1/t]$$

$$H_0 = \frac{70 \text{ km/s}}{3 \cdot 10^{13} \text{ km}} = 2.3 \cdot 10^{-12} 1/s \quad v_{luna} = 2.3 \cdot 10^{-12} 380000 \text{ km/s} = 0.8 \text{ mm/s} = 3.14 \text{ m/h}$$

$$\text{frontera de Hubble: } D / . v = c \quad D = \frac{c}{H} = 14.4 \cdot 10^9 \text{ años luz}$$



Edwin Hubble
1889-1953

CLASE 20: Relatividad General

Expansión del universo:

$$v \longrightarrow z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emit}}{\lambda_{emit}} \text{ "redshift"}$$

$$z \neq \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} - 1 \text{ "SR doppler redshift"}$$

doppler clásico + dilatación temporal
~ objetos con movimiento relativo en x

$$z = \frac{a_0}{a(t)} - 1 \text{ "cosmological redshift"}$$

cambio de $a(t)$ desde la emisión hasta la observación
~ aunque estén quietos $\dot{\Delta}x = 0$

$D \longrightarrow$ "luminosidad aparente vs. absoluta"

$$d_p = \frac{c}{H_0} z \quad \text{distancia propia}$$

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}} \quad \text{distancia luminosa}$$

$$d_L = d_p (1 + z)$$

CLASE 20: Relatividad General

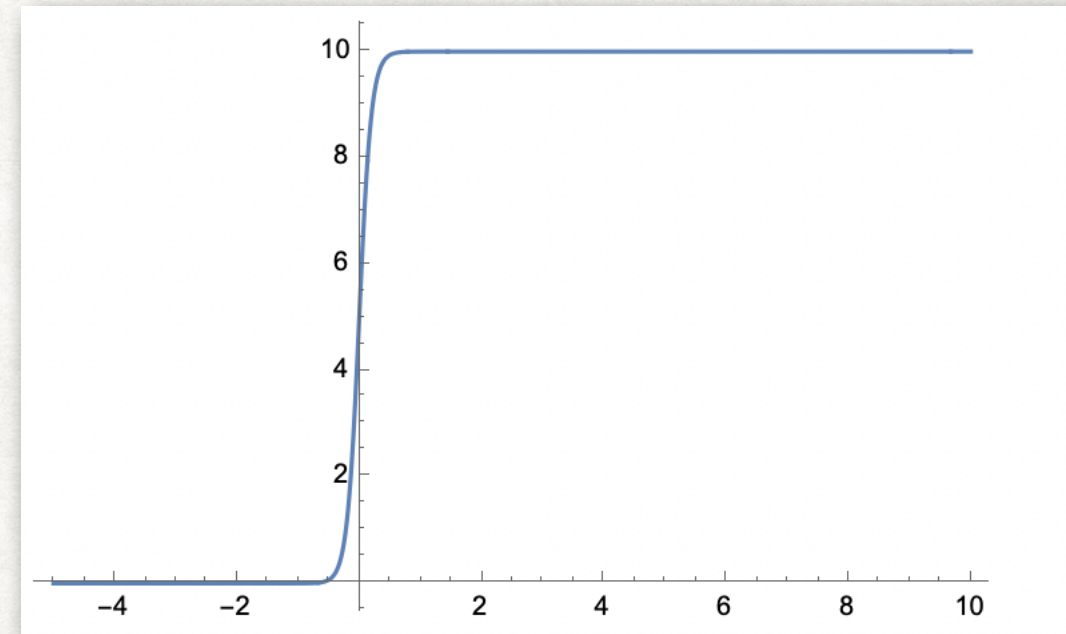
Expansión del universo:

H no es cte, pero actualmente se aproxima a una cte, H_0

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad \dot{a} = H a \quad \dot{a} \simeq H_0 a \quad a = \alpha e^{H_0 t} + K$$

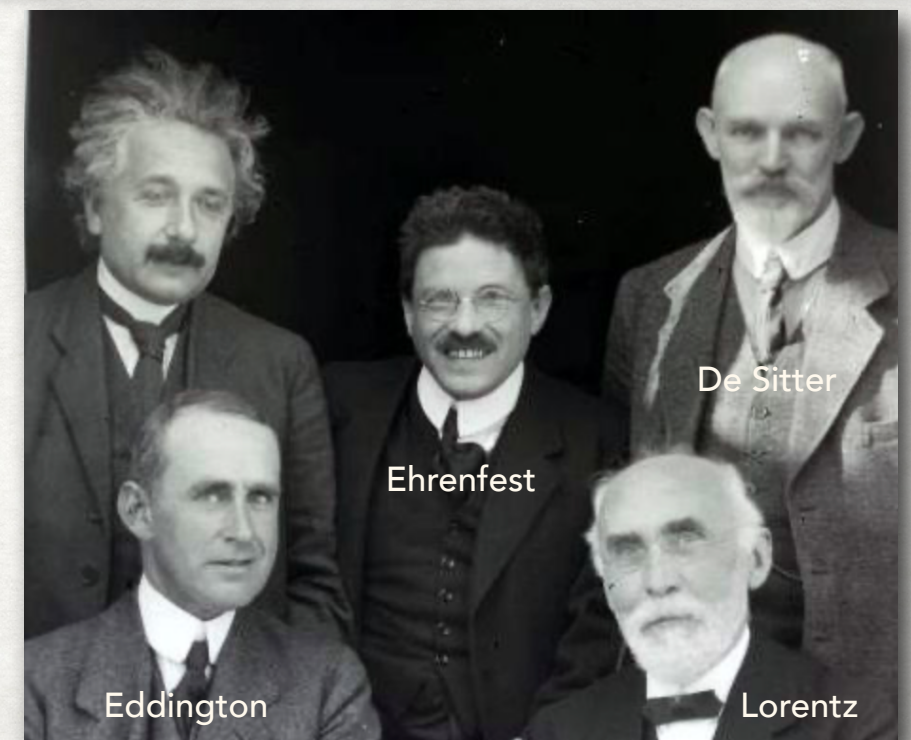
$$H \simeq \frac{\alpha H_0 e^{H_0 t}}{\alpha e^{H_0 t} + K} \quad \text{si } K < \alpha e^{H_0 t} \quad H \simeq H_0$$

por ej. $\alpha = 1, H_0 = 10, K = 1$



$$a = \cosh(H_0 t) = \frac{e^{2H_0 t} + 1}{2e^{H_0 t}} \quad \text{solución de de Sitter}$$

$$R = cte \quad \sim \text{vacío con } g_{\mu\nu} \Lambda > 0$$



CLASE 20: Relatividad General

Ecuaciones de Friedmann (modelo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker)

Friedmann y Lemaître “resolvieron” las ecuaciones de Einstein bajo ciertas suposiciones

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} \quad a(t), K(t) \quad ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - K(t)r^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

universo homogéneo e isotrópico + gas inerte (sólo interactúa vía gravedad)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad H = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\mathcal{P}) + \frac{\Lambda}{3}$$

Robertson y Walker: unicidad de la métrica FLRW

CLASE 20: Relatividad General

Ecuaciones de Friedmann

aproximación newtoniana: curvatura despreciable

universo homogéneo e isotrópico + gas inerte

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = cte$$

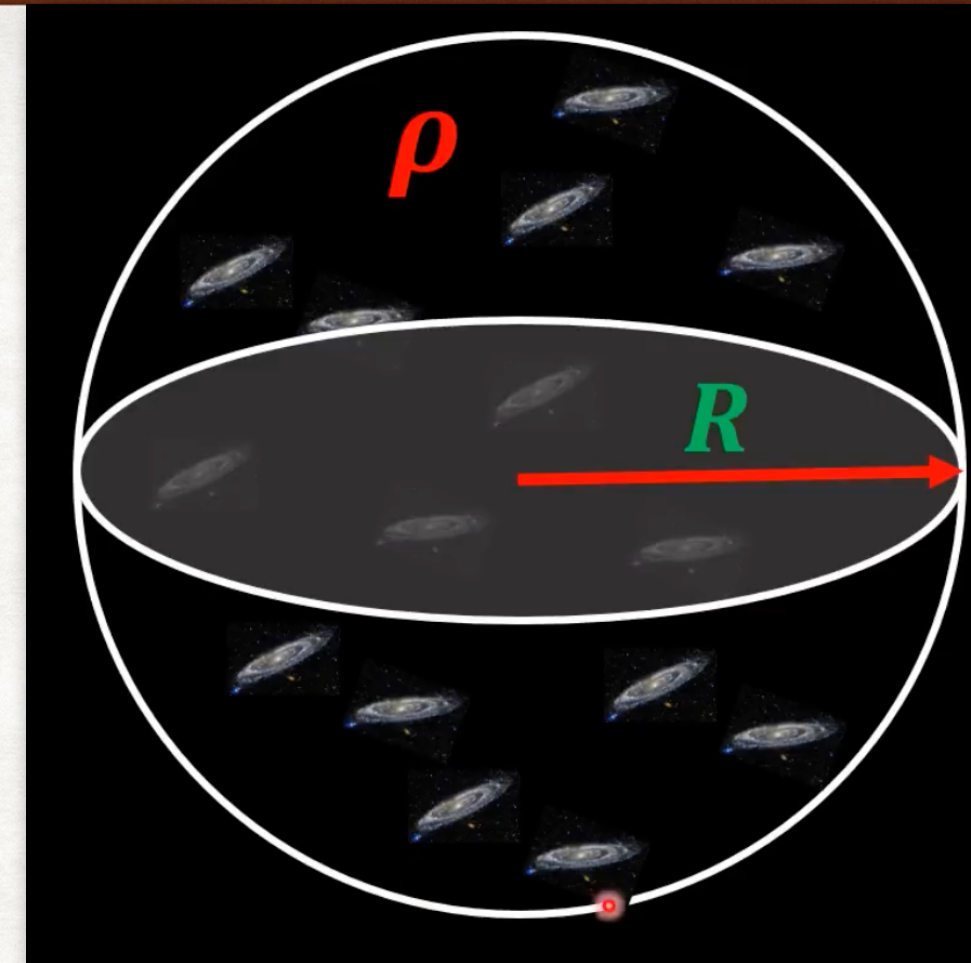
$$\frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v^2}{2} - \frac{G 4\pi \rho R^2}{3} = \frac{v^2}{2} - \frac{G 4\pi \rho a^2 R^2}{3}$$

$$R \rightarrow aR \quad v = \dot{a}R$$

$$\dot{a}^2 R^2 - \frac{G 8\pi \rho a^2 R^2}{3} = cte' \quad \dot{a}^2 - \frac{G 8\pi \rho a^2}{3} = cte''$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}$$

$K \sim (- \text{energía total})$



$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{G 8\pi \rho}{3} = \frac{cte'''}{a^2}$$

~energía de
la expansión

~energía
potencial

~energía
total

CLASE 20: Relatividad General

Ecuaciones de Friedmann

aproximación newtoniana: curvatura despreciable

$$m\ddot{R} = -\frac{GMm}{R^2} \quad \ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} \quad \ddot{R} = -\frac{G\rho}{\cancel{R^2}} \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G\rho}{3}$$

$$R \rightarrow aR \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3} \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\mathcal{P}) + \frac{\Lambda}{3}$$

$\Lambda \sim$ potencial repulsivo

Distintas suposiciones sobre ρ , $\mathcal{P}$ y Λ , distintas "cosmologías" $a(t)$, $K(t)$

CLASE 20: Relatividad General

Ondas gravitacionales:

“Ondas de curvatura del espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz y son producidas por el movimiento relativo de masas gravitacionales”

transportan energía (~radiación e.m.)

no son predichas por la mecánica newtoniana

observación indirecta 1974 (decaimiento orbital de un pulsar binario) Hulse & Taylor 1993

observación directa 2015 (fusión de agujeros negros) LIGO, Weiss, Thorne & Barrish 2017

observación directa de GWB 2023 (pulsar timing arrays)

1867 Predicción de ondas electromagnéticas (Maxwell)

1887 detección de ondas electromagnéticas (Hertz)

1893 sugeridas por Heaviside a partir de la analogía electrostática/gravitación

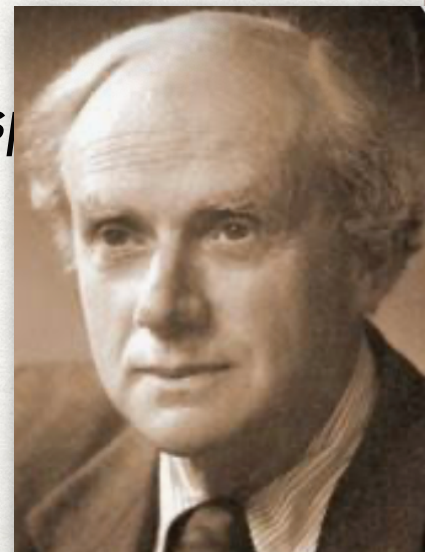
1905 Poincaré las propone como resultado de masas aceleradas en relatividad especial

1916 Einstein las deriva de las ecuaciones (errores)

....

1957 Feynman propone un experimento para determinar si transmiten energía

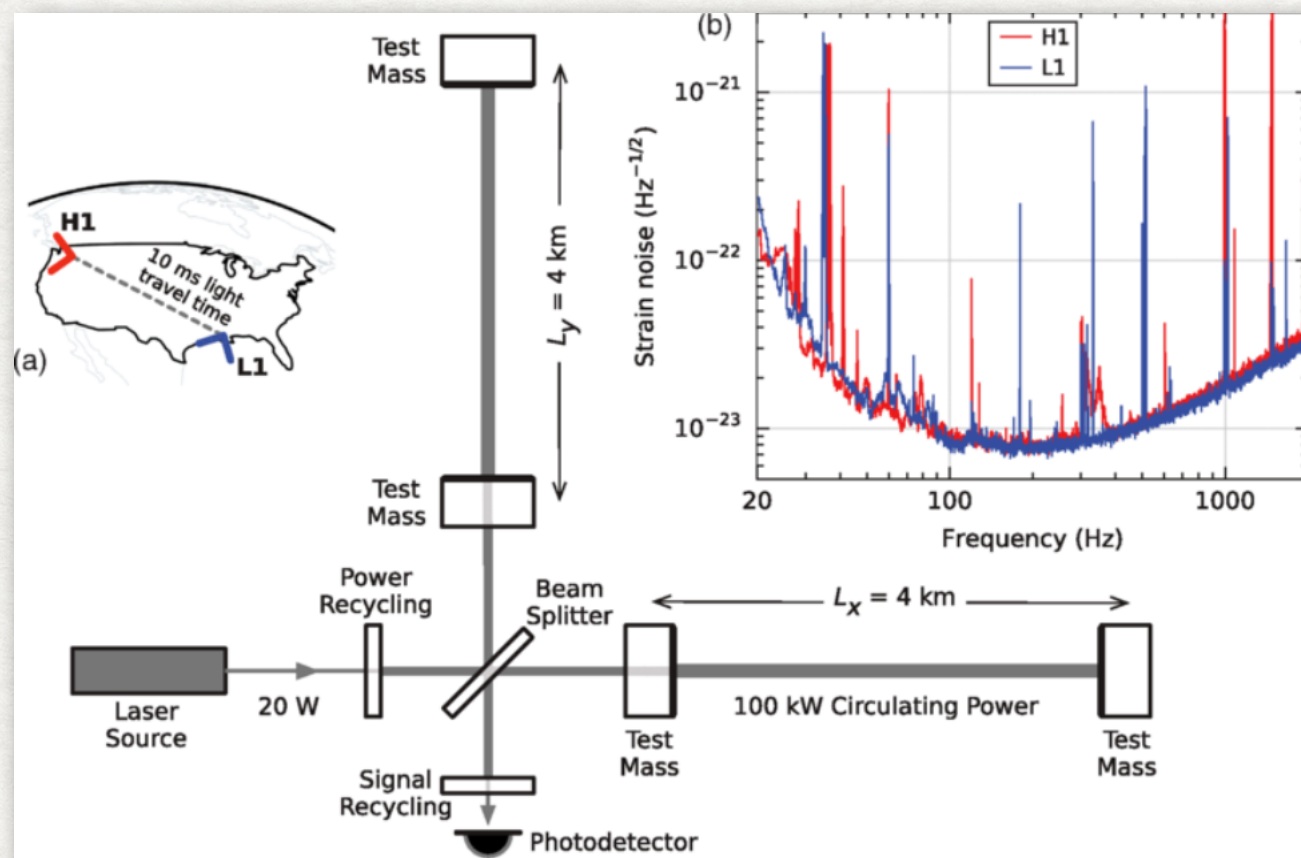
1964 Dirac predice ondas gravitacionales con densidad de energía bien definida



CLASE 20: Relatividad General

Ondas gravitacionales:

LIGO: Laser Interferometry Gravitational-waves Observatory



~1600 investigadores
~120 instituciones

Jorge Pullin



Gabriela Gonzalez

