Estructura de la Materia 4 (1c/12)
Práctica 3: Cuadrivectores

1. Muestre que: (a) $x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu$; (b) $x_\mu = T_{\mu\nu}\, y^\nu \implies x^\mu = T^{\mu\nu} y_\nu$; (c) $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$; (d) en general $T_\mu{}^\nu \neq T^\mu{}_\nu$; (e) $g_\mu{}^\nu = g^\nu{}_\mu = \delta_\mu^\nu$ (δ de Kronecker), sin aclarar si el 1er o 2do índice es el contravariante.

2. Considere las transformaciones de Lorentz de 4-vectores contra- y co-variantes de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ y $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Muestre que $\Lambda^\mu{}_\nu = \partial x'^\mu / \partial x^\nu$ (x' arriba) pero $\Lambda_\mu{}^\nu = \partial x^\nu / \partial x'^\mu$ (x' abajo).

3. Muestre que los cuatro objetos $\partial / \partial x^\mu$ (derivada respecto a un vector contravariante) son las componentes de un 4-vector covariante, o sea $\partial / \partial x^\mu = \partial_\mu$.

4. Escriba en notación 4-vectorial las reglas de cuantización vistas en FT2, $E \to i\hbar\, \partial/\partial t$ y $\mathbf{p} \to -i\hbar\nabla$, y muestre que son covariantes de Lorentz, si bien FT2 es cuántica no-relativista.

5. La transformación de un cuadritensor $T_{\mu\nu}$ ante una rotación o boost es $T'_{\rho\sigma} = \Lambda_\rho{}^\mu \Lambda_\sigma{}^\nu\, T_{\mu\nu}$. Aplicando esta relación al caso particular del tensor métrico, muestre que $g_{\mu\nu}$ es invariante de Lorentz.

6. Trabajar con índices covariantes y contravariantes requiere ciertos cuidados. Por ejemplo, cuál es la regla correcta para la transpuesta, $(\Lambda^{\mathbf{T}})_\nu{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu$ ó $(\Lambda^{\mathbf{T}})_\nu{}^\mu = \Lambda_\mu{}^\nu$?

7. Llamemos Λ a la matriz de 4×4 que transforma cuadrivectores, $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, a^\nu$. Muestre que $a_\mu b^\mu$ es invariante de Lorentz si y sólo si $\Lambda^{\mathbf{T}} g\, \Lambda = g$ (o $\Lambda^{-1} = g\, \Lambda^{\mathbf{T}} g$), siendo g la matriz métrica $g_{\mu\nu}$.

8. Los potenciales escalar $\Phi(\mathbf{r}, t)$ y vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ determinan los campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ via
$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$
pero cualquier otro par $(\Phi', \mathbf{A}')$ derivado de $(\Phi, \mathbf{A})$ mediante una transformación de gauge
$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \lambda}{\partial t}$$
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\lambda$$
con $\lambda(\mathbf{r}, t)$ arbitrario, da lugar al mismo campo electromagnético $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Escriba la transformación de gauge en notación 4-vectorial y muestre que es covariante de Lorentz.

9. La medida de Lorenz (ojo, no "Lorentz") corresponde a exigir $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + (1/c)\, \partial\Phi/\partial t = 0$.
(a) Escriba esta condición en notación cuadrivectorial y muestre que es covariante.
(b) El gauge de Lorenz no es unívoco. Muestre que la condición que debe cumplir $\lambda(\mathbf{r}, t)$ para relacionar dos potenciales en el gauge de Lorenz es $\Box^2\lambda = 0$, invariante de Lorentz.

10. La ecuaciones de Maxwell permiten calcular los campos $\Phi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ generados por cargas y corrientes arbitrarias, $\rho(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

(a) Muestre que en notación cuadrivectorial estas dos ecuaciones se resumen en

$$\Box^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 4\pi j^\mu.$$

(b) Explique por qué esta expresión muestra explícitamente la covariancia de las leyes de Maxwell.
(c) Escriba las ecuaciones de Maxwell del punto (a) en la medida de Lorenz.