

## Física Teórica II

### Práctica 2: Formalismo

#### Parte I: Operadores, autoestados y cambio de base.

##### 1. Cambio de Base

a) Considere dos kets  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$ . Suponga que  $\langle a'|\alpha\rangle, \langle a''|\alpha\rangle, \dots$  y  $\langle a'|\beta\rangle, \langle a''|\beta\rangle, \dots$  son todos conocidos, donde  $|a'\rangle, |a''\rangle, \dots$  forman un conjunto completo de kets base. Encuentre la representación matricial del operador  $|\alpha\rangle\langle\beta|$  en esta base.

b) Considere ahora un sistema de espín 1/2 y sean  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  iguales a  $|s_z = \hbar/2\rangle$  y  $|s_x = \hbar/2\rangle$  respectivamente.

1) Escriba explícitamente la matriz cuadrada que corresponde a  $|\alpha\rangle\langle\beta|$  en la base usual ( $S_z$  diagonal).

2) Transforme esta matriz a la base en las que  $S_x$  es diagonal utilizando la matriz de cambio de base.

2. Suponga que  $|i\rangle$  y  $|j\rangle$  son autoestados de algún operador hermítico  $A$ . ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que  $|i\rangle + |j\rangle$  también es autoestado de  $A$ ? Justifique.

3. Considere un espacio de kets generado por los autoestados  $\{|a'\rangle\}$  de un operador hermítico  $A$ . No hay degeneración.

a) Pruebe que  $\prod_{a'}(A - a')$  es el operador nulo.

b) ¿Cuál es el significado del operador  $\prod_{a'' \neq a'} \frac{(A - a'')}{(a' - a'')}$  para un  $a'$  dado?

c) ¿Cuál es el significado del operador  $\prod_{a' \neq a''} \frac{(A - a'')}{(a' - a'')}$  para un  $a'$  dado?

d) Ilustre los dos puntos anteriores usando  $A = S_z$  de un sistema de espín 1/2.

4. Un cierto observable en mecánica cuántica tiene una representación matricial de  $3 \times 3$  como sigue

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los autovectores normalizados de este observable y los correspondientes autovalores. ¿Hay degeneración?

b) De un ejemplo físico donde todo esto sea relevante.

5. Sean  $A$  y  $B$  dos observables. Suponga que los autokets simultáneos de  $A$  y  $B$   $\{|a', b'\rangle\}$ , forman un conjunto ortonormal completo de kets base. ¿Se puede siempre concluir que  $[A, B] = 0$ ? Si su respuesta es sí, pruébela; si es no, dé un contraejemplo.

6. Dos operadores hermíticos anticonmutan, es decir  $\{A, B\} = AB + BA = 0$ . ¿Es posible tener un autoket común de  $A$  y  $B$ ? Pruebe o ilustre su conclusión.

7. Considere dos observables  $A_1$  y  $A_2$  que no conmutan entre sí ( $[A_1, A_2] \neq 0$ ), pero ambos conmutan con el hamiltoniano ( $[A_1, H] = [A_2, H] = 0$ ). Pruebe que los autoestados de energía son, en general, degenerados. ¿Hay excepciones? Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales  $H = p^2/2m + V(r)$ , con  $A_1 \rightarrow L_z$  y  $A_2 \rightarrow L_x$ .

8. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados está desarrollado en la base  $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$ . En esta base, los operadores  $\hat{H}$  y  $\hat{B}$  están dados por

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\omega_0$  y  $b$  son constantes reales reales.

- ¿ $\hat{H}$  y  $\hat{B}$  son hermíticos?
  - ¿ $\hat{H}$  y  $\hat{B}$  conmutan?
  - En caso que conmuten, construir una base de autovectores comunes a ambos operadores.
  - ¿Cuáles de los conjuntos  $\{\hat{H}\}$ ,  $\{\hat{B}\}$ ,  $\{\hat{H}, \hat{B}\}$ ,  $\{\hat{H}^2, \hat{B}\}$  son CCOC?
9. ♣ Consideren los operadores  $A$ ,  $B$  y  $C$  que actúan sobre una base  $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$  así:

$$A|u_1\rangle = |u_1\rangle; A|u_2\rangle = 0; A|u_3\rangle = -|u_3\rangle$$

$$B|u_1\rangle = |u_1\rangle; B|u_2\rangle = |u_2\rangle; B|u_3\rangle = |u_3\rangle$$

$$C|u_1\rangle = i|u_2\rangle; C|u_2\rangle = -i|u_1\rangle + i|u_3\rangle; C|u_3\rangle = -i|u_2\rangle$$

$$D|u_1\rangle = i|u_2\rangle; D|u_2\rangle = i|u_1\rangle + i|u_3\rangle; D|u_3\rangle = -i|u_2\rangle$$

- Digan cuales corresponden a posibles observables. Justifiquen su respuesta.
- Considerando los operadores que son observables, enumeren los CCOC que pueden construirse y digan cuales son sus autoestados comunes.
- Hay dos observables que no conmutan. Elijan uno y digan qué valores podrían obtenerse al medir sobre un estado desconocido. Si luego se midiera el otro de los operadores, ¿qué valores podrían obtenerse?

### Parte II: Principio de incertidumbre.

10. Demostrar la desigualdad de Schwarz, que dice que si  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  son dos vectores arbitrarios en el mismo espacio vectorial, entonces

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2,$$

y la igualdad sólo se produce si estos vectores son proporcionales.

Ayuda: Considerar el ket

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle.$$

Siendo este un vector del espacio vectorial, su norma debe ser no-negativa. Elegir el valor

$$\lambda = -\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}.$$

11. Dar un ejemplo en que se cumpla la desigualdad de Schwartz.

## 12. Principio de Incertidumbre

- a) Para dos observables  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  y un estado cualquiera, pruebe la relación de incerteza generalizada

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle[A, B]\rangle|^2,$$

donde  $\Delta A = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$ .

- b) Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene cuando el estado en cuestión satisface

$$\Delta A |\alpha\rangle = \lambda \Delta B |\alpha\rangle$$

donde  $\lambda$  es un imaginario puro.

## 13. Verifique que la función de onda de un paquete gaussiano, dada por

$$\langle x' | \alpha \rangle = (2\pi d^2)^{-1/4} \exp \left[ \frac{i \langle p \rangle x'}{\hbar} - \frac{(x' - \langle x \rangle)^2}{4d^2} \right]$$

satisface la relación de incerteza mínima

$$\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle} \sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle} = \frac{\hbar}{2}.$$

Muestre que también se cumple la condición

$$\langle x' | \Delta x | \alpha \rangle = c \langle x' | \Delta p | \alpha \rangle$$

donde  $c$  es un número imaginario.

## 14. Calcule

$$\langle(\Delta S_x)^2\rangle \equiv \langle\hat{S}_x^2\rangle - \langle\hat{S}_x\rangle^2$$

donde el valor de expectación es para el estado  $|S_z+\rangle$ . Usando su resultado, verifique la relación de incerteza generalizada,

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle[A, B]\rangle|^2$$

con  $\hat{A} \rightarrow \hat{S}_x$  y  $\hat{B} \rightarrow \hat{S}_y$ .

15. Verifique la relación de incerteza con  $\hat{A} \rightarrow \hat{S}_x$  y  $\hat{B} \rightarrow \hat{S}_y$  para el estado  $|S_x+\rangle$ .16. Encuentre la combinación lineal de  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  que maximiza el producto

$$\langle(\Delta S_x)^2\rangle\langle(\Delta S_y)^2\rangle.$$

Verifique explícitamente que para la combinación lineal que encontró, la relación de incerteza para  $\hat{S}_x$  y  $\hat{S}_y$  no se viola.

17. Evalúe  $\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle$  para una partícula confinada en un pozo unidimensional

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hágalo tanto para el estado base como para los estados excitados.

### Parte III: Operadores y estados continuos.

18. a) Suponga que  $f(A)$  es una función de un operador hermítico  $A$  con la propiedad  $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$ . Evalúe  $\langle b''|f(A)|b'\rangle$  suponiendo que se conoce la matriz de transformación entre la base  $a'$  y la base  $b'$ .

- b) Usando el análogo continuo del resultado obtenido en (a), evalúe

$$\langle \mathbf{p}''|F(r)|\mathbf{p}'\rangle$$

Simplifique su expresión tanto como le sea posible. Note que  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , donde  $x, y, z$  son operadores.

19. a) Sea  $x$  y  $p_x$  la coordenada y el momento lineal en una dimensión. Evalúe el corchete de Poisson clásico

$$\{x, F(p_x)\}_{\text{clásico}}$$

- b) Sean ahora  $x$  y  $p_x$  los correspondientes operadores cuánticos. Evalúe el conmutador

$$\left[x, \exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)\right]$$

y compare con (a) cuando  $F(p_x) = \exp(ip_x a/\hbar)$ .

- c) Usando el resultado de (b), pruebe que

$$\exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)|x'\rangle \text{ con } x|x'\rangle = x'|x'\rangle$$

es un autoestado del operador  $x$ . ¿Cuál es el correspondiente autovalor?

### 20. Operador de Traslaciones

- a) Consideramos dos observables  $\hat{Q}$  y  $\hat{P}$  tales que

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar.$$

Definimos al operador

$$\hat{S} = e^{-i\frac{\lambda\hat{P}}{\hbar}}.$$

- 1) Demostrar que  $\hat{S}$  es unitario.
- 2) Calcular  $\hat{S}(-\lambda)$ .
- 3) Mostrar que  $\hat{Q}\hat{S}(\lambda) = \hat{S}(\lambda)[\hat{Q} + \lambda]$ .
- 4) Mostrar que si  $|q\rangle$  es un autovector (no nulo) de  $\hat{Q}$ , entonces  $\hat{S}(\lambda)|q\rangle$  también lo es. Calcular su autovalor.
- 5) Sea  $|q\rangle = \hat{S}(q)|0\rangle$ , donde  $|0\rangle$  es un autovector de  $\hat{Q}$  con autovalor 0. Mostrar que  $\hat{S}(\lambda)|q\rangle = |q + \lambda\rangle$ .
- 6) Mostrar que  $\langle q|\hat{S}(\lambda) = \langle q - \lambda|$ .

21. a) Verifique que las igualdades

$$[x_i, G(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial p_i} \quad [p_i, F(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

pueden derivarse a partir de las relaciones de conmutación fundamentales, para cualquier par de funciones  $F$  y  $G$  que puedan ser expresadas en serie de potencias de su argumento.

- b) Evalúe  $[x^2, p^2]$ . Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico  $\{x^2, p^2\}_{\text{clásico}}$ .
22. a) Pruebe lo siguiente

$$\begin{aligned}\langle p'|x|\alpha\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle \\ \langle\beta|x|\alpha\rangle &= \int dp'\psi_\beta^*(p')i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\psi_\alpha(p')\end{aligned}$$

donde  $\psi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$  y  $\psi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$  son las funciones de onda en el espacio de momentos.

- b) ¿Cuál es el significado físico de  $\exp(ix\Xi/\hbar)$ , donde  $x$  es el operador posición y  $\Xi$  es algún número con dimensiones de momento? Justifique su respuesta.