# Física Teórica II
## Práctica 5: Momento angular y Rotaciones
### Parte I: Rotaciones.

1. Considere un estado arbitrario $|\alpha\rangle$ de un sistema de espín 1/2, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo $\varphi$ alrededor del eje $z$,

$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-i\frac{S_z\varphi}{\hbar}\right)|\alpha\rangle$$

   *a*) Calcule $\langle S_x\rangle_R$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle S_x\rangle$ y $\langle S_y\rangle$ en el sistema original.

   *b*) Muestre que para una rotación de $2\pi$ en $\varphi$ se satisface

$$|\alpha\rangle_R = -|\alpha\rangle$$

   Observe que no se obtiene el mismo estado debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Let.* **35**, 1053 (1975) o *Phys. Today* Dic. 1980, pag. 24.

   *c*) Muestre que no pasa lo mismo con la rotación de en $\mathbb{R}^3$

2. *a*) Usando las propiedades de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli, pruebe la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

   donde **a** y **b** son dos vectores complejos en tres dimensiones.
   Recuerde que $(a\times b)_i = \sum_{jk}\epsilon_{ijk}a_j b_k$.

   *b*) Usando (a), muestre que el operador rotación para un sistema de espín 1/2 en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se puede escribir como

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\phi) = \exp\left(-i\frac{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) = \mathbb{I}\cos\frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\sin\frac{\phi}{2}$$

   donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad.

   *c*) Escriba explícitamente la matriz de $2\times 2$ que representa la rotación $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\phi)$.

   *d*) Sea $\hat{\mathbf{n}}$ el versor definido por los ángulos polares. Aplíque al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado para obtener el estado $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$, que representa un espín orientado según $\hat{\mathbf{n}}$.

3. Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de espín 1/2 representada por

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}},\alpha)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{y}},\beta)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}},\gamma)$$

   *a*) Muestre que la matriz de $2\times 2$ que representa esta rotación es

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z\alpha}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_y\beta}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_z\gamma}{2}\right)\\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

*b*) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo $\theta$. Encuentre $\theta$ y la dirección de dicho eje.

4. Muestre que las matrices de $3 \times 3$ $G_i$ $(i = 1, 2, 3)$ cuyos elementos están dados por $(G_i)_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$, donde $j$ y $k$ son índices de fila y de columna, satisfacen las relaciones de conmutación del momento angular. ¿Cuál es el significado físico (o geométrico) de la transformación matricial que conecta a $G_i$ con las representaciones de $3 \times 3$ más usuales del operador de momento angular $J_i$, con $J_z$ diagonal? Relacione su resultado con la transformación
$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} + \hat{\mathbf{n}}\, \delta\phi \times \mathbf{V}$$
bajo rotaciones infinitesimales.
Nota: La siguiente identidad puede ser útil: $\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$.

**Parte II: Momento Angular.**

5. Sea $\mathbf{J}$ un operador de momento angular cualquiera, es decir que sus componentes satisfacen las relaciones de conmutación $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$.

   *a*) Se definen los operadores de subida y bajada en la forma $J_+ = J_x + iJ_y$ y $J_- = J_x - iJ_y$. Demostrar las siguientes propiedades:
$$\begin{aligned}
[J_+, J_-] &= 2\hbar J_z, \quad [J_z, J_+] = \hbar J_+, \quad [J_z, J_-] = -\hbar J_- \\
J_+J_- &= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \\
J_\pm|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle \\
J_\pm|j, \pm j\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

   *b*) Mostrar que cualquier estado de $J_z$ satisface $\langle J_x\rangle = \langle J_y\rangle = 0$, y que si en cierto estado $|\psi\rangle$ se satisface $J_z|\psi\rangle = \hbar m|\psi\rangle$, entonces sobre ese estado el valor medio de la proyección del impulso angular $\mathbf{J}$ sobre una dirección $\hat{\mathbf{n}}$ que forma un ángulo $\theta$ con el eje $z$ es $\langle \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\rangle = \hbar m \cos\theta$. Interprete el resultado.

6. Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, las matrices que representan a los operadores $L^2$, $L_x$, $L_y$, y $L_z$ en el subespacio generado por la base $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$ de autoestados de $L^2$ y $L_z$. Verifique explícitamente multiplicando las matrices la relación $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$.

   *a*) Encuentre la base $\{|l, m_y\rangle\}$ de autoestados de $L^2$ y $L_y$ de dicho subespacio. Escríbala como combinación lineal de los $|l, m\rangle$.

   *b*) Sea un estado descripto por el vector
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1, 1\rangle - |1, -1\rangle\right)$$
   Si se mide $L_x$, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide $L_y$.

   *c*) Sobre el estado $|\psi\rangle$ se mide $L_z$ y se obtiene $\hbar$, e inmediatamente después se mide $L_y$. ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

7. Un autoestado de momento angular $|j, j\rangle$ se rota en un ángulo infinitesimal $\epsilon$ alrededor del eje $y$. Obtenga una expresión para la probabilidad de que el nuevo estado rotado se encuentre en el estado original, hasta términos de orden $\epsilon^2$.

8. La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:
$$\Psi(x) = (x + y + 3\,z)\,f(r)$$
   a) ¿Es $\Psi$ autofunción de $L^2$? Si es así, ¿cuál es el valor de $l$? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de $l$ que pueden ser obtenidos cuando se mide $L^2$ ?
   b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con $m$ definido?
   c) Suponga que se conoce de alguna manera que $\Psi(x)$ es una autofunción de energía con autovalor $E$. Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

9. Suponga que fuera posible un valor semi-entero de $l$, por ejemplo $1/2$, para el impulso angular orbital. A partir de
$$L_+\,Y_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi) = 0$$
podemos deducir, como de costumbre
$$Y_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \propto e^{i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}.$$
Intente construir entonces $Y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta,\phi)$ de dos maneras diferentes:
   a) aplicando $L_-$ a $Y_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi)$,
   b) usando que $L_-\,Y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) = 0$.
   Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de $l$).

10. Considere un autoestado de impulso angular orbital $|l = 2, m = 0\rangle$. Suponga que este estado es rotado en un ángulo $\beta$ alrededor del eje $y$. Encuentre la probabilidad de que el nuevo estado se encuentre en $m = 0, \pm1, \pm2$. (Los armónicos esféricos pueden serle útiles).

11. La parte angular de la función de onda de un rotor rígido con un Hamiltoniano $H = \mathbf{L}^2/2I$ esta dada por
$$\langle\hat{\mathbf{n}}|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\sin\phi \tag{1}$$
   a) Halle $\langle\hat{\mathbf{n}}|\psi(t)\rangle$. *Sugerencia*: exprese la función de onda en términos de los $Y_{l,m}$.
   b) Si se mide $L_z$. ¿Qué valores pueden obtenerse y con que probabilidad?
   c) ¿Cuál es el valor de $\langle L_x\rangle$?
   d) Si ahora se mide $L_x$. ¿Qué resultados pueden obtenerse y con que probabilidad?

12. Consideren un oscilador armónico tridimensional descripto por el Hamiltoniano
$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}m\left[\omega_\perp^2 x_3^2 + \omega_\parallel^2(x_1^2 + x_2^2)\right]$$
Muestre que $L_3$ conmuta con $H$ y por ende es una constante de movimiento, sin embargo no es así para $L_1$ y $L_2$. ¿Qué puede decir de $L^2$?