

# Capítulo 2

## Filtros

### 2.1. RC pasabajos

Considere el circuito de la figura 2.1.

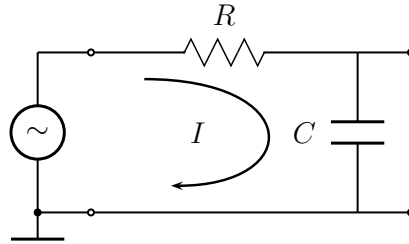


Figura 2.1: Una fuente de onda armónica de amplitud  $V_i$  y frecuencia angular  $\omega$  alimenta a un cuádrupolo RC.

La tensión de salida,  $V_0$ , coincide con la tensión sobre el capacitor,  $V_C$ , y se expresa en notación compleja de la siguiente manera

$$V_0 = V_C = I Z_C = \frac{V_i}{Z_T} Z_C = \frac{V_i}{R - \frac{j}{\omega C}} \frac{-j}{\omega C} = \frac{V_i \frac{-j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} \quad (2.1)$$

siendo  $I$  la corriente que circula por el capacitor (que en este caso coincide con la corriente de la única malla),  $Z_C$  la impedancia del capacitor,  $Z_T$  la impedancia total que el cuádrupolo presenta a la fuente de tensión armónica (de frecuencia angular  $\omega$  y amplitud  $V_i$ ), y  $j$  la unidad imaginaria ( $j^2 = -1$ ).

Multiplicando numerador y denominador por  $j\omega C$  resulta

$$V_0 = \frac{V_i}{1 + j\omega RC} = \frac{V_i}{1 + j\omega/\omega_0} \quad \text{siendo} \quad \boxed{\omega_0 = 1/RC} \quad (2.2)$$

La función transferencia,  $T$ , resulta entonces

$$T \equiv \left| \frac{V_0}{V_i} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \quad (2.3)$$

Para calcular la diferencia de fase entre  $V_C$  y  $V_i$  conviene racionalizar la última expresión de  $V_0$

$$V_C = \frac{V_i (1 - j\omega/\omega_0)}{1 + (\omega/\omega_0)^2} \quad (2.4)$$

De donde resulta

$$\phi = \arctan \frac{\Im\{V_C/V_i\}}{\Re\{V_C/V_i\}} = -\arctan \omega/\omega_0 \quad (2.5)$$

Los gráficos de la función transferencia y el defasaje en función de  $\omega/\omega_0$  se ilustran en la figura 2.2.

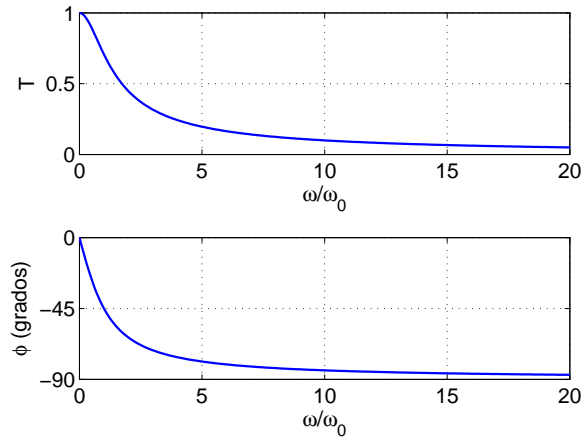


Figura 2.2: Funciones transferencia y defasaje correspondientes a un filtro RC pasabajos. Para  $\omega/\omega_0 \rightarrow 0$ , resulta:  $T \rightarrow 1$  y  $\phi \rightarrow 0$ ; mientras que para  $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$ , se obtiene:  $T \rightarrow 0$  y  $\phi \rightarrow -90^\circ$ .

### 2.1.1. Atenuación, defasaje y diagrama de Bode

Se define la *atenuación*,  $A$ , como

$$A \equiv 20 \log_{10} T \quad [\text{dB}] \quad (2.6)$$

y se expresa en *decibeles* (dB). Por ejemplo, una atenuación  $A = -20$  dB se corresponde con una tensión de salida que es 10 veces inferior a la de entrada, esto es, con  $T = 0.1$ .

Para el caso del filtro RC pasabajos resulta

$$A(\omega) = -10 \log_{10} [1 + (\omega/\omega_0)^2] \text{ dB} \quad (2.7)$$

y pueden verificarse el siguiente límite y asíntota

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = 0 \text{ dB} \quad (2.8)$$

$$A(\omega) \sim -20 \log_{10}(\omega/\omega_0) \text{ dB} \quad \text{para} \quad \omega \gg \omega_0 \quad (2.9)$$

La asíntota indica que para frecuencias  $\omega \gg \omega_0$ , la atenuación **decrece a una razón constante de 20 dB por década**<sup>1</sup>. Esta pendiente es una medida de la calidad del circuito para actuar como filtro. Cuanto mayor sea el módulo de dicha pendiente, mayor será la capacidad del filtro para discriminar frecuencias.

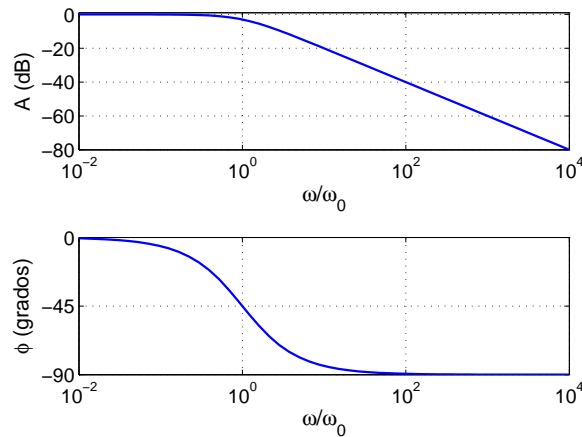


Figura 2.3: Diagrama de Bode para un filtro RC pasabajos. Notar que para  $\omega \gg \omega_0$  la atenuación decrece a una razón constante de 20 dB por década.

En el caso del filtro que nos ocupa, a la región  $\omega \ll \omega_0$  se la denomina banda pasante (dado que  $A \approx 0$ , es decir,  $T \approx 1$ ), y a la región  $\omega \gg \omega_0$  se la denomina banda rechazada.

Obsérvese además que en la banda pasante es  $\phi \approx 0$  por lo que resulta que la señal de salida es prácticamente igual a la de entrada (el filtro no atenúa ni defasa).

La frecuencia  $\omega_0$  se denomina **frecuencia de corte**, se denota también  $\omega_c$ , y para ella resulta

$$A(\omega_c) = -3,01 \text{ dB} \quad \phi(\omega_c) = -45^\circ \quad (2.10)$$

y es además la frecuencia para la cual se cortan las asíntotas horizontal y oblicua de la curva  $A$  en función de  $\log_{10}(\omega/\omega_0)$  (gráfico superior de la figura 2.3). De ello proviene su denominación.

<sup>1</sup>Se denomina década a cada intervalo de amplitud unidad en escala logarítmica, esto es, a cada intervalo en el que la magnitud de interés se incrementa en un factor 10 cuando se la mide en una escala lineal

Observe además, que para la frecuencia de corte resulta

$$T(\omega_c) = 1/\sqrt{2} \approx 0,7 \quad (2.11)$$

de modo que a dicha frecuencia, la amplitud de la tensión de salida del filtro decae al 70% de la de entrada.

## 2.2. RC pasaaltos

Considere el circuito de la figura 2.4

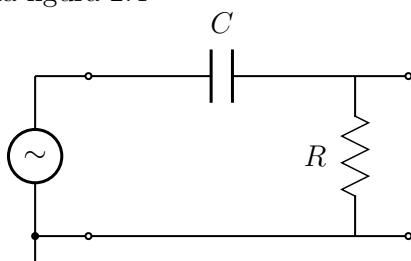


Figura 2.4: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular  $\omega$  alimenta a un cuadripolo RC que actúa como pasaaltos.

Verifique que la función transferencia,  $T$ , el desfase  $\phi$  y la atenuación  $A$  valen, respectivamente

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} \quad \phi = \arctan x^{-1} \quad A = -10 \log_{10}(1+x^{-2})} \quad (2.12)$$

siendo  $x = \omega/\omega_0 = \omega RC$ . Note que la frecuencia de corte coincide con la del caso anterior.

El diagrama de Bode se ilustra en la figura 2.5.

La banda pasante es ahora aquella tal que  $\omega \gg \omega_0$ , y en ella vale  $T \approx 1$ ,  $\phi \approx 0$  y  $A \approx 0$ . En la banda rechazada se tiene  $T \ll 1$ ,  $\phi \approx 90^\circ$ ,  $A \ll 1$ , y corresponde a  $\omega \ll \omega_0$ . Es el caso opuesto al del filtro anterior.

En la frecuencia de corte se tiene, nuevamente,

$$A(\omega_c) = -3,01 \text{ dB} \quad \phi(\omega_c) = -45^\circ \quad (2.13)$$

Obsérvese además que en la banda rechazada la atenuación varía nuevamente a una razón de 20 dB por década, por lo que este filtro es de la misma calidad que el anterior.

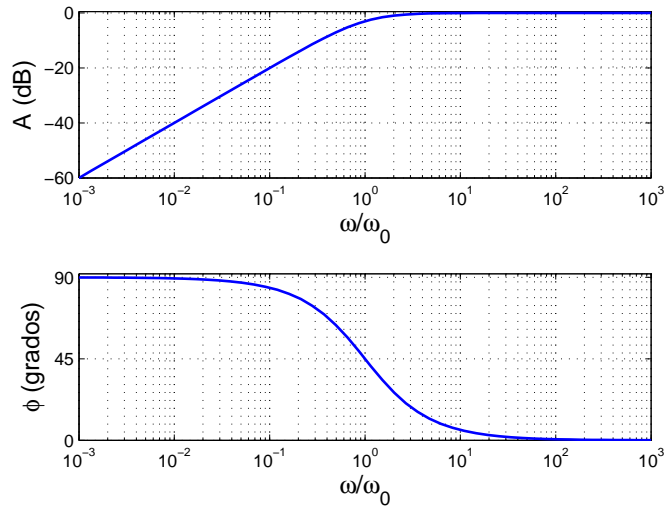


Figura 2.5: Diagrama de Bode para un filtro RC pasabajos. Notar que para  $\omega \ll \omega_0$  la atenuación crece a una razón constante de 20 dB por década.

### 2.3. RL pasabajos

Considere el circuito de la figura 2.6

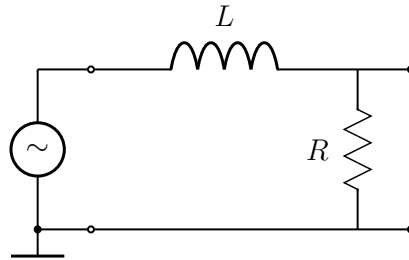


Figura 2.6: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular  $\omega$  alimenta a un cuádrupolo LR pasabajos.

Verifique que la función transferencia,  $T$ , el desfase  $\phi$  y la atenuación  $A$  son, respectivamente

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \phi = -\arctan x \quad A = -10 \log_{10}(1+x^2) \text{ dB}} \quad (2.14)$$

siendo  $x = \omega/\omega_0 = \omega L/R$ . De las ecuaciones expuestas se deduce que este circuito se comporta igual que el RC pasabajos, con la única salvedad de que ahora la frecuencia de corte es  $\boxed{\omega_0 = R/L}$ .

El diagrama de Bode coincide con el de la figura 2.3, y valen todas las consideraciones expuestas en la sección 2.1.

## 2.4. RL pasaaltos

Considere el circuito de la figura 2.7

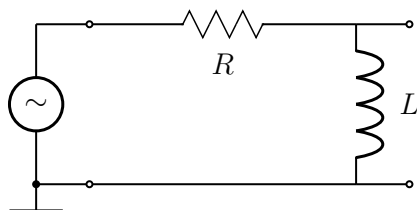


Figura 2.7: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular  $\omega$  alimenta a un cuádrupolo LR pasaaltos.

Verifique que la función transferencial,  $T$ , el desfase  $\phi$ , y la atenuación valen, respectivamente

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}} \quad \phi = \arctan x^{-1} \quad A = -10 \log_{10}(1+x^{-2})} \quad (2.15)$$

siendo  $x = \omega/\omega_0 = \omega L/R$ , que coincide con el caso RL pasabajos.

Se deduce que el circuito que nos ocupa se comporta igual que el RC pasaaltos, con la única salvedad de que la frecuencia de corte es, en este caso,  $\omega_0 = R/L$ .

El diagrama de Bode coincide con el de la figura 2.5, y valen todas las consideraciones expuestas en la sección 2.2.

## 2.5. Filtros de orden 2

### 2.5.1. Pasabajos LC

Considere el circuito de la figura 2.8

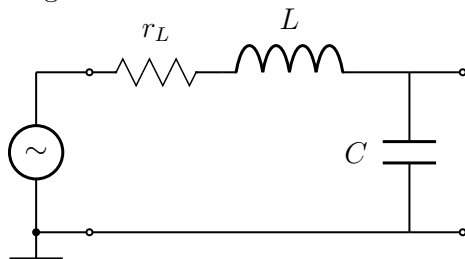


Figura 2.8: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular  $\omega$  alimenta a un cuádrupolo LC en el que se considera la resistencia interna,  $r_L$ , de la inductancia.

Verifique que la función transferencia,  $T$ , el defasaje  $\phi$  y la atenuación  $A$  son, respectivamente,

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2 p^2}} \quad \phi = -\arctan \frac{x p}{1-x^2} \quad A = -10 \log_{10} [(1-x^2)^2 + x^2 p^2] \text{ dB}} \quad (2.16)$$

siendo  $x = \omega/\omega_0 = \omega \sqrt{LC}$ , y  $p = r_l \sqrt{C/L}$ . La frecuencia de corte resulta en este caso

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (2.17)$$

El gráfico de la atenuación se ilustra en la figura 2.9.

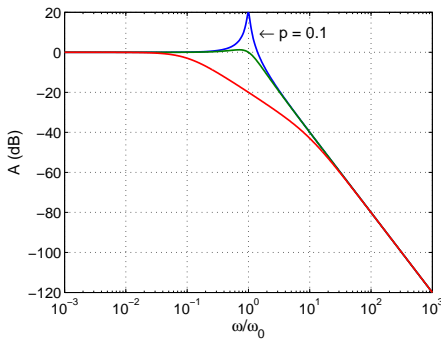


Figura 2.9: Diagrama de la atenuación para un filtro LC pasabajos en el que se considera la resistencia interna de la bobina (ecuación 2.16. Se ilustran los casos  $p = 0, 1, 1$  y  $10$ ). Nótese que para  $\omega \gg \omega_0$  la atenuación decrece a una razón de 40 dB por década.

### 2.5.2. Pasaaltos LC

Considere el circuito de la figura 2.10. Calcule la función transferencia,  $T$ , el defasaje  $\phi$  y la atenuación  $A$ , y demuestre que es un pasabajos.

### 2.5.3. Pasabanda y eliminabanda LC

Analice los circuitos de las figuras 2.11 y 2.12 y compruebe que se comportan como pasabanda y eliminabanda, respectivamente.

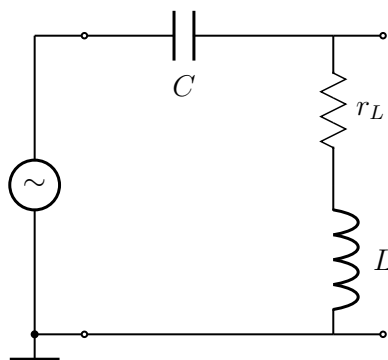


Figura 2.10: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular  $\omega$  alimenta a un cuádrupolo LC en el que se considera la resistencia interna,  $r_L$ , de la inductancia.

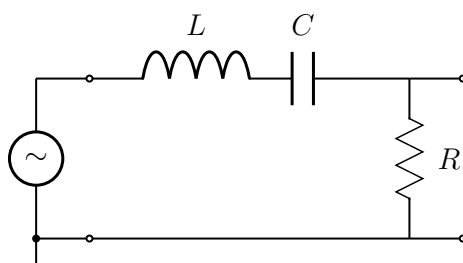


Figura 2.11: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular  $\omega$  alimenta a un cuádrupolo RLC que actúa como pasabanda.

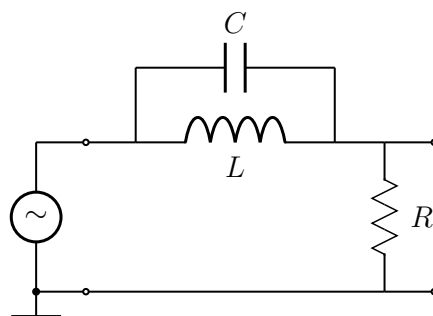


Figura 2.12: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular  $\omega$  alimenta a un cuádrupolo RLC que actúa como eliminabanda.

## 2.6. Preguntas

1. Cómo cree que deberían ser los diagramas de Bode correspondientes a filtros ideales de tipo: a) pasabajos, b) pasaaltos, c) pasabanda, y d) eliminabanda?
2. Alguien afirma que el desfase de un filtro ideal en la banda rechazada es  $\pm\pi/2$ . Es correcta la afirmación?
3. Dado el circuito RL pasabajos ilustrado en la figura 2.13, en el que incluye la resistencia interna de la bobina  $r_L$ ,
  - a) Trace conceptualmente el diagrama de Bode
  - b) Bajo qué condiciones puede despreciarse  $r_L$ ? No se limite a responder simple-



mente “ $r_L \rightarrow 0$ ”, porque eso no le será útil a la hora de interpretar resultados experimentales ni computacionales.

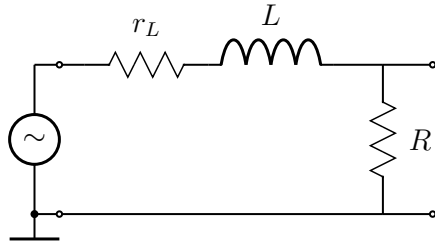


Figura 2.13: Un filtro  $RL$  en el que se considera la resistencia interna de la bobina. (Pregunta 3)

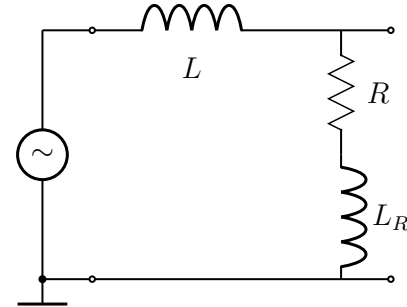


Figura 2.14: Un filtro  $RL$  en el que se considera la inductancia interna de la resistencia. (Pregunta 4)

4. Las resistencias reales presentan cierta inductancia espúrea,  $L_R$ , cuyo valor depende del modo en que fueron fabricadas. Bajo qué condiciones puede despreciarse dicha inductancia en un circuito como el de la figura 2.14?
5. Considere el “elemento” ilustrado en la figura adjunta. Bajo qué condiciones puede aproximárselo por:
  - a) una resistencia pura?
  - b) una inductancia pura?
6. En la Pág. 9 se definió la unidad imaginaria,  $j$ , expresando:  $j^2 = -1$ . Algunos autores definen, en cambio:  $j = \sqrt{-1}$ . En este último caso, qué opina de la siguiente cadena de igualdades?



$$1 = 1 \cdot 1 = \sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = j \cdot j = j^2 = -1$$

## 2.7. Parte computacional

Simule varios de los circuitos estudiados y obtenga los diagramas de Bode correspondientes. La simulación debe incluir la impedancia de salida de la fuente, la impedancia de entrada del osciloscopio y la resistencia intrínseca de las bobinas.

Conserve todas las simulaciones, porque podrán serle de utilidad cuando lleve a cabo la parte experimental.

## 2.8. Parte experimental

1. Arme cada uno de los filtros estudiados y mida las variables necesarias para graficar cada uno de los correspondientes diagramas de Bode.
  - Sugerencia para elegir los valores de  $R$ ,  $L$ , y/o  $C$ : Considere que las frecuencias  $f$  fácilmente explorables se encuentran en el rango

$$100 \text{ Hz} \leq f \leq 100 \text{ kHz} \quad (2.18)$$

tanto por las características de las fuentes, componentes y geometría de la disposición experimental que podrá armar, como por las de los osciloscopios disponibles. Observe además que cada filtro tiene una frecuencia de corte,  $\omega_0$ , y que resultará necesario explorar un intervalo de frecuencias que abarque al menos el rango

$$0,1 \omega_0 \leq 2\pi f \leq 10 \omega_0 \quad (2.19)$$

Observe además que la frecuencia de corte depende del producto o cociente de 2 componentes del cuadripolo ( $1/RC$ ,  $R/L$ , o  $1/\sqrt{LC}$ ), por lo que, en un primer análisis, parecería imposible seleccionar a alguno de los dos componentes por separado. Observe también que las impedancias de salida de la fuente y de entrada del osciloscopio imponen condiciones adicionales sobre los valores de  $R$ ,  $L$ , y/o  $C$ , que permiten determinar el orden de magnitud de uno de ellos, y en consecuencia, del otro.

2. (Importante) Determine experimentalmente las características del filtro pasaaltos que el osciloscopio le aplica a la señal que se inyecte en cualquiera de sus canales de entrada cuando estos se acoplan en modo AC.

Haga lo equivalente cuando se reduce manualmente el ancho de banda analógico del instrumento. Discuta las diferencias entre promediar varias señales (para reducir el grado en que el ruido afecta la señal, o dicho más adecuadamente, para mejorar la relación señal/ruido) y reducir el ancho de banda del instrumento.