Apéndice A

Medición de diferencias de fase

Dadas dos señales armónicas dependientes del tiempo

$$V_1 = V_{10}\cos\omega t \tag{A.1}$$

$$V_2 = V_{20}\cos(\omega t + \phi) \tag{A.2}$$

cuyos respectivos gráficos se ilustran en la figura A.1, buscamos un modo simple de obtener la diferencia de fase, ϕ, empleando un osciloscopio. Estudiaremos dos métodos sencillos en la siguiente sección.

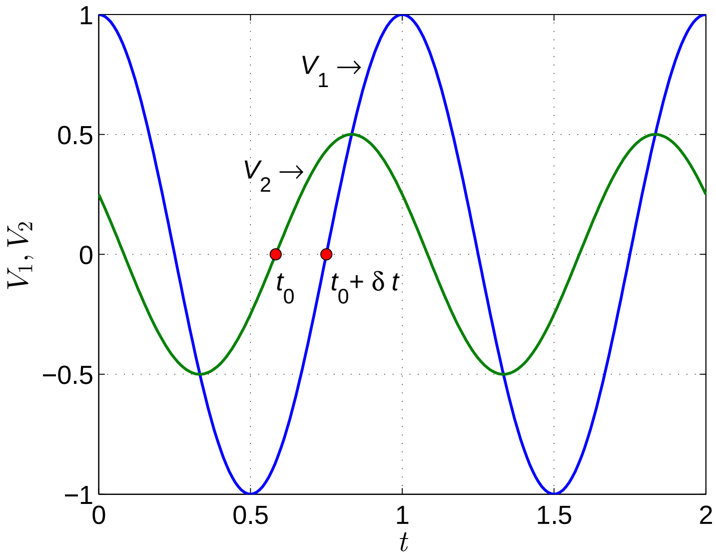

Figura A.1: *Ejemplo de dos señales armónicas defasadas, de igual frecuencia y diferente amplitud.*

Pregunta: Observando la figura A.1 es fácil determinar que para graficarla se eligió arbitrariamente $V_{10} = 1$ y $V_{20} = 0.5$. Qué valor se adoptó para ω?

A.1. Mediante figuras de Lissajous

Podemos considerar a las expresiones (A.1) y (A.2) como la representación paramétrica de una curva en el plano XY asociando V_1 y V_2 con las componentes x e y de dicha representación, de modo tal que se tiene

$$\begin{aligned} V_x &= V_{x0} \cos \omega t && \text{(A.3)} \\ V_y &= V_{y0} \cos(\omega t + \phi) && \text{(A.4)} \end{aligned}$$

cuyo gráfico se ilustra en la figura A.1,

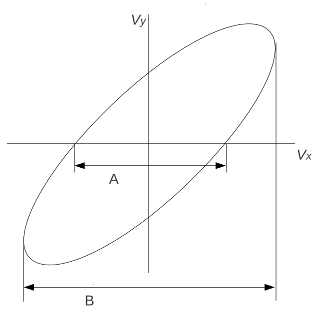

Figura A.2: *Figura de Lissajous para el caso de frecuencias iguales.*

Para los instantes t tales que $\omega t = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ resulta

$$V_x = \pm V_{x0} = \pm \frac{B}{2} \tag{A.5}$$

Para t tal que $\omega t + \phi = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$V_x = \pm V_{x0} \cos(\pi/2 - \phi) = \pm V_{x0} \operatorname{sen} \phi = \pm \frac{A}{2} \tag{A.6}$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen} \phi = \pm \frac{A}{B} \tag{A.7}$$

Puede demostrarse que también vale

$$\operatorname{sen} \phi = \pm \frac{C}{D} \tag{A.8}$$

donde C y D son los análogos a A y B, respectivamente, medidos sobre el eje V_y. De las ecuaciones anteriores resulta

$$\boxed{|\phi| = \operatorname{arc\,sen} \frac{A}{B} = \operatorname{arc\,sen} \frac{C}{D}} \tag{A.9}$$

A.2. Midiendo retrasos temporales

Sea t_0 un instante en el que: a) $V_2 = 0$ y b) V_2 cruza por cero con pendiente de signo dado, por ejemplo positivo, como el ilustrado en la figura A.1. La hipotesis a) conduce a la condición: $\cos(\omega t_0 + \phi) = 0$, lo que implica

$$\omega t_0 + \phi = \pi/2 + z_0 \pi \quad \text{con} \quad z_0 \in \mathbb{Z}$$

Pero si se incorpora la hipotesis b) corresponde escribir

$$\omega t_0 + \phi = \pi/2 + 2\, k_0\, \pi \quad \text{con} \quad k_0 \in \mathbb{Z} \tag{A.10}$$

dado que si bien la función $\cos(x)$ cruza por cero dos veces por período, lo hace sólo una vez, por período, con pendiente de signo dado.

Sea ahora δt el lapso más breve necesario para que V_1 cruce por cero con pendiente de igual signo al ya dado, esto implica

$$\omega(t_0 + \delta t) = \pi/2 + 2\, k_1\, \pi \quad \text{con} \quad k_1 \in \mathbb{Z} \tag{A.11}$$

De las condiciones (A.10) y (A.11) resulta

$$\phi = \omega\, \delta t + 2\ (k_0 - k_1)\ \pi = \omega\, \delta t + 2\, k\, \pi$$

con $k = k_0 - k1\ \in \mathbb{Z}$, de donde se concluye

$$\boxed{\phi = \omega\, \delta t} \tag{A.12}$$

pues $\cos(x + 2\, k\, \pi) = \cos(x)$.

A.3. Convención importante

Dadas las expresiones (A.1) y (A.2), se dice que la señal V_2 *adelanta* en ϕ a V_1.

Observación: Note que V_2 alcanza sus máximos, mínimos y ceros con igual pendiente, *antes* que V_1. Es por eso que se dice que V_2 *adelanta* a V_1.

A.4. Parte computacional

Ejecute el programa del cuadro A.1 en Matlab u Octave y ejercite lo siguiente

1. Mida el defasaje ϕ siguiendo los métodos estudiados en esta sección.

Ejemplo: Diferencias de fase

```
% Definimos el vector t, y calculamos Vx y Vy
t = [0:0.01:2];
Vx = cos(2*pi*t);
Vy = cos(2*pi*t + pi/6);

% Graficamos Vx y Vy en funcion del tiempo
figure(1)
plot(t,Vx,t,Vy)
grid on

% Graficamos la figura de Lissajous
figure(2)
plot(Vx,Vy)
grid on
```

Cuadro A.1: *El programa evalúa dos señales temporales armónicas defasadas, las grafica en función del tiempo e ilustra la correspondiente figura de Lissajous.*

2. Varíe el defasaje ϕ tanto en magnitud como en signo y observe los cambios en las figuras. Asegúrese de explorar el rango $0 \leq |\phi| \leq 2\pi$.

3. Verifique si sus conclusiones se modifican al cambiar cos por sen.

4. Pruebe variar la frecuencia relativa.

A.5. Preguntas

1. Debe estar centrada la elipse de la figura A.2 para medir A y B?
   Debe estar centrada sólo para medir A o sólo para medir B?

2. Deben estar centradas V_1 y V_2 para medir δt?

3. Cuáles son las ventajas relativas de cada uno de los dos métodos estudiados para medir ϕ?

4. Cuál de los dos métodos permite determinar ϕ con menor incerteza?

A.6. Problemas propuestos

1. Demuestre la validez de la expresión (A.8).

2. *a*) Demuestre que si $\phi > 0$, el punto (V_x, V_y) definido por las expresiones (A.3) y (A.4) recorre la elipse ilustrada en la figura A.1 en sentido horario.

   b) Cómo podría verificar esto en un osciloscopio?

3. La deducción de la expresión A.12 ($\phi = \omega\delta t$) se realizó considerando el retraso entre dos ceros consecutivos de ambas señales. Pudo haberse llegado a la misma conclusión estudiando de la misma manera el retraso entre dos máximos, dos mínimos, o cualquier otro par de puntos. Qué considera experimentalmente más ventajoso: medir el retraso entre dos ceros, dos máximos, o entre dos mínimos?

2016.c2
César Moreno, DF-FCEyN-UBA e INFIP-CONICET.