

# Capítulo 3

## Resonancia

### 3.1. Circuito RLC serie

Dado un circuito RLC serie alimentado por una fuente de tensión armónica  $V(t) = V_0 \text{ sen } \omega t$  (Fig 3.1), la ley de Ohm permite plantear:

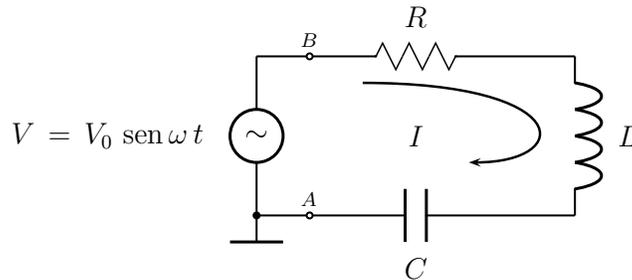


Figura 3.1: *Circuito RLC serie alimentado por una fuente de tensión armónica de amplitud  $V_0$  y frecuencia angular  $\omega$ .*

$$V = I Z_{AB} = I (R + Z_L + Z_C) = I [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] \quad (3.1)$$

donde  $V$  es la tensión aplicada por la fuente,  $I$  la corriente que circula por la malla,  $Z_{AB}$  la impedancia, vista desde la fuente, entre los puntos  $A$  y  $B$ ,  $Z_L$  y  $Z_C$  las impedancias de la bobina y el capacitor, respectivamente,  $\omega$  la frecuencia angular de la tensión armónica que aplica la fuente, y  $j$  la unidad imaginaria ( $j^2 = -1$ ).

Luego

$$|I| = \frac{|V|}{[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2}} \quad (3.2)$$

Puede verificarse que si

1.  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow X_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty$  y en consecuencia  $|I| \rightarrow 0$
2.  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow X_L = \omega L \rightarrow \infty$  y en consecuencia  $|I| \rightarrow 0$
3.  $\omega$  es tal que  $\omega L = 1/\omega C$ , resulta que la reactancia total  $X_T$ , es  $X_T = X_L - X_C = 0$ , con lo cual, para este circuito,  $|I|$  alcanza su valor máximo:  $|I|_{\text{Max}} = |V|/R$ . Esto ocurre para

$$\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}} \quad (3.3)$$

En la Fig 3.2 se expone el gráfico de  $I(\omega)$  para tres casos particulares de  $R$ ,  $L$  y  $C$ . La condición  $\omega = \omega_0$  para la cual  $X_T = 0$  define lo que se denomina resonancia del circuito. Se dice que un circuito está en resonancia (de fase) cuando la corriente que a él ingresa está en fase con la tensión que se le aplica. Obviamente cuando  $X_T = 0$ , resulta  $V = IR$  y consecuentemente el desfase entre  $V$  e  $I$  es nulo.

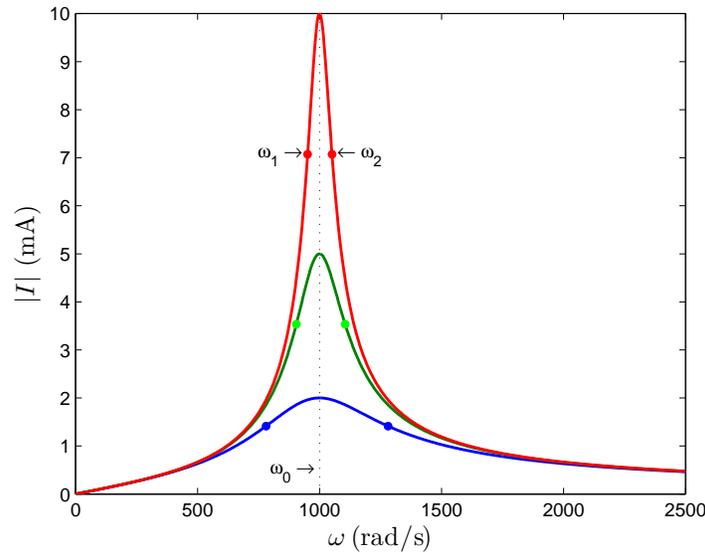


Figura 3.2: Amplitud de la corriente circulante por un circuito RLC serie alimentado por una fuente armónica de 1 V de pico en función de la frecuencia, para los casos:  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$  y  $R_3 = 500 \Omega$ . En los tres casos se mantuvo:  $L = 1 H$  y  $C = 1 \mu F$ , lo que implica  $\omega_0 = 1000$  (rad/s) para todos ellos. Se destacan en cada caso las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  que permiten definir los correspondientes anchos de banda  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  (ver texto).

Cuando  $\omega = \omega_0$  se tiene:

$$V_L(\omega_0) = j\omega_0 L \cdot I(\omega_0) = j\omega_0 L \cdot \frac{V}{R} = j \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot V \quad (3.4)$$

$$V_C(\omega_0) = -j/\omega_0 C \cdot I(\omega_0) = -j \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot V \quad (3.5)$$

luego  $V_L(\omega_0) + V_C(\omega_0) = 0$  para todo instante, y por tanto,

$$V_R(\omega_0) = V \quad (3.6)$$

En cuanto a las caídas de tensión eficaces sobre cada uno de los tres elementos de circuito, en resonancia, se tiene:

$$V_{L\text{ef}}(\omega_0) = \frac{|V_L(\omega_0)|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot V_{\text{ef}} \quad (3.7)$$

$$V_{C\text{ef}}(\omega_0) = V_{L\text{ef}}(\omega_0) \quad (3.8)$$

$$V_{R\text{ef}}(\omega_0) = V_{\text{ef}} \quad (3.9)$$

siendo  $V_{\text{ef}}$  la tensión eficaz aplicada por la fuente:  $V_0/\sqrt{2}$ . La potencia disipada por el circuito esta dada por

$$P(\omega) = I_{\text{ef}}^2(\omega) R = \frac{|I|^2}{2} R = \frac{V_{\text{ef}}^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} R \quad (3.10)$$

cuyo gráfico puede verse en la Fig 3.3 Una manera de caracterizar el ancho de la curva

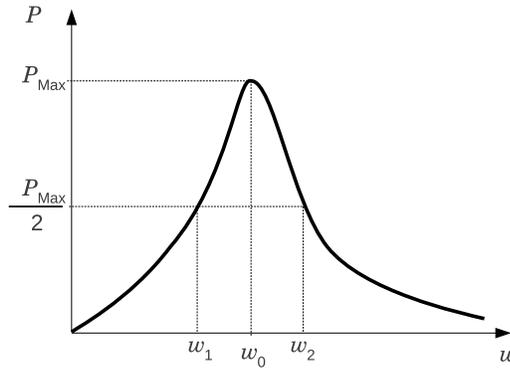


Figura 3.3: Potencia disipada en un circuito RLC serie en función de la frecuencia.

$P(\omega)$  es mediante las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para las cuales la potencia disipada se reduce a la mitad de la máxima. La condición:

$$P(\omega) = \frac{P_{\text{Max}}}{2} \quad (3.11)$$

conduce a una ecuación bicuadrática para  $\omega$ , cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} < \omega_0 & \omega_2 &= \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} > \omega_0 \\ \omega_3 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} < 0 & \omega_4 &= \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} < 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $\alpha = R/2L$ . Las 2 últimas carecen de sentido. Las 2 primeras permiten definir el ancho de la curva como:

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}} \quad (3.13)$$

al que también se denomina *ancho de banda* del circuito.

Para caracterizar la función  $P(\omega)$  se define:

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.14)$$

llamado *factor de mérito* o *de calidad*. Este número mide la *selectividad* del circuito para disipar potencia: si  $Q \rightarrow \infty$ , la curva  $P(\omega)$  se estrecha en torno a  $\omega_0$  y en consecuencia el circuito disipa potencia en un rango relativamente pequeño de frecuencias. A medida que  $Q \rightarrow 0$ , la curva se ensancha y la potencia se disipa en un rango cada vez más amplio de frecuencias (ver figura 3.4).

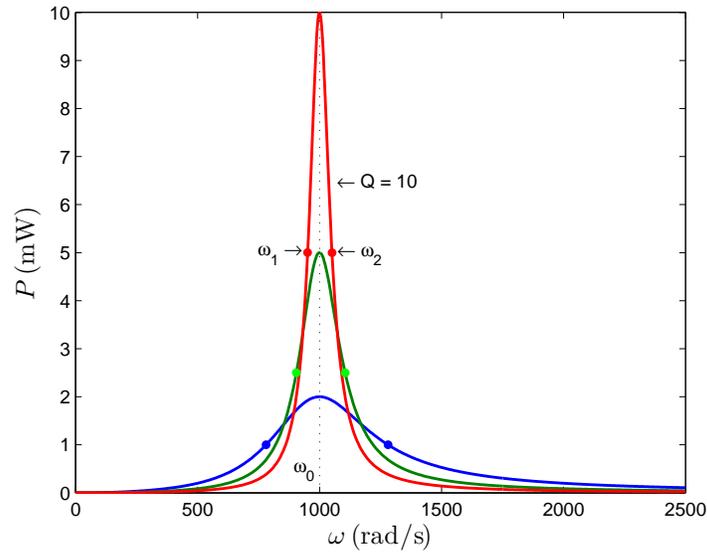


Figura 3.4: Potencia disipada en un circuito RLC serie alimentado por una fuente armónica de 1 V de pico en función de la frecuencia, para los casos ilustrados en la figura 3.2. Los factores de mérito correspondientes son  $Q = 10, 5$  y  $2$ .

Finalmente consideremos la impedancia de entrada del circuito RLC serie, vista por la fuente

$$|Z_{AB}(\omega)| = [R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2} \quad (3.15)$$

cuyo gráfico puede verse en la Fig 3.5. A frecuencias menores que la de resonancia ( $\omega < 1/\sqrt{LC}$ ) la reactancia capacitiva es mayor que la inductiva ( $1/\omega C > \omega L$ ), por lo tanto

$$X_T = X_L - X_C < 0 \quad (3.16)$$

y se dice que el circuito se comporta capacitivamente. A frecuencias  $\omega > \omega_0$ , resulta  $X_L > X_C \Rightarrow X_T > 0$  y se dice que el circuito se comporta inductivamente.

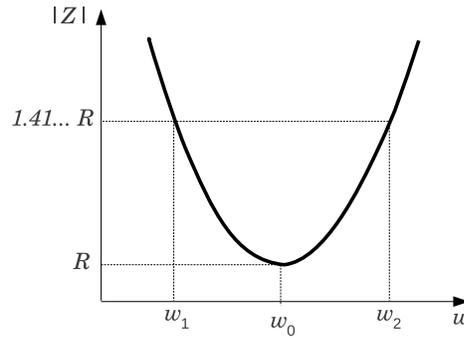


Figura 3.5: Impedancia de entrada de un circuito RLC serie en función de la frecuencia.

A la frecuencia de resonancia,  $X_L = X_C \Rightarrow X_T = 0$ , el circuito se comporta como una resistencia pura y además  $|Z_{AB}|$  es mínima.

Como

$$P = I_{\text{ef}}^2 R = \frac{V_{\text{ef}}^2 R}{|Z_{AB}|^2} \quad (3.17)$$

se demuestra fácilmente que las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de potencia mitad corresponden a la condición:

$$|Z_{AB}(\omega)| = \sqrt{2} R = \sqrt{2} |Z_{AB}(\omega)|_{\text{min}} \quad (3.18)$$

## 3.2. Circuito RLC paralelo

Considere el circuito de la figura 3.6. La frecuencia de resonancia de fase,  $\omega_{0\parallel}$ , vale

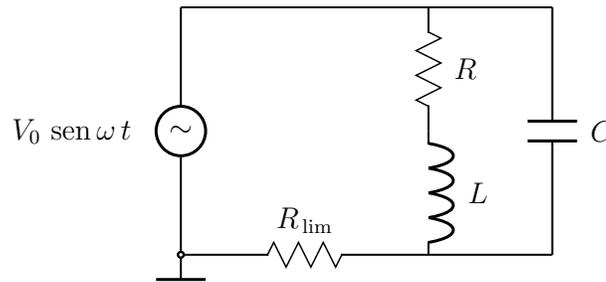


Figura 3.6: Una fuente de onda armónica de frecuencia angular  $\omega$  alimenta a un circuito RLC paralelo en el que se considera una resistencia limitadora,  $R_{\text{lim}}$ .

$$\omega_{0\parallel} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} = \omega_0 \sqrt{1 - Q^{-2}} \quad (3.19)$$

donde  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  es la frecuencia de resonancia del circuito RLC serie, y  $Q$  es el factor de mérito ya estudiado. Note que  $\omega_{0\parallel}$  es independiente de la resistencia limitadora  $R_{\text{lim}}$ , y que tiende a  $\omega_0$  por la izquierda a medida que  $R \rightarrow 0$ .

La impedancia,  $Z_{\parallel}$ , del paralelo RLC propiamente dicho, esto es, excluyendo  $R_{\text{lim}}$ , satisface

$$|Z_{\parallel}|^2 = \frac{1}{\omega^2 C^2} \frac{(R^2 + \omega^2 L^2)}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (3.20)$$

Puede verificarse que

$$\lim |Z_{\parallel}| = \begin{cases} R & \text{si } \omega \rightarrow 0 \\ 0 & \text{si } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.21)$$

y que en resonancia,

$$|Z_{\parallel}(\omega_{0\parallel})| = Q^2 R = \frac{1}{R} \frac{L}{C} \quad (3.22)$$

### Observaciones

1. De la ecuación (3.22) se concluye que la impedancia de un circuito RLC paralelo en resonancia ( $\omega = \omega_{0\parallel}$ ) puede ser infinita si, por ejemplo,  $R \rightarrow 0$  manteniendo  $L$  y  $C$  finitos; o bien, expresado con mayor propiedad: dicha impedancia, en módulo, puede ser ilimitada si, por ejemplo,  $R$  es arbitrariamente menor que  $\sqrt{L/C}$ .
2. Si se armase un circuito RLC paralelo en las condiciones de la observación anterior:  $\omega = \omega_{0\parallel}$  y  $R \ll \sqrt{L/C}$ , la corriente que ingresaría al paralelo sería prácticamente nula (aún si  $R_{\text{lim}} \rightarrow 0$ ) a pesar de que dicha corriente tiene dos ramas en paralelo por las que puede circular, y de que cada una de las ramas por separado presenta una impedancia finita !.

## 3.3. Potencia en circuitos de corriente alterna

La potencia instantánea,  $p(t)$ , entregada por una fuente a un circuito pasivo genérico como el de la figura 3.7 es

$$p(t) = v(t) i(t) \quad (3.23)$$

Si el circuito pasivo es lineal e independiente del tiempo y  $v(t)$  es armónica de frecuencia  $\omega$ ,  $i(t)$  resultará también armónica de la misma frecuencia y en general presentará un desfase  $\phi$  respecto de  $v(t)$ , luego:

$$p(t) = v_0 \cos \omega t \quad i_0 \cos(\omega t - \phi) \quad (3.24)$$

$$= \frac{v_0 i_0}{2} [\cos(2\omega t - \phi) + \cos \phi] \quad (3.25)$$

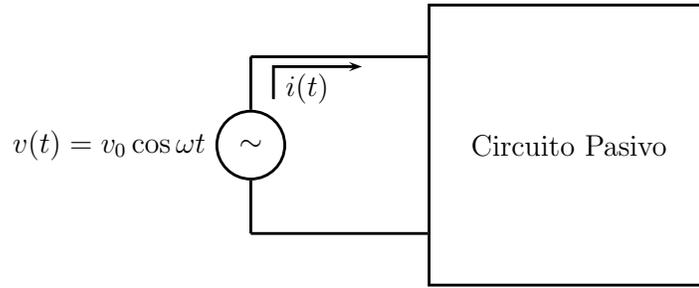


Figura 3.7: Un circuito pasivo genérico es alimentado por una fuente de tensión armónica.

El valor medio temporal de  $p(t)$  es

$$P \equiv \langle p(t) \rangle_t = \frac{v_0 i_0}{2} \cos \phi \quad (3.26)$$

dato que el valor medio temporal, en un número entero de períodos de  $\cos(2\omega t - \phi) = 0$ , por ser función armónica de  $t$  y que  $\langle \cos \phi \rangle_t = \cos \phi$  por ser  $\phi$  constante. Nótese que  $P$  es en general no nulo. En la figura 3.8 se ilustra el gráfico de  $p(t)$  y de su valor medio  $P$ .

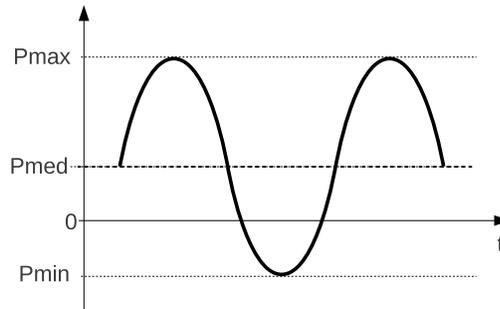


Figura 3.8: Potencia disipada en un circuito pasivo alimentado por tensión alterna. Note que dicha potencia puede ser negativa durante ciertos intervalos de tiempo.

El ángulo  $\phi$  es el argumento de la impedancia compleja  $Z$  (ver Fig. 3.9), luego

$$P = v_e i_e \cos \phi = i_e |Z| i_e \cos \phi \quad (3.27)$$

$$= i_e^2 \Re\{Z\} = i_e^2 R = I_e^2 R \quad (3.28)$$

### 3.4. Preguntas

1. Cuáles son los componentes mínimos de un circuito eléctrico para que presente resonancia?

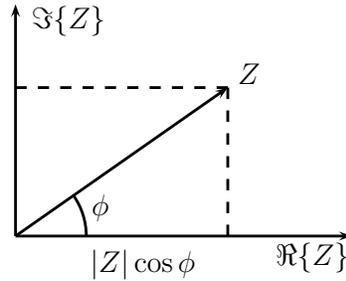


Figura 3.9: Representación de la impedancia  $Z$  en el plano complejo. La parte imaginaria de  $Z$  puede ser positiva o negativa.

2. Cree que puede haber circuitos que presenten más de una resonancia?
3. Puede haber circuitos RLC que no presenten resonancia?
4. Basándose en su experiencia (adquirida al trabajar con filtros, por ejemplo) qué cree que limita la posibilidad de construir circuitos RLC serie con factores de mérito arbitrariamente grandes?
5. a) Cómo explica la observación 2 de la Pág. 24?. b) Es correcto lo que allí se afirma?. c) Si fuese correcto, qué grado de validez tiene la afirmación, muy difundida, por cierto, de que la resistencia equivalente de un paralelo de resistencias es menor que la menor de ellas?

### 3.5. Parte computacional

Simule un circuito RLC serie y uno paralelo. Realice un análisis en frecuencia de cada uno de ellos e interprete los resultados. Asegúrese de utilizar, entre otros, valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$  disponibles en el laboratorio y de que las tensiones y corrientes de interés puedan ser provistas y medidas por las fuentes y osciloscopios disponibles, respectivamente. En su análisis incluya la impedancia interna de la fuente, la resistencia interna de la bobina y la impedancia de entrada del osciloscopio.

### 3.6. Parte experimental

1. Arme un circuito RLC serie con valores basados en la simulación del punto anterior. Mida las variables necesarias para graficar el diagrama de Bode, determine el ancho de banda del circuito, su factor de calidad y estudie la disipación de potencia. Explore al menos tres valores de  $Q$  y demuestre experimentalmente que **en resonancia, la amplitud de la caída de tensión sobre  $L$  o  $C$  puede ser mayor que la amplitud de la tensión aplicada por la fuente.**

2. Arme un circuito RLC paralelo basado en sus simulaciones.
  - Estudie todos los conceptos análogos al caso anterior.
  - Verifique experimentalmente que dadas  $L$  y  $C$ , existe cierto valor umbral de  $R$  por encima del cual es imposible que haya resonancia (guíese por la ecuación 3.19).
  - Verifique (o refute) experimentalmente la validez de las afirmaciones expresadas en la observación 2 de la pág. 24.

2014.v1

César Moreno, Departamento de Física-FCEyN-UBA e INFIP-CONICET.