

LECTURE 6

Modelos Unidimensionales de Espines

7.1. Modelo XY

En la clase anterior introdujimos la transformación de Jordan-Wigner. En esta clase resolveremos dos modelos unidimensionales de espines interactuantes haciendo uso de esta transformación. El primer Hamiltoniano que consideraremos es el que se conoce como “modelo XY” dado que la interacción de intercambio entre espines solo afecta a las componentes x e y de cada espín:

$$(7.1) \quad \mathcal{H}_{xy} = J \sum_j (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y) - g\mu_B B \sum_j S_j^z.$$

Por otro lado consideraremos el caso de una cadena de espines $S = 1/2$. Hamiltonianos de este tipo aparecen como consecuencia de una fuerte anisotropía inducida por un campo externo o por la interacción relativista de espín-órbita que acopla los grados de libertad de espín con los grados de libertad orbitales. Si bien aquí no daremos una derivación detallada de \mathcal{H}_{xy} es importante tener en cuenta que este Hamiltoniano describe muchas situaciones reales de aislantes de Mott cuasi unidimensionales. El segundo término corresponde a la interacción de Zeeman entre un campo magnético externo en la dirección z y la magnetización total en la misma dirección. La constante μ_B es el magnetón de Bohr y g es el factor giromagnético. $g\mu_B$ es entonces el factor de proporcionalidad entre momento angular y momento magnético.

Veamos ahora qué ocurre cuando usamos la transformación de Jordan-Wigner (6.14) para reescribir \mathcal{H}_{xy} en función de variables fermiónicas:

$$(7.2) \quad \mathcal{H}_{xy} = t \sum_j (c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j) - \mu \sum_j (n_j - \frac{1}{2}).$$

Sorprendentemente el Hamiltoniano (7.1) de espines interactuantes en una dimensión se mapea en un modelo de fermiones *libres* y sin espín donde el hopping y el potencial químico están relacionados con la constante de intercambio y el campo externo:

$$(7.3) \quad t = \frac{J}{2}, \quad \mu = g\mu_B B.$$

La gran ventaja es que en la nueva representación fermiónica \mathcal{H}_{xy} se diagonaliza trivialmente. Los autoestados correspondientes son determinantes de Slater de estados de una partícula con momento lineal definido. Tales estados son creados por los operadores:

$$(7.4) \quad a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{ikj} c_j^\dagger$$

Al reescribir el Hamiltoniano (7.2) en función de estos nuevos operadores obtenemos:

$$(7.5) \quad \mathcal{H}_{xy} = \sum_k (\epsilon_k - \mu) a_k^\dagger a_k.$$

Los autoestados de \mathcal{H}_{xy} son entonces productos de la forma:

$$(7.6) \quad \prod_{1 \leq k \leq N_\uparrow} a_{k_j}^\dagger |0\rangle$$

donde el vacío de fermiones, $|0\rangle$, corresponde al estado en que todos los espines están polarizados en la dirección $-\hat{z}$. De acuerdo con la transformación (6.14), la creación de cada fermión da vuelta un espín. Por tal motivo el número total de fermiones, N_e , coincide con el número de espines up N_\uparrow (espines polarizados en la dirección \hat{z}). En otras palabras, tal como lo indica la tercera línea de la ecuación (6.14), el número total de fermiones se mapea, a menos de una constante, en la magnetización total en la dirección \hat{z} .

Como vimos en la clase anterior, los operadores c_j^\dagger crean solitones en el plano xy que están centrados en el sitio j . Correspondientemente, los operadores a_k^\dagger crean solitones con momento lineal k definido. Por lo tanto, el modelo XY se puede interpretar como un gas de solitones libres. Hay varias observaciones que surgen de haber aplicado la transformación de Jordan-Wigner. La primera es la ausencia de cualquier tipo de orden en el estado fundamental. Notemos que el estado fundamental es un mar de Fermi donde los estados k están ocupados hasta el nivel de Fermi determinado por μ . Este estado fundamental es único. Por lo tanto no hay ninguna simetría que se haya roto espontáneamente a temperatura zero. En su lugar es sencillo comprobar que el estado fundamental de \mathcal{H}_{xy} corresponde a un

punto crítico, es decir, que varios correladores decaen con una ley de potencias. Como ejemplo consideremos en correlador entre dos puntos $\langle S_j^z S_{j+x}^z \rangle$. Usando la transformación de Jordan-Wigner tenemos que:

$$(7.7) \quad S_j^z S_{j+x}^z = n_j n_{j+x} - \frac{(n_j + n_{j+x})}{2} + \frac{1}{4}.$$

Por otro lado, el estado fundamental de \mathcal{H}_{xy} es

$$(7.8) \quad |\Psi_0\rangle = \prod_{|k| < k_F} a_k^\dagger |0\rangle.$$

con $k_F = n\pi$ y $n = N_\uparrow/N$ (número medio de fermiones por sitio). En un formalismo gran canónico como el que estamos usando k_F queda determinado por el potencial químico μ :

$$(7.9) \quad 2t \cos k_F = \mu.$$

Claramente, para calcular el correlador $\langle \Psi_0 | S_j^z S_{j+x}^z | \Psi_0 \rangle$ es conveniente expresar $n_j n_{j+x}$ en función de los operadores de creación y destrucción con momento lineal definido. Usando la ecuación (7.4) obtenemos:

$$(7.10) \quad n_j n_{j+x} = \frac{1}{N^2} \sum_{kqk'q'} c_k^\dagger c_{k'} c_q^\dagger c_{q'} e^{i(k-k')j} e^{i(q-q')(j+x)}$$

Usando las ecuaciones (7.8) y (7.10), obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | n_j n_{j+x} | \Psi_0 \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{kq} \langle \Psi_0 | [n_k n_q + e^{i(q-k)x} n_k (1 - n_q)] | \Psi_0 \rangle \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{kq} \langle \Psi_0 | n_k n_q (1 - e^{i(q-k)x}) | \Psi_0 \rangle, \\ &= n^2 - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-k_F}^{k_F} \int_{-k_F}^{k_F} dq dk e^{i(q-k)x}, \\ (7.11) \quad &= n^2 - \frac{1}{\pi^2 x^2} (1 - \cos 2k_F x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | S_j^z S_{j+x}^z | \Psi_0 \rangle &= (n - 1/2)^2 - \frac{1}{\pi^2 x^2} (1 - \cos 2k_F x) \\ (7.12) \quad &= (\langle \Psi_0 | S_j^z | \Psi_0 \rangle)^2 - \frac{1}{\pi^2 x^2} (1 - \cos 2k_F x). \end{aligned}$$

Por último es interesante analizar las excitaciones de baja energía que en el lenguaje fermiónico corresponden a excitaciones partícula-hueco alrededor del nivel de Fermi tal como lo indica la figura 1a. El momento lineal de una excitación elemental es la diferencia entre el momento inicial y final de la partícula: $k = k_f - k_i$. Para excitaciones de bajas energías k es muy

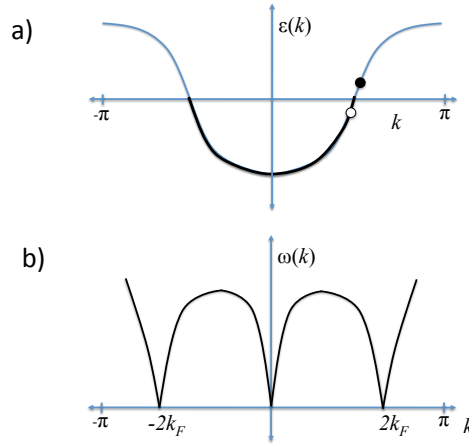


Figure 1. a) Energía en función del momento k para el modelo XY. La línea gruesa indica los estados de una partícula que están ocupados en el estado fundamental de \mathcal{H}_{xy} para el caso $\mu = 0$. Los círculos lleno y vacío indican la partícula y el hueco que se crean en una excitación elemental de \mathcal{H}_{xy} b) Relación de dispersión $\omega(k)$ de las excitaciones elementales.

cercano a zero o a $2k_F$. Claramente la relación de dispersión alrededor de cualquiera de estos dos puntos es lineal y la pendiente es igual a la velocidad de Fermi $v_F = \partial\epsilon_k/\partial k|_{k=k_F}$ como se muestra en la figura 1b. Como ya sabemos estas excitaciones dan lugar a un calor específico que es lineal en T para $T \ll J$.

Exercise 24. Calcular el calor específico del modelo \mathcal{H}_{xy} para $T \ll J$ y $B = 0$. Qué ocurre con la dependencia en temperatura del calor específico para $|g\mu_B B| = J$ y para $|g\mu_B B| > J$?

Exercise 25. El modelo \mathcal{H}_{xy} es invariante ante inversión temporal, $S_j \rightarrow -S_j$ y $B \rightarrow -B$. Cuál es la transformación correspondiente de los operadores fermiónicos c_j^\dagger y c_j deja invariante el \mathcal{H}_{xy} ?

Exercise 26. El modelo \mathcal{H}_{xy} es invariante ante una rotación global de los espines alrededor del eje z . Cuál es la transformación simetría correspondiente para la versión fermiónica de \mathcal{H}_{xy} ? Cuál es la cantidad conservada asociada con dicha simetría?