

## LECTURE 8

### Teoría de Ondas de Espín

#### 9.1. Representacion de Holstein Primakoff

En las clases anteriores vimos que para sistemas unidimensionales es común encontrar defectos topológicos (solitones) como excitaciones de baja energía. El operador que crea tales excitaciones contiene un producto de transformaciones sobre un número infinito de sitios (cuando el número total de sitios  $N \rightarrow \infty$ ), es decir, es altamente no local. Esto significa que la excitación en cuestión produce un cambio macroscópico respecto del estado fundamental. En esta clase veremos que esta propiedad cambia cualitativamente en sistemas de dimension  $d > 1$ . Normalmente las excitaciones de baja energía de tales sistemas corresponden a cambios locales (rotación de un espín en algún sitio) que se propagan con un cierto vector de onda  $k$ . A estas excitaciones se las conoce como *ondas de espín* o *magnones*. Existen diferentes caminos para derivar estas excitaciones de baja energía. Aquí seguiremos el camino que condujo por primera vez al hallazgo de las mismas. Para ello necesitamos introducir una nueva representación de los operadores de espín que se conoce como *representación de Holstein-Primakoff*.

El orden magnético más común en  $d > 1$  corresponde a fases en que el espín de cada sitio apunta en valor medio en alguna dirección particular  $\langle \mathbf{S}_r \rangle \neq 0$ . Es natural entonces describir la dinámica de estas fases ordenadas a partir de pequeñas fluctuaciones respecto del valor de expectación. Este es el espíritu de la teoría de ondas de espín. Para implementar esta aproximación, Holstein y Primakoff introdujeron un operador bosónico  $b$  que da

lugar a la siguiente representación de los operadores de espín:

$$(9.1) \quad \begin{aligned} S_{\mathbf{r}}^+ &= \sqrt{2S - n_{\mathbf{r}}} b_{\mathbf{r}}, \\ S_{\mathbf{r}}^- &= b_{\mathbf{r}}^\dagger \sqrt{2S - n_{\mathbf{r}}}, \\ S_{\mathbf{r}}^z &= -n_{\mathbf{r}} + S, \end{aligned}$$

con  $n_{\mathbf{r}} = b_{\mathbf{r}}^\dagger b_{\mathbf{r}}$ . Usando que  $[b_{\mathbf{r}}, b_{\mathbf{r}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$ , es simple verificar que los operadores de espín satisfacen la relaciones de conmutación correspondientes al álgebra  $\text{su}(2)$ :

$$(9.2) \quad [S_{\mathbf{r}}^\mu, S_{\mathbf{r}'}^\mu] = i\epsilon^{\mu\nu\eta} S_{\mathbf{r}}^\eta \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'},$$

Está claro que el espacio de Fock del operador  $b_{\mathbf{r}}$  tiene dimensión más alta que la requerida ya que la dimensión del espacio de Hilbert local asociado con un espín  $S$  es  $2S + 1$ . El subespacio de estados espurios generados por los autoestados  $n$  con autovalor mayor que  $2S$  se elimina con un proyector  $P_S$ . Sin embargo, es simple verificar que el subespacio de estados físicos (subespacio  $\mathcal{S}$  generado por los autoestados de  $n$  con autovalor menor o igual que  $2S$ ) es un subespacio invariante de los operadores de espín definidos por la ec.(9.2). En otras palabras, los operadores (9.2) no conectan estados del espacio físico (o estados en  $\mathcal{S}$ ) con estados no físicos (o estados en  $\mathcal{S}^\perp$ ). Es por este motivo que no hemos incluido explícitamente el operador  $P_S$  en la ec.(9.2). Sin embargo, es importante tener en cuenta que los operadores que aparecen a la derecha de las igualdades (9.2) están proyectados sobre el subespacio  $\mathcal{S}$  o espacio de estados físicos.

Las raíces cuadradas que aparecen en la ec.(9.2) se pueden expandir en potencias de  $1/S$ ,

$$(9.3) \quad \sqrt{2S - n_{\mathbf{r}}} = \sqrt{2S} \left( 1 - \frac{n_{\mathbf{r}}}{2S} - \frac{n_{\mathbf{r}}^2}{32S^2} + \dots \right).$$

Esto es lo que se conoce como expansión semiclásica de las fluctuaciones de espín alrededor del eje  $z$ . Insertando esta expansión en el Hamiltoniano de espín y despreciando los términos de orden mayor que el cuadrático en los operadores  $b_{\mathbf{r}}^\dagger$  y  $b_{\mathbf{r}}$  se obtiene un Hamiltoniano no interactuante conocido como “Hamiltoniano de ondas de espín”. Los términos de orden mayor que el cuadrático introducen interacciones entre las ondas de espín o excitaciones elementales de un estado con orden magnético usual.

## 9.2. Teoría de ondas de espín Ferromagnéticas

Comencemos con el caso de un Hamiltoniano de Heisenberg ferromagnético con interacción de intercambio entre primeros vecinos y definido sobre una

red de Bravais de sitios con coordenadas  $\mathbf{r}$ :

$$(9.4) \quad \mathcal{H} = -|J| \sum_{\langle \mathbf{r}\mathbf{r}' \rangle} \mathbf{S}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{r}'},$$

donde  $\langle \mathbf{r}\mathbf{r}' \rangle$  indica que  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  son primeros vecinos. Cualquier estado totalmente polarizado es estado fundamental de  $\mathcal{H}$ . Por lo tanto, el conjunto de estados fundamentales se puede parametrizar en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  de coordenadas esféricas. Por ejemplo, para el caso de  $S = 1/2$ , estos estados fundamentales son

$$(9.5) \quad |\Psi_{\theta,\phi}\rangle = \prod_j (e^{i\phi/2} \cos \theta/2 |\uparrow\rangle_j + e^{-i\phi/2} \cos \theta/2 |\downarrow\rangle_j).$$

Para verificar que cualquiera de estos estados es estado fundamental de  $\mathcal{H}$  simplemente notamos que  $\langle \Psi_{\theta,\phi} | \mathcal{H} | \Psi_{\theta,\phi} \rangle = -|J|/4$  y  $1/4$  es el máximo autovalor del operador  $\mathbf{S}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{r}'}$  para  $S = 1/2$ . Al reemplazar los operadores de espín en  $\mathcal{H}$  por su representación de Holstein-Primakoff obtenemos:

$$(9.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{H} &= -S^2 |J| Nz/2 - 2|J| \sum_{\langle \mathbf{r}\mathbf{r}' \rangle} (S b_{\mathbf{r}}^\dagger \sqrt{1 - n_{\mathbf{r}}/2S} \sqrt{1 - n_{\mathbf{r}'}/2S} b_{\mathbf{r}'} \\ &- \frac{1}{2} S (n_{\mathbf{r}} + n_{\mathbf{r}'}) + \frac{1}{2} n_{\mathbf{r}} n_{\mathbf{r}'}), \end{aligned}$$

donde  $z$  es el número de coordinación de la red o número de primeros vecinos y  $N$  es el número total de sitios (supondremos que la red tiene condiciones periódicas de contorno). Expandiendo la raíz cuadrada como hicimos en (9.3) y quedándonos con los términos de orden no mayor que  $1/S^0$ , obtenemos

$$(9.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{H} &\simeq -S^2 |J| Nz/2 + H_1 + H_2 + \mathcal{O}(1/S), \\ H_1 &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, \\ H_2 &= \frac{|J|}{4} \sum_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} [b_{\mathbf{r}}^\dagger b_{\mathbf{r}'}^\dagger (b_{\mathbf{r}} - b_{\mathbf{r}'})^2 + (b_{\mathbf{r}}^\dagger - b_{\mathbf{r}'}^\dagger)^2 b_{\mathbf{r}} b_{\mathbf{r}'}], \end{aligned}$$

donde

$$(9.8) \quad a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} b_{\mathbf{r}}$$

y

$$(9.9) \quad \omega_{\mathbf{k}} = S|J|z \left(1 - \frac{1}{z} \sum_{\boldsymbol{\eta}} e^{i\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{k}}\right) \equiv S|J|z(1 - \gamma_{\mathbf{k}}).$$

La variable  $\boldsymbol{\eta}$  corre sobre todos los vectores que conectan un sitio dado con sus primeros vecinos.  $H_1$  describe ondas de espín no interactuantes con

relación de dispersión  $\omega_{\mathbf{k}}$ .  $H_2$  y los términos de orden más elevado describen interacciones entre las ondas de espín que pueden ser incorporados por medio de la teoría de perturbaciones o con aproximaciones de campo medio. Es claro a partir de la ec.(9.7) que la energía del estado fundamental coincide con el valor correspondiente a un sistema de espines clásicos con módulo  $S$ :

$$(9.10) \quad E_0 = -S^2 |J| N z / 2.$$

En el límite de longitud de onda larga  $|\mathbf{k}| \ll 1$ , la energía de las ondas de espín ferromagnéticas se anula cuadráticamente en  $\mathbf{k}$

$$(9.11) \quad \omega_{\mathbf{k}} \simeq S |J| |\mathbf{k}|^2.$$

Este es el modo “gapless” de Goldstone que aparece como consecuencia de la ruptura de una simetría continua. Las excitaciones correspondientes a este modo de Goldstone dominan las propiedades de baja temperatura y de largas longitudes de onda del ferromagneto. Por ejemplo, el valor medio de la magnetización en función de la temperatura está dado por:

$$(9.12) \quad m = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}} \langle S_{\mathbf{r}} \rangle = S - \langle n_{\mathbf{r}} \rangle = S - \sum_{\mathbf{k}} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle,$$

donde  $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$  es el número de ocupación de bosones para una teoría de bosones no interactuantes (recordemos que hemos despreciado  $H_2$  y términos de orden superior):

$$(9.13) \quad \langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\omega_{\mathbf{k}}/k_B T} - 1}.$$

Para obtener el comportamiento asintótico de bajas temperaturas de la suma (9.12) introduciremos el “cut-off” infrarrojo  $k_0$ . Por otro lado introduciremos también un momento  $\bar{k} \gg k_0$  que corresponde al valor máximo del módulo de  $k$  para el que la ec.(9.11) es todavía una buena aproximación. Supondremos entonces que

$$(9.14) \quad \omega_{\bar{k}} \ll k_B T \ll J |S|.$$

Como siguiente paso partiremos la suma de (9.12) en dos regiones:  $k_0 < k = |\mathbf{k}| < \bar{k}$  (con  $k = |\mathbf{k}|$ ) y  $k \geq \bar{k}$ :

$$(9.15) \quad m = S - \int_{k_0}^{\bar{k}} \frac{dk k^{d-1}}{(2\pi)^d} \frac{T}{J S k^2} - \frac{1}{N} \sum_{k > \bar{k}} \frac{1}{e^{\omega_{\mathbf{k}}/k_B T} - 1}.$$

La primera integral diverge para  $T > 0$  y  $d = 1, 2$  cuando  $k_0 \rightarrow 0$

$$(9.16) \quad \begin{cases} -\frac{t}{k_0} + \dots & d = 1, \\ t \ln k_0 + \dots & d = 2 \end{cases}$$

donde  $t = T/(JS)$ . La segunda suma de la ec.(9.15) es finita y por lo tanto no afecta la singularidad infraroja que aparece en la primera. La conclusión más importante que emerge de la ec.(9.15) es que la corrección a la magnetización (o parámetro de orden) debida a las fluctuaciones termodinámicas de longitud de onda larga diverge en dimensión uno y dos. Por lo tanto, haber supuesto que las desviaciones de los espines respecto de sus valores de exactación son pequeñas no es correcto en dimensiones uno y dos. En otras palabras, no hay justificación para truncar la expansión (9.3) y quedarse con sólo con los términos de más bajo orden. Este “derrumbe” de la aproximación de ondas de espín en dimensiones uno y dos es consistente con el teorema de Mermin y Wagner que afirma que una simetría continua no se puede romper espontáneamente a temperatura finita en dimension  $d \leq 2$  si las interacciones son de corto alcance.

En dimensión 3 ya no hay divergencias infrarojas. La dependencia en temperatura de  $m$  que domina a temperaturas suficientemente bajas se obtiene escribiendo la función de Bose (9.13) como una serie geométrica:

$$\begin{aligned}
 m(d=3) &= S - \int_{k_0}^{\bar{k}} \frac{dkk^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nk^2/t} [1 + \mathcal{O}(t)] \\
 (9.17) \quad &\simeq S - \frac{1}{8} \left(\frac{t}{\pi}\right)^{3/2} \sum_{j=1}^{\infty} n^{-3/2} = S - \frac{1}{8} \left(\frac{t}{\pi}\right)^{3/2} \zeta(3/2),
 \end{aligned}$$

donde  $\zeta$  es la función zeta de Riemann  $\zeta(s) = \sum_n n^{-s}$ . Por lo tanto, en tres dimensiones, la reducción del valor del momento ordenado debido a fluctuaciones térmicas de baja temperatura es proporcional a  $T^{3/2}$ .

**Exercise 30.** Demuestre que para un ferromagneto de Heisenberg en dimensión  $d \geq 3$  la reducción del valor del momento ordenado debido a fluctuaciones térmicas de baja temperatura es proporcional a  $T^{d/2}$ .

**Exercise 31.** Demuestre que para un ferromagneto de Heisenberg en dimensión  $d \geq 3$ , la contribución dominante del calor específico a bajas temperaturas va como  $T^{d/2}$ .