

Cinemática relativista en la física de partículas

1. Se define la métrica $g_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$. Muestre que $g_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} = \{1 \text{ si } \mu = \nu \text{ y } 0 \text{ si } \mu \neq \nu\}$
2. Cuando uno cambia de sistema de referencia inercial, los vectores cambian según la siguiente transformación lineal,

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}.$$

- (a) Muestre que la relación

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\rho} = g_{\nu}^{\rho} = \delta_{\nu}^{\rho}$$

implica que el producto escalar de dos vectores es un invariante de Lorentz, o sea $x_{\mu} y^{\mu} = x'_{\mu} y'^{\mu}$. (Obs: δ_{ν}^{ρ} es la notación relativista para la Delta de Kronecker y vale 1 si $\nu = \rho$ y 0 si $\nu \neq \rho$.)

- (b) Muestre explícitamente la relación del punto anterior para el caso de la matriz Λ correspondiente a un *boost* en el eje x ,

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donde $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$

- (c) Escriba la Λ de una rotación en z y verifique que cumple la relación del punto (a).

3. Muestre que $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ es un vector covariante. (Lo va a encontrar escrito como ∂_{μ} .)
4. Indique el significado físico de los siguientes invariantes de Lorentz: $x^{\mu}x_{\mu}$, $x^{\mu}y_{\mu}$, $p^{\mu}p_{\mu}$, $\partial^{\mu}\partial_{\mu}$ y $\partial^{\mu}J_{\mu}$.
5. Mostrar que en una desintegración de un cuerpo en el estado inicial a dos cuerpos en el estado final, i.e. $A \rightarrow BC$, las energías de las partículas B y C están cinemáticamente determinadas en función del cuadrimomento de la partícula incidente A . Empleando esta disgresión, calcule el impulso del muón en la desintegración $\pi^{+} \rightarrow \mu^{+}\nu_{\mu}$, suponiendo que el pión se encuentra inicialmente en reposo. ¿Qué distancia recorrería este muón en el vacío (en promedio) antes de desintegrarse?
6. Calcule la velocidad a la que uno debería ver el par de dos partículas cargadas eléctricamente que viajan paralelas entre ellas a una distancia r para que la atracción magnética entre ellas compense la eléctrica.
7. Los primeros antiprotones fueron creados en el Bevatrón (Berkeley) en la reacción $pp \rightarrow ppp\bar{p}$. En tal caso se utilizó un haz de protones de energía E que colisiona con un blanco fijo de protones. Se pregunta:
 - (a) ¿Cuál sería la energía mínima necesaria (umbral) E para producir dicho antiprotón?
 - (b) Cómo cambiaría la situación en caso de colisionar dos haces de protones en lugar de utilizar un blanco fijo?

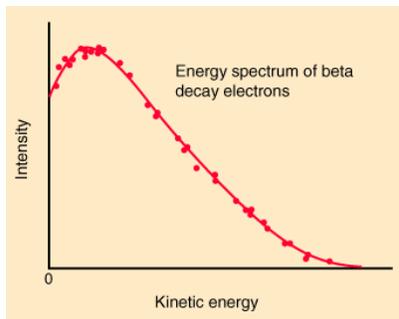
(Nota histórica: los primeros antiprotones fueron descubiertos cuando el acelerador alcanzó la energía cercana a los 6 GeV.)

8. Muestre que el proceso $e^{+}e^{-} \rightarrow \gamma$ está cinemáticamente prohibido para $m_{\gamma} = 0$.
 - (a) ¿De qué forma podría ser posible dicha desintegración de pares dando origen a sólo fotones?
 - (b) ¿Qué ocurriría si el fotón tuviese una masa distinta de cero?
9. En el acelerador *PEP II* que funciona en el SLAC, Stanford (EEUU), colisionan en forma asimétrica un electrón y un positrón (cuyas masas son $m = 0.511 \text{ MeV}$) con energías de 9.1 GeV y 3.1 GeV , respectivamente.
 - (a) ¿Cuál es la energía total del sistema en el sistema centro de momentos? (Esta es la energía disponible para la creación de nuevas partículas!)
 - (b) Supongamos que luego de esta colisión se forman sólo n partículas no masivas. ¿Cuáles son los posibles valores de n ?

(c) Supongamos ahora que como producto de esta colisión se forma la partícula $\Upsilon(4S)$ cuya masa es $10.6 GeV$. ¿A qué velocidad se moverá esta partícula en el sistema del laboratorio? ¿Y en el sistema centro de momentos?

10. Cuando se comenzó a estudiar el decaimiento beta se observaba que un neutrón decaía en un protón y una partícula beta (que es un electrón).

(a) De medir el espectro de la energía del electrón saliente (ver figura) se puede deducir con argumentos puramente cinemáticos que en el decaimiento hay al menos una partícula más que no se está detectando. Aclare bien qué hipótesis debe utilizar para reproducir este razonamiento y reproduzca a partir de la figura.



(b) En la actualidad en el experimento KATRIN (Alemania, 2009-2012) se está intentando medir la masa del neutrino a través de mediciones que buscan los electrones más energéticos provenientes de decaimientos beta. Halle un sistema de ecuaciones exacto a resolver (no se pide que lo resuelva!) que tenga como una de sus soluciones la máxima energía que puede tener un electrón proveniente de un decaimiento beta. Concluya que a partir de estudiar la energía de los electrones más energéticos del decaimiento beta se puede en principio medir la masa del neutrino.

(c) Usando razonamientos y aproximaciones razonables determine para el caso en el cual los electrones tienen la máxima energía posible, cuál es la relación entre el momento (o energía) del electrón y el protón. Usando este resultado halle cuál es el momento más grande que puede tener un electrón de un decaimiento beta en función de los parámetros del problema (las masas del protón, del neutrón, del electrón y del neutrino).

11. Usted es un experimental que quiere medir la masa del muón a través de su decaimiento. Supongamos que logra crear muones en reposo y que sabe que decaen a través del canal $\mu \rightarrow e \nu_\mu \bar{\nu}_e$ y que usted detecta sólo el electrón saliente.

(a) ¿Cuál es la mínima energía que esperaría para el electrón saliente?

(b) Si usted mide que la máxima energía con la que sale el electrón es de $E_e = 52.8 MeV$, ¿cuál es la masa del muón?

(c) Supongamos que ahora el decaimiento del muón es el mismo pero en vez del electrón hay una partícula de masa M mayor que la masa del muón, y para esto el muón no está más en reposo sino que se mueve con una velocidad v_μ . Si esto fuese posible, diga entonces cuál debería ser el mínimo valor para v_μ . Si no fuese posible, justifique por qué no.

12. Muestre que una partícula de masa m , energía E y vida media τ recorre una distancia media de

$$\Delta x = \frac{E}{m} \tau \sqrt{1 - \left(\frac{m}{E}\right)^2} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

antes de desintegrarse.

13. **Para discutir:**

(a) ¿Qué relación hay entre la conocida energía cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$ y la energía relativista $E = \gamma m c^2$? (Tomamos $c = 1$.)

(b) Muestre que el problema 8 se puede demostrar de varios modos, algunos con cuentas y otros de un modo conceptual.