Estructura de la materia 4

Guía 3: The eightfold way

Parte A: teoría de grupos

1. Dé una definición de *'simétrico'* que valga tanto para un objeto, como para un sistema y como para un lagrangiano, y muestre que la definición *matemática* de Grupo se puede adaptar como el marco teórico correcto para tratar problemas con simetrías.

2. El grupo $SU(2)$ se lo puede visualizar (y también se lo puede definir) a través de su representación fundamental que es *el grupo de matrices de* 2×2 *unitarias de determinante igual a uno*.

   (a) Muestre que esta representación de $SU(2)$ forma un grupo.

   (b) Muestre que cualquier elemento de esta representación se puede obtener a través de la exponenciación imaginaria de un vector del espacio vectorial generado por la base $\{\frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_2, \frac{1}{2}\sigma_3\}$. O sea, si $g \in$ rep. fundamental de $SU(2)$ entonces existe $\vec{\theta} \in R^3$ tal que $g = e^{i\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}}$. *Nota: en estos casos se llama 'espacio tangente a la identidad' al espacio vectorial, se llaman 'generadores del grupo' a los elementos de la base (*$\{\frac{1}{2}\sigma_i\}_{i=1,2,3}$*), y se lo llama 'Grupo de Lie' a esta clase de grupos. Observe que hay una biyección entre el espacio vectorial y el grupo.*

   (c) En el grupo se puede definir una distancia entre elementos en función de la distancia –definida de la manera usual– entre los $\vec{\theta}$ que le corresponden a cada elemento. Muestre que cualquier elemento del grupo puede ser generado con productos de elementos de cualquier entorno de la identidad.

   (d) Muestre que los generadores del grupo satisfacen un álgebra en la cual el producto de dos elementos viene dado a través del conmutador de ellos,
   $$[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j] = i\epsilon^{ijk}\frac{1}{2}\sigma_k.$$
   Nota: el álgebra de los generadores de un grupo de Lie es lo que generalmente se llama álgebra de Lie, y los $i\epsilon^{ijk}$ *son en este caso las constanes de estructura del grupo.*

3. Tome ahora el grupo $SO(3)$, cuya representación fundamental viene dada por las matrices reales ortogonales de 3×3. (O sea, el grupo de rotaciones tridimensionales.)

   (a) Halle los generadores de este grupo de Lie.

   (b) Halle las constantes de estructura de este grupo y compárelas con las de $SU(2)$ del problema anterior. *Nota: cuando dos grupos de Lie tienen las mismas constantes de estructura entonces son localmente isomorfos. ¿Puede mostrar eso? (*)*

4. Muestre que el tensor antisimétrico de rango y dimensión 2, ϵ_{ab}, es invariante ante cualquier matríz de la representación de SU(2) de dimensión 2 segun
   $$U^\dagger \epsilon U^* = \epsilon.$$
   (Ayuda: muéstrelo para U*'s en un entorno de la identidad y luego muestre que debe valer para cualquier* $U \in SU(2)$*. Este truco es muy útil en demostraciones que tienen que ver con grupos de Lie.)*

5. Sean dos subespacios de Hilbert $\mathcal{H}_{1,2}$ con estados posibles $|\phi_{i=1...n}\rangle$ y $|\psi_{j=1...m}\rangle$, respectívamente.

   (a) Muestre que si el sistema es tal que su estado puede ser alguno de $\mathcal{H}_1$ *o* de $\mathcal{H}_2$ entonces la base de estados posibles para el sistema son $n + m$ estados. Halle estos estados. (En este caso se dice que el sistema se halla en un estado de la suma directa $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.)

   (b) Muestre que si en cambio el sistema es tal que es una combinación de $\mathcal{H}_1$ *y* de $\mathcal{H}_2$, o sea por ejemplo que hay una partícula en $\mathcal{H}_1$ y otra en $\mathcal{H}_2$ que no interactuan entre sí, entonces la base de estados posibles para el sistema son $n \cdot m$ estados. Halle estos estados. Reflexione sobre cómo a pesar de que las partículas no interactuan se pueden formar estados que *no corresponen* a una partícula en un estado y la otra en otro, sino que estan entrelazados los sistemas. (En este caso se dice que el sistema se halla en un estado del producto directo $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.)

6. Se define como producto directo de matrices a $a \otimes b$ del siguiente modo

$$(a \otimes b)_{rs} = a_{ij} b_{kl}$$

donde los índices r y s valen $r = ik = 11, 12, 13, ..., 1n, 21, 22, ..., 2n....mn$ (suponiendo que $i = 1...m$ y $k = 1...n$) y $s = jl$ en modo análogo. O sea, por ejemplo, si $a \in R^{2\times 2}$ y $b \in R^{3\times 3}$ entonces

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{11}b_{33} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} & a_{12}b_{33} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{21}b_{23} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{21}b_{33} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{22}b_{33} \end{pmatrix}$$

(a) Muestre que esta definición implica que cualquier operación que se realice sobre uno de los espacios de Hilbert factor del producto directo es independiente de lo que se realice sobre el otro espacio. O sea, que

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (a \cdot c) \otimes (b \cdot d)$$

(b) Halle que en efecto esta definición de producto directo de matrices sirve para operar sobre el espacio de Hilbert producto directo $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, para esto halle cuál es la base correcta de estados del espacio producto directo.

(c) Hagamos un ejemplo concreto que haga entender todo. Tome un elemento del grupo $SU(2)$ y sea a la matríz que lo representa en la representación de 2×2 y b la matríz que lo representa en la representación de 3×3. Realice el producto directo $a \otimes b$ y luego haga el cambio de base que le indica la tabla de Clebsch-Gordan y verifique que la matríz resultante se divide en bloques y representa la transformación sobre el espacio suma directa resultante. Si hizo las cosas bien habrá mostrado que $2 \otimes 3 = 2 \oplus 4$ (o en la notación de la tabla de Clebsch-Gordan: $1/2 \otimes 1 = 1/2 \oplus 3/2$.)

7. Usando una tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan, muestre que si a los estados cuánticos se los rotula según bajo qué representación del grupo $SU(2)$ transforman, de acuerdo con la siguiente notación

$$\begin{aligned} 1 &= \text{representación trivial de } SU(2) \text{ (p.ej. el singlete)} \\ 2 &= \text{representación de } SU(2) \text{ de spin } s = \tfrac{1}{2} \text{ (la fundamental)} \\ 3 &= \text{representación de } SU(2) \text{ de spin } s = 1 \text{ (p.ej. triplete)} \\ 4 &= \text{representación de } SU(2) \text{ de spin } s = \tfrac{3}{2}, \\ etc.. & \end{aligned}$$

entonces vale que

$$\begin{aligned} 2 \otimes 2 &= 1 \oplus 3 \\ 1 \otimes 2 &= 2 \\ 2 \otimes 2 \otimes 2 &= 2 \oplus 2 \oplus 4. \end{aligned}$$

y calcule

$$\begin{aligned} 2 \otimes 4 &= ? \\ 2 \otimes 3 &= ? \end{aligned}$$

¿Cómo interpretaría estos resultados en término de repesentación *matricial* del grupo $SU(2)$?(*)

8. Muestre que los números 1, i, -1, -i forman un grupo abeliano finito $\mathcal{G}$, y que las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son una representación de 2×2 de $\mathcal{G}$.

9. Muestre que las tres matrices $(J_i)_{m_1,m_2} = \langle jm_1|J_i|jm_2\rangle$, $i = 1,2,3$, $m_1, m_2 = -j, \cdots, j$ son una representación irreducible de dimensión $2j+1$ del álgebra de Lie de SU(2), donde $J_1 = (J_+ + J_-)/2$, $J_2 = (J_+ - J_-)/2i$, y

$$J_+|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j, m+1\rangle \qquad J_-|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle \qquad J_3|jm\rangle = m|jm\rangle$$

Construya explícitamente las 3 matrices J_i de 6×6 y verifique que satisfacen el álgebta de SU(2), p. ej $[J_1, J_2] = iJ_3$. A partir de la fórmula de Hausdorff, `http://en.wikipedia.org/wiki/Baker-Campbell-Hausdorff_formula`, sin más cuentas, muestre que el conjunto continuo $U(\vec{\theta}) = \exp{(i\,\vec{\theta}\cdot\vec{J})}$ de matrices de $(2j+1)\times(2j+1)$ es una representación del grupo SU(2).

10. En el el ej.6 se vio que el espacio de dimensión 8 obtenido como producto directo de 3 representaciones fundamentales de SU(2) es reducible y se descompone en suma directa de un espacio de dimensión 4 y dos de dimensión 2: $2\otimes 2\otimes 2 = 4\oplus 2\oplus 2$. Utilizando coeficientes de Clebsch-Gordan, y llamando $\{u, d\}$ a la base de la representación fundamental, muestre que la transformación lineal de la base producto a la base suma directa está dada por

$$\left\{\begin{array}{l} uuu \\ (uud+udu+duu)/\sqrt{3} \\ (udd+dud+ddu)/\sqrt{3} \\ ddd \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} (2uud-udu-duu)/\sqrt{6} \\ (2ddu-dud-udd)/\sqrt{6} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} (udu-duu)/\sqrt{2} \\ (udd-dud)/\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Por aplicación de los operadores de subida y bajada verifique que estos tres subespacios son en efecto irreducibles.

11. El grupo SU(3) se puede definir como el de las matrices unitarias de 3×3 y determinante 1.

   (a) Muestre que toda $U\in\mathrm{SU}(3)$ puede escribirse como $U = \exp(iH)$ con H hermítica de 3×3 y traza nula, y que ésta puede parametrizarse en término de 8 números reales como

$$H = \begin{pmatrix} a_8+a_3 & a_1-ia_2 & a_4-ia_5 \\ a_1+ia_2 & a_8-a_3 & a_6-ia_7 \\ a_4+ia_5 & a_6-ia_7 & -2\,a_8 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{8} a_k\,\lambda_k \quad \text{o sea} \quad U = e^{\,iH} = e^{\,i\,a_k\lambda_k}$$

   (b) Las matrices $\lambda_1,\ldots,\lambda_8$, denominadas de Gell-Mann, son las generadoras del grupo y juegan el rol de las de Pauli en SU(2), compare $\exp(i\,\theta_i\sigma_i)$ con $\exp(i\,a_k\lambda_k)$. Escriba las λs, verifique que λ_3 y λ_8 son diagonales y que las otras 6 pueden combinarse en 3 pares de operadores de subida y bajada à la SU(2), $J_\pm = \frac{1}{2}(J_1\pm iJ_2):\quad \lambda_\pm^{12},\ \ \lambda_\pm^{45},\ \ \lambda_\pm^{67}$. Note que $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ son los generadores de un subgrupo SU(2) de SU(3).

   (c) Llamemos u, d, s, a la base del espacio donde actúan las 8 matrices λ_k, denominada la representación 3, o triplete:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Muestre que éstos pueden ser identificados unívocamente por sus autovalores de $I_3 \equiv \lambda_3/2$ y $S = (\lambda_8 - 1)/3$. Dibuje en el plano (I_3, S) los elementos de esta base e identifique como actúan los 6 operadores de subida y bajada entre ellos.

   (d) Por aplicación de los 6 operadores de bajada y subida encuentre el multiplete de SU(3) del que forma parte el cuadruplete de SU(2) del ejercicio anterior. Muestre que tiene dimensión 10, y represente los estados en el plano (I_3, S).

   (e) Repita el item anterior pero para los multipletes que corresponden respectivamente a los dos dobletes de SU(2) del ejercicio anterior. Verifique que cada uno forma un octete ("the eightfold way") y represéntelos en el plano (I_3, S).

   (f) Hemos encontrado hasta aquí que el espacio producto $3\otimes 3\otimes 3$ se descompone en suma directa de 3 representaciones irreducibles $3\otimes 3\otimes 3 = 10\oplus 8\oplus 8\oplus\cdots$, donde claramente falta un singlete (3.3.3=27, pero 10+8+8=26). Por aplicación de los 8 generadores de SU(3) muestre que el singlete es

$$|0\rangle = (uds - dus + dsu - usd + sud - sdu)/\sqrt{6}$$

   (g) Note que hemos demostrado que para el grupo SU(3) es $3\otimes 3\otimes 3 = 10\oplus 8\oplus 8\oplus 1$.
   Cómo es la descomposición de $3\otimes 3\otimes 3$ para el grupo SU(2)?

12. El grupo de Lorentz, como cualquier grupo, se puede estudiar por completo una vez que uno conoce alguna de sus representaciones inyectivas.

   (a) Halle los generadores del grupo de Lorentz en la representación vectorial $\Lambda_\mu{}^\nu$ y verifique que son antisimétricos. (Se los denomina $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ y cumplen la siguiente relación

   $$[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = i\,(g^{\nu\rho}\mathcal{J}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}\mathcal{J}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}\mathcal{J}^{\nu\rho})$$

   que define las constantes de estructura del grupo. No se pide que las deduzca, a los sumo verifique alguna si lo desea...)

   (b) Para el caso de un boost en $\hat{x}$ calcule cuál es la relación entre el parámetro β del boost y el coeficiente (α) que debe acompañar al generador en la exponenciación de éste,

   $$e^{i\alpha\mathcal{J}^{01}} = \Lambda(\beta).$$

13. Estructura del grupo de Lorentz.

   (a) La transformación de Lorentz más general está definida por 6 parámetros $(\vec{\theta}, \vec{\beta})$: los 3 ángulos de una rotación y las 3 componentes de un boost. A partir de la fórmula para una transformación de Lorentz infinitesimal $L(\vec{\epsilon}, \vec{\eta})$

   $$\begin{aligned} x_0' &= x_0 - \vec{\eta}\cdot\vec{x} \\ \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{\epsilon}\times\vec{x} - \vec{\eta}\,x_0 \end{aligned}$$

   escriba los seis generadores del grupo de Lorentz en la representación vectorial $L(\vec{\epsilon}, \vec{\eta}) = 1 + i\vec{\epsilon}\cdot\vec{J} - i\vec{\eta}\cdot\vec{K}$ y encuentre la correspondiente álgebra. Muestre que las rotaciones forman un subgrupo pero los boosts no, e interprete físicamente este resultado.

   (b) Definamos el siguiente cambio de base en el álgebra de Lie del grupo de Lorentz

   $$\begin{aligned} \vec{P} &\equiv \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}) \\ \vec{Q} &\equiv \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) \end{aligned}$$

   Muestre que el álgebra en la base $\{\vec{P}, \vec{Q}\}$ corresponde a dos subgrupos de SU(2) que conmutan entre sí, por lo que podemos identificar representaciones como un par (j_p, j_q) con .j_p y j_q semienteros

   (c) Considere la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ de dimensión 2 de $\{\vec{P}, \vec{Q}\}$. A partir de ella escriba la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ de $\{\vec{J}, \vec{K}\}$ y la de una transformación de Lorentz infinitesimal arbitraria. Verifique para un ejemplo concreto que en efecto estas matrices de 2×2 tienen la misma tabla de multiplicación que las matrices de 4×4 del la parte (a), es decir que son una representación de aquellas.

   (d) Por exponenciación de la representación de 2×2 hallada en (c) para el álgebra de Lorentz, obtenga la correspondiente representación de 2×2 del grupo de Lorentz (recuerde que $\sigma_i^2 = 1$ y $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$).

   (e) A partir de como transforman ante rotaciones los objetos de dimensión 2 sobre los que actúa esta representación, muestre que se trata de partículas de espín $\frac{1}{2}$. Considere a continuación la acción de los generadores $\vec{K}$ para deducir como transforman ante boosts las partículas de espín $\frac{1}{2}$.

14. Sea H un hamiltoniano invariante ante un grupo $SU(2)$ y sean $|i\rangle$ y $|f\rangle$ dos estados cuánticos que transforman ante este grupo bajo las representaciones J_i y J_f, con autovalores de J_z iguales a M_i y M_f, respectivamente,

   $$\begin{aligned} |i\rangle &\sim |J_i,\, M_i\rangle \\ |f\rangle &\sim |J_f,\, M_f\rangle. \end{aligned}$$

   Muestre que el elemento de matríz $\mathcal{M} = \langle f|H|i\rangle$ es diferente de cero si y sólo si se cumple que $J_i = J_f$ y $M_i = M_f$. Es más, muestre que $\mathcal{M}$ sólo depende de $J_{i,f}$ y *no* de $M_{i,f}$.