guia 4: Ecuación de Dirac

Parte A: Mecánica cuántica relativista

1. Dadas las matrices
$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$
muestre que definiendo $\gamma^0 \equiv \beta$ y $\gamma^i \equiv \beta\alpha^i$ se verifica
$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$
(Estas matrices γ constituyen la representación de Dirac.)

2. Sea la ecuación de Dirac escrita en forma covariante,
$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi(x) = 0.$$
   (a) Halle las 4 soluciones en reposo linealmente indepedientes: $u^{(1)}(m,\vec{0}),\ u^{(2)}(m,\vec{0}),\ u^{(3)}(m,\vec{0}),\ u^{(4)}(m,\vec{0})$ junto a sus respectivas dependencias temporales. Comprenda qué quiere decir energía positiva o negativa.

   (b) Operando a partir de la ecuación de Dirac, obtenga la ecuación de continuidad
$$\frac{\partial\rho_{Dirac}}{\partial t} + \vec{\nabla}.\,\vec{J}_{Dirac} = 0 \tag{1}$$
mostrando que $\rho_{Dirac} = \psi^\dagger\psi$ y $\vec{J}_{Dirac} = \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$.

   (c) Halle el Hamiltoniano de Dirac que permite escribir la ecuación de Dirac como una ecuación de Schrödinger,
$$H\psi = i\partial_t\psi.$$

3. Momento angular total:

   (a) Demuestre que el Hamiltoniano de Dirac no conmuta con el operador de impulso angular orbital $\vec{L}$, pero sí lo hace con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, con $\vec{S}$ dado por
$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \tag{2}$$
con
$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

   (b) Muestre que el operador $\vec{S}$ definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares, y además tiene autovalores $\pm 1/2$ ($\pm\hbar/2$ en unidades anti-naturales).

   (c) Verifique este operador satisface el valor de J^2 esperado para una partícula de espín $1/2$.

4. Muestre que al operador de paridad usual ($\hat{\Pi}\,\vec{x} = -\vec{x}$) hay que agregarle una operación sobre el espacio interno del espinor de Dirac para que conmute con el Hamiltoniano. O sea, halle $\hat{\Pi}_{int}$ tal que $\hat{\mathcal{O}} = \hat{\Pi} \otimes \hat{\Pi}_{int}$ conmute con H. (Conceptualmente esta ocurriendo lo mismo que con el espín, donde vimos que no alcanza con hacer las rotaciones espaciales usuales (generadas por $\vec{L}$) para dejar invariante el Hamiltoniano, sino que hay que agregarle las rotaciones internas generadas por $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}$.)

5. Para hallar las soluciones de la ecuación de Dirac con momento $\vec{p} \neq 0$ se puede aplicar un boost sobre la soluciones en reposo ($\vec{p} = 0$).

   (a) Compruebe que los operadores $S^{\alpha\beta} = \frac{i}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$ son generadores de una representación del grupo de Lorentz.

(b) Mostrar que si se definen las matrices de transformaciones de Lorentz finitas

$$S_\Lambda \equiv e^{\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}},$$

donde $\omega_{\alpha\beta}$ son los parámetros de la transformación, entonces vale que

$$S_\Lambda \gamma^\mu S_\Lambda^{-1} = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu,$$

donde $\Lambda^\mu{}_\nu$ es la matriz que se obtiene de exponenciar los generadores de la representación vectorial $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$ *con el mismo parámetro* $\omega_{\alpha\beta}$,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = e^{\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\mathcal{J}^{\alpha\beta}}.$$

(Observe que α y β son índices que rotulan al generador y éste es una matríz de 4×4 cuyos índices μ y ν no se escriben para no sobrecargar.)

(c) Obtenga la función de onda boosteada

$$\psi'(x) = S_\Lambda \psi(\Lambda^{-1}x)$$

tal como la vería un observador en el nuevo sistema de referencia, donde el fermión se halla en movimiento. Concluya que si $\psi(x)$ es solución de la ecuación de Dirac en un dado sistema de referencia, entonces $\psi'(x)$ es solución de la misma ecuación pero planteada en un segundo sistema de referencia al que se llega a través del boost determinado por Λ desde el primer sistema. Esta conclusión demuestra que la ecuación de Dirac es una ley de la física invariante Lorentz.

6. A partir de las soluciones para partícula libre de la ecuación de Dirac con $E > 0$, verifique que en el límite no relativista las componentes inferiores (o débiles) del espinor de Dirac son de orden v/c respecto de las superiores (o fuertes), y que estas últimas tienen la forma de una solución de Schrödinger para partícula libre multiplicadas por un espinor de Pauli de dos componentes.

7. A partir de la sustitución $\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$ y $E \to \epsilon_{NR} + m - q\Phi$ en la ecuación de Dirac muestre que, en el límite no relativista y de campos débiles, las componentes superiores de las soluciones con $E > 0$ satisfacen la ecuación de Schrödinger-Pauli que aprendió en Mecánica Cuántica,

$$\left(\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi - g\frac{q}{2m}\frac{1}{2}\vec{\sigma}.\vec{B}\right)\psi = \epsilon_{NR}\psi,$$

donde g es el factor giromagnético del electrón que, si hizo las cuentas bien, habrá llegado a que $g = 2$.

8. *Escalón de Potencial*. Resuelva la ecuación de Dirac para un escalón de potencial:

$$V(z) = \begin{cases} V_0 & \text{for } z > 0 \\ 0 & \text{for } z < 0 \end{cases}.$$

Considere para ello un electrón que incide desde la izquierda con momento $p\hat{z}$, escriba la solución general $\psi(z,t)$ para las ondas transmitida y reflejada, y plantee la condición de continuidad en el origen, $\psi_I(0,t) + \psi_R(0,t) = \psi_T(0,t)$. Con ésto calcule los coeficientes de transmisión y reflexión definidos, como en Física 4, a través del cociente entre las corrientes, $R \equiv j_R/j_I$ y $T \equiv j_T/j_I$, siendo j la corriente de Dirac $\vec{j} = \psi^\dagger\,\vec{\alpha}\,\psi$. Muestre que si $V_0 > E + mc^2$ el resultado es

$$R = -\frac{(1+r)^2}{(1-r)^2} \qquad T = -\frac{4r}{(1-r)^2} \qquad \text{con } r = \sqrt{\frac{(V_0 - E + mc^2)(E + mc^2)}{(V_0 - E - mc^2)(E - mc^2)}}$$

Note que, como $r > 1$, resulta $|j_R| > |j_T|$. Este resultado, conocido como "Paradoja de Klein", muestra que aún en el simple caso de una barrera de potencial no es posible una interpretación unipartícula de la ecuación de onda cuántico-relativista.

Parte B: Hacia el lagrangiano del Modelo Estándar

9. Muestre que $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ es hermítico, de cuadrado unitario, y que anticonmuta con las cuatro matrices de Dirac. γ^5 es conocido como el operador de quiralidad.

10. Muestre que el operador de helicidad $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}.\hat{P}$ con ($\hat{P} = \vec{P}/|\vec{P}|$), que da la proyección del spin en la dirección de movimiento, conmuta con el Hamiltoniano de Dirac y con el operador de impulso $\vec{P}$, de forma tal que se lo puede agregar a estos para formar un conjunto completo de observables que conmutan.

11. Demuestre que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u(\vec{p})$ es la misma que la del operador de helicidad, es decir γ^5 coincide con el operador de helicidad
$$\gamma^5 u(\vec{p}) = (\vec{\Sigma}.\,\hat{p})u(\vec{p}).$$
Por otro lado, verifique que para las antipartículas, quiralidad y helicidad son opuestas
$$\gamma^5 v(\vec{p}) = -(\vec{\Sigma}.\,\hat{p})v(\vec{p}).$$

12. Considere una transformación de Lorentz $x^\mu \to x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ que transforma al espinor ψ según $\psi \to \psi' = S_\Lambda \psi$ donde $S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$. Sabiendo que para una transformación infinitesimal para el operador S se obtiene $S = 1 + \frac{1}{8}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\epsilon^{\alpha\beta}$ (donde $\epsilon^{\alpha\beta}$ son los parámetros de la transformación) muestre que
    (a) $S^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$
    (b) $\bar{\psi}' = \bar{\psi}S^{-1}$ con $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.
    (c) $\bar{\psi}\psi$ es invariante de Lorentz.
    (d) $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es un cuadrivector.
    (e) $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ es un pseudoescalar.
    (f) $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ es un pseudo-cuadrivector.

13. Partiendo de la definición de los operadores $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, demuestre las siguientes propiedades
$$\begin{array}{lrcl} \text{que son proyectores} & P_\pm^2 & = & P_\pm \\ \text{sobre espacios disjuntos} & P_+P_- & = & 0 \\ \text{y complementarios} & P_+ + P_- & = & 1 \\ \text{y que corresponden a la quiralidad } \textit{Right} \text{ y } \textit{Left} & \gamma^5 P_\pm\psi & = & \pm\psi \end{array} \qquad (3)$$

14. Además de la representación de Dirac para las matrices γ, existe la representación de Weyl (o quiral),
$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}.$$
    (a) Muestre que estas matrices también cumplen con la condición $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.
    (b) Muestre que en en esta representación la función de onda se puede escribir $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$, donde $\psi_L = P_L\psi$ representa la parte de quiralidad *left* y $\psi_R = P_R\psi$ la parte de quiralidad *right* de la función de onda.
    (c) Muestre que para partículas muy livianas o ultrarelativistas, la ecuación de Dirac se desacopla en dos ecuaciones diferentes para ψ_L y ψ_R

Para discutir:

(a) Todo muy lindo con los nuevos operadores paridad e impulso angular de la ecuación de Dirac, pero cuando uno mira el Universo que lo rodea con las leyes de la física cotidianas, éste parece ser inavriante ante la paridad usual y el momento angular usual parece conservarse. Y todo lo que hay en esta habitación son justamente fermiones. Cómo se explica esto?

(b) Aunque actualmente se *sabe* que los neutrinos tendrían una masa alrededor del $\sim$eV, estos pueden ser tratados como ultrarelativistas prácticamente en cualquier situación. Discuta, por ejemplo, cuán relativistas serían los típicos neutrinos del decay beta, $n \to p^+\,\nu\,e^-$. ¿Cómo será la ecuación de movimiento de los neutrinos?

(c) Discuta sobre las virtudes de las diferentes representaciones (Dirac y Weyl) para las matrices γ.