Estructura de la materia IV

Guia 5: Formulación lagrangiana

Problema 1: Halle e identifique las ecuaciones de movimiento para el campo $\psi(x)$ que se derivan de la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\psi, \vec{\nabla}\psi, \ddot{\psi}) = i\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2m}\vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi - V(\vec{x}, t)\, \psi^* \psi.$$

Problema 2: Dada la densidad lagrangiana de un campo escalar complejo,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \, \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi,$$

a) Halle las simetrías del problema, diga que grupo forman.

b) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando las variables parte real e imaginaria de ϕ

c) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando las variables ϕ y ϕ^*.

Problema 3: Confeccione un lagrangiano cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange devengan en la siguiente ecuación de movimiento

$$\partial^\mu \partial_\mu \theta(\overrightarrow{x}, t) = 2\lambda e^{2\theta(\overrightarrow{x}, t)},$$

siendo λ un parámetro constante de la teoría.

Problema 4: Considere la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \phi^* \phi - V(\varphi, \phi)$$

donde $V(\varphi, \phi)$ es una función de los módulos de ambos campos, y donde m representa un parámetro constante de la teoría.

a) Obtener las ecuaciones de movimiento (de Euler-Lagrange) que se derivan de la misma. Nótese que hay dos campos (y complejos!) en esta teoría.

b) Calcular los momentos canónico conjugados al campo ϕ y al campo φ.

c) Hallar las simetrías de esta densidad lagrangiana y diga que grupo forman. Qué se debería cumplir para que el grupo de simetría sea $U(2)$?

d) Si se hace, en este lagrangiano, el reemplazo $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu$, ¿cuál sería el nuevo momento canónico conjugado al campo ϕ?

Problema 5: Considere la siguiente acción

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \, (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \lambda A^\mu A_\mu)\, ;$$

siendo, según la convención standard, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, y donde λ representa un parámetro constante de la teoría.

a) Derivar las ecuaciones de movimiento provenientes de esta acción.

b) Muestre que, para $\lambda = 0$, existe una elección de gauge tal que estas ecuaciones pueden escribirse como $\partial^\rho \partial_\rho A^\nu = 0$.

c) Decir si reconoce, en el caso $\lambda = 0$, alguna teoría de campos familiar en tales ecuaciones de movimiento. En tal caso, identifíquela.

d) ¿A qué magnitud física asociaría usted el valor de la constante λ?

e) Para el caso $\lambda = 0$, escriba la acción en función de los campos eléctrico y magnético (E y B respectivamente), y relacione estas cantidades con las cantidades T y V (energía cin ética y energía potencial, respectivamente) de la mecánica clásica. A fin de otener una interpretación física de esta analogía, piense cómo se escribe la enegía electromagnética en términos de los campos E y B.

Problema 6: Considere la lagrangiana de Dirac acoplado a la lagrangiana de Maxwell; es decir

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

siendo D_μ la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

a) Escriba este lagrangiano aislando la parte del fermión libre, la del campo electromagnético, y la de interacción. ¿Se le ocurre alguna otra posibilidad de acoplar estos dos campos? Si halló alguna, diga cuáles serían sus contras, para que en la realidad se utilice esta otra.

b) Muestre explícitamente que cada uno de estos términos es un escalar de Lorentz y, por lo tanto, también lo es el lagrangiano.

c) Halle todas las simetrías de este Lagrangiano. (*Si lo hace bien, entenderá el por qué de la derivada covariante.*)

d) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange para esta teoría de campos. También obtenga las ecuaciones de Maxwell para $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

Problema 7: Considere la densidad lagrangiana de tres partículas de Dirac libres,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_1(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_1)\psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_2)\psi_2(x) + \bar{\psi}_3(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_3)\psi_3(x)$$

a) ¿Cuál es el grupo de simetría de este Lagrangiano?

b) Y si fuesen las tres masas iguales ($m_1 = m_2 = m_3$), ¿cuál sería el grupo de simetrías en este caso? ¿A qué le hace acordar...?

Para discutir:

a) ¿Cuál es la diferencia entre *lagrangiano* y *densidad lagrangiana*?

b) ¿Por qué generalmente se escribe un "$\frac{1}{2}$" en el Lagrangiano del campo escalar real y no en el del campo escalar complejo? ¿Por qué un campo real se dice *neutro* y un campo complejo se dice *cargado*?

c) ¿Es verdaderamente *necesaria* una formulación lagrangiana?

d) Saliendo de esta guía usted debería saber muy bien cuál es el lagrangiano de un fermión libre, el lagrangiano del campo electromagnético, y el lagrangiano de interacción entre el campo electromagnético y un fermión. ¿Lo sabe? La suma de estos tres lagrangianos es el lagrangiano de QED (Quantum Electrodynamics).

e) ¿Alguna vez reflexionó cómo surgen los lagrangianos cuando uno quiere construir una teoría física? Hágalo por ejemplo para QED. Próximamente veremos para otras teorías: interacciones fuertes y electrodébiles.