Estructura de la materia IV

guia 6: Teorías de gauge, lagrangianos y diagramas de Feynman

Problema 1: Considere la acción de un campo escalar cargado ante el campo electromagnético,

$$S = \int d^4x \left(D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \right),$$

donde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Se pide:

a) Muestre que esta acción es invariante ante la transformación $U(1)$ global definida según $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x)$, para cualquier constante α.

b) Suponiendo, ahora, una transformación local (i.e. permitiendo que α sea, ahora, una función arbitraria de las cuatro coordenadas), deduzca cómo tendría que transformar el campo electromagnético $A_\mu(x) \to A'_\mu(x)$ a efectos de que la acción permaneciese invariante ante $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x)$.

c) Muestre que la transformación del campo $A_\mu(x)$ deja también invariante al lagrangiano de Maxwell....sabe cuál es, ¿no?

d) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción.

e) Ahora agregue al Lagrangiano un término $\frac{1}{4!}|\phi|^4$ y vuelva a dibujar los nuevos diagramas de feynman posibles. Con este nuevo lagrangiano, dibuje los diagramas intervinientes en el scattering partícula-antipartícula, $\phi^*\phi \to \phi^*\phi$. Por simplicidad, considere sólo los órdenes que no incluyan lazos en los diagramas.

Problema 2: Considere el campo de Dirac acoplado al campo electromagnético,

$$\mathcal{L}_{QED} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

a) Muestre que esta acción es invariante ante la transformación de gauge conjunta $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$, $A_\mu(x) \to A'_\mu(x)$, donde la transformación del campo electromagnético es aquélla que se dedujo en el problema anterior.

b) Verifique que esta acción es invariante ante la transformación global $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x)$, $A_\mu(x) \to A_\mu(x)$, si y sólo si el campo de spin $1/2$ es no-masivo.

c) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción.

Problema 3: Considere las dos teorías de campos descriptas en los problemas 1 y 2.

a) Muestre que un término de masa para el fotón, por más pequeño que sea, rompe la invarianza de gauge $U(1)_{local}$.

b) Estudie a qué órden (en potencias de e) aparece el primer término no-nulo en la amplitud de scattering para el proceso que corresponde a crear un par de fotones a partir de una colisión de partícula-antipartícula.

c) Presente el diagrama (el que corresponde al menor orden no trivial) del proceso de interacción entre cuatro fotones de distinto momento. Muestre que es indispensable la consideración de un lazo para tal proceso. Lea los comentarios del libro de J.D. Jackson (sí, el de electrodinámica clásica) respecto a este proceso.

d) Volviendo sobre el proceso del punto c) (scattering de Delbruck), diseñe un vértice para un lagrangiano (efectivo) que sirva para remedar el proceso fotón-fotón → fotón-fotón a nivel clásico (i.e. a nivel de un gráfico que no incluya lazos). ¿Cuál debería ser el término que sería necesario agregar y cuál constante de acoplamiento sería adecuada? ¿Se puede esperar que exista un vérice así pero que aun no se haya medido? ¿Por qué?

Problema 4: El lagrangiano de QED incluyendo las tres familias de leptones es

$$L = \int d^3x \sum_{a=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_a (i\gamma^\mu D_\mu - m_a)\psi_a - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Dibuje los diagramas de Feynman de orden más bajo para los siguientes procesos:

a) aniquilación de pares: $e^- e^+ \to \mu^+ \mu^-$

b) scattering $e^- \mu^+$ con bremstrahlung $e^- \mu^+ \to e^- \mu^+ \gamma$

c) scattering fotón-fotón $\gamma\gamma \to e^- e^+$

Problema 5: A partir de una parte del lagrangiano de interacción de Fermi,

$$L = \int d^3x \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}_p \gamma^\mu (C_V + C_A \gamma^5)\psi_n \, \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1-\gamma^5)\psi_{\nu_e} + h.c. \right),$$

(C_V y C_A son constantes a medir) muestre que se puede generar el decaimiento β^+ y β^-, y dibuje los diagramas de Feynman correspondientes. Discuta por qué este lagrangiano tiene tan pocas simetrías. Observe cómo la quiralidad *left* ya entra en juego en este Lagrangiano. ¿Cómo hace uno experimentalmente para distinguir que los electrones que vienen del β-decay son de quiralidad *left*? ¿Y cómo hace uno para medir C_V y C_A? En este lagrangiano parecería que sólo el neutrino tiene quiralidad *left*, muestre que no es así y que de la función de onda del electrón también sólo interviene la parte *left*.

Problema 6: En la teoría de Fermi se define la corriente débil leptónica como

$$J^{(L)}_\alpha = \sum_{a=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_a(x)\gamma_\alpha(1-\gamma^5)\psi_{\nu_a} \equiv J^{(e)}_\alpha + J^{(\mu)}_\alpha + J^{(\tau)}_\alpha$$

y el lagrangiano de interacción corriente-corriente como

$$L = \int d^3x J^{(L)\dagger}_\alpha(x) J^\alpha_{(L)}(x).$$

a) Muestre que $J^{\alpha}_{(e)}{}^\dagger = \bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\psi_e$

b) Halle y dibuje los posibles vértices de interacción.

c) Teniendo en cuenta este lagrangiano y también el lagrangiano de QED, dibuje los posibles canales de decaimiento del muón. O sea, si usted tiene un muón en reposo, ¿en qué partículas puede decaer y cómo? ¿Cómo detectaría experimentalmente que un muón decayó? ¿Cuál es un buen lugar para hallar muónes?

Problema 7: Teniendo en cuenta tanto el lagrangiano de Fermi como el de QED, indique cuáles de los siguientes procesos son posibles y cuáles no. Cuando fuesen posibles, dibuje su(s) diagrama(s) de Feynman.

$$\begin{array}{llllllllllll}
(a) & e^-e^+ & \to & \mu^-\bar{\nu}_\mu & (b) & e^-\nu_e & \to & \mu^-\bar{\nu}_\mu & (c) & e^- & \to & \mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_e \\
(d) & \mu^- & \to & e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu & (e) & e^-e^- & \to & e^-e^- & (f) & \mu^+e^- & \to & \mu^+e^- \\
(g) & \tau^+e^- & \to & \nu_\tau\nu_e & (h) & \tau^+e^- & \to & \nu_\mu\nu_e & (i) & \mu^+e^- & \to & \gamma \\
(j) & \gamma\gamma & \to & \nu_e\nu_e & (k) & e^-\bar{\nu}_e & \to & \mu^-\bar{\nu}_\mu & (l) & e^+e^- & \to & \gamma\gamma\gamma
\end{array} \tag{1}$$

Una vez hechos estos ejemplos y adquirido el conocimiento que le permite ensayar cualquier otro ejemplo, ¿podría enunciar algunas reglas de conservación que aplican a la naturaleza? Por ejemplo, *conservación de la carga eléctrica*.

Problema 8: (Precalentamiento para el Standard Model....) Considere la siguiente densidad lagrangiana,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2,$$

donde Φ es un doblete de campos escalares complejos,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix}.$$

a) Muestre que $\mathcal{L}$ is invariante ante transformaciones de fase globales del grupo $SU(2)$

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{i\,\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\,\Phi(x).$$

¿Hay más simetrías además de esta?

b) Muestre que puede extender esta simetría $SU(2)_{global}$ a una simetría $SU(2)_{local}$, o sea $\vec{\alpha} \to \vec{\alpha}(x)$, si agrega los nuevos *campos de gauge* $\vec{W}_\mu = (W^1_\mu, W^2_\mu, W^3_\mu)$ y realiza la sustitución

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot \vec{W}_\mu,$$

y si define que los W_μ transformen infinitesimalmente como

$$\vec{W}_\mu \to \vec{W}_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \vec{\alpha} - \vec{\alpha}\times \vec{W}_\mu. \tag{2}$$

Obtenga el nuevo lagrangiano

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu \Phi + ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot \vec{W}_\mu \Phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu \Phi + ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot \vec{W}_\mu \Phi\right) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

c) Muestre que para darle dinámica a los nuevos campos de gauge puede agregar el siguiente término a la lagrangiana,

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot \vec{W}^{\mu\nu},$$

con

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu \tag{3}$$

y no afectar la invarianza de gauge de esta.

d) Explique porqué los últimos términos de las ecuaciones (2) y (3) están vinculados al caracter no abeliano de SU(2).

e) En el lagrangiano final (o sea en el que surge luego de haber agregado los campos de gauge para pedir invarianza local y de haberle agregado $\Delta\mathcal{L}$ para darle dinámica a los campos), aisle la parte "resoluble" de la parte "perturbativa". En esta última parte del lagrangiano identifique y dibuje los vértices de interacción entre todos los campos que hay finalmente en la teoría: ϕ_α, ϕ_β, W^1_μ, W^2_μ y W^3_μ.

Para discutir y reflexionar:

a) ¿Por qué los lagrangianos deben ser reales?

b) ¿Puede reconocer qué teoría surge de pedir invarianza de gauge local a tres fermiones idénticos? ¿Pueden tener masa estos fermiones? ¿Y los campos de gauge?

c) ¿Puede dibujar el diagrama de Feynman de cómo se producen los rayos-X que utilizan para hacerle radiografías?

d) ¿Por qué C_V y C_A se llamarán así?

e) ¿Por qué será tan importante que las teorías física sean invariantes de gauge *local*?

f) ¿Es la teoría de Fermi una teoría de gauge?