Primer Parcial (17/05/2007)

1. *(3.2p)* En el acelerador $PEP\ II$ que funciona en el SLAC, Stanford (EEUU), colisionan en forma asimétrica un electrón y un positrón (cuyas masas son $m = 0.511\,MeV$) con energías de $9.1\,GeV$ y $3.1\,GeV$, respectivamente.
   (a) *(1.1p)* ¿Cuál es la energía total del sistema en el sistema centro de momentos? (Esta es la energía disponible para la creación de nuevas partículas!)
   (b) *(1p)* Supongamos que luego de esta colisión se forman sólo n partículas no masivas. ¿Cuáles son los posibles valores de n?
   (c) *(1.1p)* Supongamos ahora que como producto de esta colisión se forma la partícula $\Upsilon(4S)$ cuya masa es $10.6\,GeV$. ¿A qué velocidad se moverá esta partícula en el sistema del laboratorio? ¿Y en el sistema centro de momentos?

2. *(3.4p)* Un sistema formado por dos bariones, A y B, posee una proyección de espín total sobre el eje z de $3\hbar$ y una carga total nula.
   (a) *(0.8p)* Indique a cuál multiplete de espín corresponde la partícula A y a cuál B.
   (b) *(0.8p)* Sabiendo que la carga de A es $q_A = +1$, ¿cuál o cuáles son los posibles valores de extrañeza de B? ¿Y si fuese $q_A = -1$?
   (c) *(0.8p)* Para el caso de $q_A = +1$, y sabiendo que A posee un solo quark s, escriba la función de onda de A correspondiente a la parte espín-sabor en su máxima proyección de espín sobre el eje z.
   (d) *(1p)* Para el caso de $q_A = +1$ y suponiendo que A posee un solo quark s, calcule el momento magnético de la partícula A.

3. *(3.4p)* La ecuación de Dirac es
$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0.$$
   (a) *(1p)* Utilizando la representación de Weyl (ver *fórmulas*), halle la forma explícita de las soluciones a la ecuación de Dirac para partículas en reposo ($\vec{p} = 0$). (*Ayuda: si hace las cosas bien deberá hallar cuatro soluciones, dos con energía positiva y dos con energía negativa.*)
   (b) *(0.8p)* Muestre una de las virtudes de la representación de Weyl: muestre que, en esta representación, para partículas no masivas, y/o muy relativistas, la ecuación de Dirac se desacopla en dos ecuaciones independientes para el bi-espinor superior y el bi-espinor inferior.
   (c) *(0.8p)* Muestre que –independientemente de la representación– los operadores de proyección sobre quiralidad *left* y *right*
$$P_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma^5}{2}$$
   forman un conjunto completo y ortogonal de operadores de proyección. (Se dice que una partícula tiene quiralidad definida *left* o *right* cuando su cuadri-espinor es autofunción de P_L o P_R, respectivamente.)
   (d) *(0.8p)* Muestre que las soluciones halladas en (a) no tienen quiralidad definida *(0.4p)*, pero si $m = 0$, o sea $\vec{p} \neq 0$, sí existen soluciones de ondas planas de quiralidad definida *(0.4p)*. (Conclusiones de yapa: (i) las soluciones de Dirac para partículas masivas no tienen quiralidad definida, y (ii) la representación de Weyl es ideal para estudiar partículas con quiralidad definida. ¿Y para que puede uno querer estudiar partículas con quiralidad definida?.....Veremos en la segunda parte de la materia que los fermiones elementales del Modelo Estándar son no masivos y de quiralidad definida!)

4. *(extra puntos[1]: (1.2p))* Considere el grupo de las transformaciones de Lorentz y en él el subconjunto de los *boosts* en el eje y.
   (a) *(0.4p)* Argumente que los elementos de este subconjunto forman un grupo (llamémoslo G) y determine la dimensión de G.
   (b) *(0.8p)* Apartir de la representación de G que transforma al cuadrivector posición,
$$\text{representación de } G = \{ \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tal que } \beta \in (-1,1) \text{ y } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \},$$
   halle el o los generadores de G en esta representación.

[1] Estos puntos son sólo válidos para la aprobación del examen, no cuentan para el final.

Representación de Weyl: al igual que la representación usual (que se llama de Dirac), existen otras representaciones para las matrices γ^μ que también satisfacen la condición

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\, g^{\mu\nu},$$

y por lo tanto se pueden utilizar exactamente igual que las matrices usuales para resolver la ecuación de Dirac. En la representación de Weyl tenemos:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Donde σ^i son las matrices de Pauli,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Producto directo de tres representaciones fundamentales de los grupos $SU(2)$ y $SU(3)$:

$$\begin{array}{lrcl} SU(2): & 2 \otimes 2 \otimes 2 & = & 4_S \oplus 2_{M_S} \oplus 2_{M_A} \\ SU(3): & 3 \otimes 3 \otimes 3 & = & 10_S \oplus 8_{M_S} \oplus 8_{M_A} \oplus 1_A \end{array} \tag{3}$$

Momento magnético de un fermión: un fermión de carga q y masa m posee un momento magnético

$$\mu = \frac{q}{2m} \tag{4}$$

Nota: En cada item de cada ejercicio, una justificación y un razonamiento correctos dan la mitad de los puntos, y un resultado correcto da la otra mitad. Se aprueba con 6 puntos o más; entre 5 y 6 puntos es un "Aprobado $-$", que quiere decir que se tiene la oportunidad de recuperar ese punto faltante con el segundo examen; y con menos de 5 puntos no se aprueba el examen.