1^{er}cuatrimestre 2008

Segundo recuperatorio (17/07/2008)

1. *(3.5p)* La ecuación de Dirac es
$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0.$$
   (a) *(1p)* Utilizando la representación de Weyl (ver *fórmulas*), halle la forma explícita de las soluciones a la ecuación de Dirac para partículas en reposo ($\vec{p} = 0$). (*Ayuda: si hace las cosas bien deberá hallar cuatro soluciones, dos con energía positiva y dos con energía negativa.*)

   (b) *(0.9p)* Muestre una de las virtudes de la representación de Weyl: muestre que, en esta representación, para partículas no masivas, y/o muy relativistas, la ecuación de Dirac se desacopla en dos ecuaciones independientes para el bi-espinor superior y el bi-espinor inferior.

   (c) *(0.8p)* Muestre que –independientemente de la representación– los operadores de proyección sobre quiralidad *left* y *right*
$$P_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma^5}{2}$$
   forman un conjunto completo y ortogonal de operadores de proyección. (Se dice que una partícula tiene quiralidad definida *left* o *right* cuando su cuadri-espinor es autofunción de P_L o P_R, respectivamente.)

   (d) *(0.8p)* Muestre que las soluciones halladas en (a) no tienen quiralidad definida *(0.4p)*, pero si $m = 0$, o sea $\vec{p} \neq 0$, sí existen soluciones de ondas planas de quiralidad definida *(0.4p)*. (Conclusiones de yapa: (i) las soluciones de Dirac para partículas masivas no tienen quiralidad definida, y (ii) la representación de Weyl es ideal para estudiar partículas con quiralidad definida, como justamente es el Standard Model.

2. *(2.5p)* Sabiendo que QCD propone una simetría SU(3) de color,

   (a) *(1p)* escriba el lagrangiano que corresponde para el quark u libre.

   (b) *(1.5p)* ¿Cúantos bosones de gauge (gluones) van a ser necesarios para mantener la simetría local?

   En ambos punto justifique sus respuestas en detalle.

3. *(4p)* De los siguientes procesos: (i) diga cuáles son posibles y cuáles no dentro del Modelo Estándar yendo hasta nivel árbol (i.e. sin *loops*); y (ii) en los procesos posibles dibuje al menos un diagrama de Feynman que contribuya al proceso e indique *en cada vértice* cómo es el término del lagrangiano encargado del vértice; en los procesos no posibles explique por qué razón no son posibles.
$$\begin{array}{lccc lccc lccc}
(a) & n & \to & p\,e^-\,\bar{\nu}_e & (b) & e^-\bar{\nu}_e & \to & \mu^-\bar{\nu}_\mu & (c) & e^- & \to & \mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_e \\
(d) & \gamma\gamma & \to & \mu^+e^-\nu_\mu\bar{\nu}_e & (e) & \Upsilon(4S) & \to & B^0\overline{B^0} & (f) & e^-e^+ & \to & u\,\bar{u}
\end{array} \qquad (1)$$
   (En (f) dibuje al menos dos diagramas que contribuyan al proceso.)

   Ayudas: al escribir cada término del lagrangiano correspondiente a cada vértice, deje las contantes numéricas con una letra; no tenga en cuenta los diferentes colores de los quarks, $\Upsilon(4S) = b\bar{b}$ *y* $B^0 = d\bar{b}$. *(Cada proceso vale* 0.66 *puntos.)*

4. *(1.5 puntos extras)* Diga y justifique cuáles de los términos abajo listados pueden agregarse al siguiente lagrangiano manteniendo la simetría de gauge local. Si el término es aceptable interprete su significado físico.
$$L = \psi\bar{\gamma}^\mu D_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D\mu\phi^* D^\mu\phi$$
$$\begin{array}{llllllll}
(a) & -a^2\psi\bar{\psi} & (b) & b|\phi|\psi\bar{\psi} & (c) & \frac{c}{3}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 & (d) & +d^2\psi\psi\bar{\psi} \\
(e) & e\phi\psi\bar{\psi} & (f) & f\psi\bar{\psi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} & (g) & g^4(\phi^*\phi)^2 & (h) & h\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi\gamma^\mu A_\mu
\end{array} \qquad (2)$$
   siendo ψ un campo espinorial, ϕ un campo escalar complejo y $a - h$ constantes reales.

1. **Representación de Weyl:** al igual que la representación usual (que se llama de Dirac), existen otras representaciones para las matrices γ^μ que también satisfacen la condición

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\, g^{\mu\nu},$$

y por lo tanto se pueden utilizar exactamente igual que las matrices usuales para resolver la ecuación de Dirac. En la representación de Weyl tenemos:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donde σ^i son las matrices de Pauli,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Algunas fórmulas que no tendría sentido que se las recuerde de memoria:

$$\begin{aligned} [t^a, t^b] &= i f^{abc} t^c \\ D_\mu &= \partial_\mu - i g A^a_\mu t^a \\ A^a_\mu &\to A^a_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A^b_\mu \alpha^c \\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \end{aligned}$$

Nota: Tiene $3:45\,hs.$ para resolver el examen. En cada item de cada ejercicio, una justificación y un razonamiento correctos dan la mitad de los puntos, y un resultado correcto da la otra mitad. Las ambigüedades se toman como incorrectas. Se aprueba con 6 puntos o más; entre 5 y 6 puntos es un "Aprobado $-$", que quiere decir que se tiene la oportunidad de recuperar ese punto faltante con la nota del 1er parcial/recuperatorio (el que le haya ido mejor); y con menos de 5 puntos no se aprueba el examen. La nota final se redondea a la décima de punto superior más próxima.