Problemas
Teoría de Dispersiones – Colisiones Elásticas [§]

1. Calcular la sección eficaz de dispersión elástica para **bajas energías** de una esfera blanda (*soft sphere*) para un potencial:

$$V(r) = \begin{cases} |V_0| & r \leq a \\ \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Ayuda: Considerar solamente ondas con $l = 0$

   (a) Comparar el resultado con el caso de una esfera dura (*hard sphere*).
   (b) Graficar la sección eficaz en función del valor del potencial V_0.
   (c) Verificar el teorema óptico para muy bajas energías.
   (d) Explicar conceptualmente cómo se relaciona el corrimiento de fase (*phase shift*) con la sección eficaz
   (e) Calcular (sin comparar) la sección eficaz utilizando un método alternativo. ¿En qué casos sería conveniente aplicar éste método de aproximación?
   (f) ¿Qué ecuaciones debería plantear si la energía no fuera muy baja? (no resolverlas, sólo plantear las ecuaciones de contorno iniciales).

2. Sea un electrón con **alta energía**, dispersado elásticamente por un potencial de "esfera dura" (*"hard sphere potential"*):

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & r \leq 2.7 \text{ Å} \\ \\ 0 & r > 2.7 \text{ Å} \end{cases}$$

   (a) Calcular las 4 primeras secciones eficaces parciales (σ_l para $l = 0, 1, 2, 3$) de dispersión.
   (b) Reagrupando los términos, y llevando la sumatoria total a una forma

$$\sum_{l=0}^{ka} l(\sin^2(f(l)) + \cos^2(f(l))) = \sum_{l=0}^{ka} l \approx \frac{(ka)^2}{2} \ ,$$

   calcular la sección eficaz total.

3. Calcular la sección eficaz de dispersión elástica para **bajas energías** de una función delta esférica:

$$V(r) = \alpha\delta(r - a)$$

donde α y a son constantes.

Ayuda: Considerar solamente ondas con $l = 0$

   (a) Comparar el resultado con el caso de una esfera dura (*hard sphere*).
   (b) Verificar el teorema óptico para muy bajas energías.
   (c) Explicar conceptualmente cómo se relaciona el corrimiento de fase (*phase shift*) con la sección eficaz

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/colisiones

(d) Calcular (sin comparar) la sección eficaz utilizando un método alternativo. ¿En qué casos sería conveniente aplicar éste método de aproximación?

(e) ¿Qué ecuaciones debería plantear si la energía no fuera muy baja? (no resolverlas, sólo plantear las ecuaciones de contorno iniciales).

4. Sea un potencial de rango finito a, y sean $u_l(kr)$ las soluciones de la ecuación de Schrödinger dentro de ese rango. Suponga que no sabe las soluciones $u_l(kr)$, pero conoce el valor $u_0(ka)$ (u_l para $l = 0$ en el punto $kr = ka$).

   (a) ¿Puede calcular (con una aproximación aceptable) la sección eficaz total de dispersión elástica σ, para $k = \frac{1}{(10a)}$? (Si no puede – en caso de faltarle algún dato – explique cuál es, suponga que lo tiene y calcule σ).

   (b) ¿Qué datos adicionales (mínimos!) necesita para calcular σ, para $k = \frac{2}{a}$?

   (c) Si cada vez que aumenta la energía de la partícula incidente, se necesita incluir la contribución de un número mayor de ondas parciales, ¿ésto implica que la sección eficaz es una función creciente de k? Defienda su argumento con un ejemplo **numérico**.

   (d) Calcule el valor de la sección eficaz de dispersión elástica para una esfera rígida, en los límites $k \to 0$ y $k \to \infty$. (Si necesita sumar infinitos senos, puede asumir el valor medio $\sin^2 \delta_l = 1/2 \;\; \forall l$).

5. Una partícula con número de onda k es dispersada elásticamente por una esfera repulsiva infinitamente pesada, de radio a.

   (a) ¿Cuántas ondas parciales incluiría en el cálculo de la sección eficaz total de dispersión elástica σ, para $k = \frac{1}{(10a)}$?

   (b) ¿Qué contribución a la sección eficaz σ producen las ondas con $l = 1$ y $l = 2$?

   (c) Repetir **los dos** ítems anteriores para $k = \frac{1}{a}$

   (d) Calcule el valor de la sección eficaz de dispersión elástica para una esfera rígida, en los límites $k \to 0$ y $k \to \infty$. (Si necesita sumar infinitos senos, puede asumir el valor medio $\sin^2 \delta_l = 1/2 \;\; \forall l$).

Apéndice: Algunas propiedades útiles de las funciones esféricas de Bessel (Spherical Bessel functions)

Las tres primeras funciones Spherical Bessel j_l's y Neumann η_l :

l	j_l	η_l
0	$\frac{1}{\rho}\sin\rho$	$-\frac{1}{\rho}\cos\rho$
1	$\frac{1}{\rho^2}\sin\rho-\frac{1}{\rho}\cos\rho$	$-\frac{1}{\rho^2}\cos\rho-\frac{1}{\rho}\sin\rho$
2	$\left(\frac{3}{\rho^3}-\frac{1}{\rho}\right)\sin\rho-\frac{3}{\rho^2}\cos\rho$	$-\left(\frac{3}{\rho^3}-\frac{1}{\rho}\right)\cos\rho-\frac{3}{\rho^2}\sin\rho$

Table 1: Funciones Bessel y Neumann

Sus propiedades asimptóticas para argumentos grandes:

$$\lim_{\rho\to\infty} j_l(\rho)=\frac{1}{\rho}\sin(\rho-\frac{1}{2}l\pi)\ ; \qquad \lim_{\rho\to\infty}\eta_l(\rho)=-\frac{1}{\rho}\cos(\rho-\frac{1}{2}l\pi)\,, \tag{1}$$

propiedades asimptóticas para argumentos chicos:

$$\lim_{\rho\to 0} j_l(\rho)=\rho^l/(2l+1)!!\ ; \qquad \lim_{\rho\to 0}\eta_l(\rho)=-(2l-1)!!/\rho^{l+1}\,. \tag{2}$$

Relaciones de recurrencia (para j_l y η_l):

$$\frac{2l+1}{\rho}j_l(\rho)=j_{l+1}(\rho)+j_{l-1}(\rho) \tag{3}$$