Problemas
Principio de Incertidumbre [§]

1. **Desigualdad de Schwarz**

    1. Demostrar la desigualdad de Schwarz, que dice que si $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son dos vectores arbitrarios en el mismo espacio vectorial, entonces

    $$\langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq | \langle\alpha|\beta\rangle |^2,$$

    y la igualdad sólo se produce si estos vectores son proporcionales.
    Ayuda: Considerar el ket

    $$|\psi\rangle = |\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle.$$

    Siendo este un vector del espacio vectorial, su norma debe ser no–negativa. Elegir el valor

    $$\lambda = -\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}.$$

    2. Dar un ejemplo en que se cumpla esta desigualdad.

2. **Principio de Incertidumbre**

    1. Para dos observables $\hat{A}$ y $\hat{B}$ y un estado cualquiera, pruebe la relación de incerteza generalizada

    $$\left\langle(\Delta A)^2\right\rangle \left\langle(\Delta B)^2\right\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^2 \ ,$$

    donde $\Delta A = \hat{A} - \left\langle\hat{A}\right\rangle$.

    2. Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene cuando el estado en cuestión satisface

    $$\Delta A\,|\alpha\rangle = \lambda\Delta B\,|\alpha\rangle$$

    donde λ es un imaginario puro.

    3. Verifique que la función de onda de un paquete gaussiano, dada por

    $$\langle x'|\alpha\rangle = (2\pi d^2)^{-1/4} \exp\left[\frac{i\,\langle p\rangle\, x'}{\hbar} - \frac{(x' - \langle x\rangle)^2}{4d^2}\right]$$

    satisface la relación de incerteza mínima

    $$\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle} = \frac{\hbar}{2}\ .$$

    Muestre que también se cumple la condición

    $$\langle x'|\Delta x|\alpha\rangle = c\,\langle x'|\Delta p|\alpha\rangle$$

    donde c es un número imaginario.

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/incertidumbre

4. Calcule
$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle \equiv \left\langle \hat{S}_x^2 \right\rangle - \left\langle \hat{S}_x \right\rangle^2$$
donde el valor de expectación es para el estado $|S_z+\rangle$. Usando su resultado, verifique la relación de incerteza generalizada,
$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left|\langle [A,B] \rangle\right|^2$$
con $\hat{A} \rightarrow \hat{S}_x$ y $\hat{B} \rightarrow \hat{S}_y$.

5. Verifique la relación de incerteza con $\hat{A} \rightarrow \hat{S}_x$ y $\hat{B} \rightarrow \hat{S}_y$ para el estado $|S_x+\rangle$.

6. Encuentre la combinacion lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$ que maximiza el producto
$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta S_y)^2 \right\rangle \; .$$
Verifique explícitamente que para la combinación lineal que encontró, la relación de incerteza para $\hat{S}_x$ y $\hat{S}_y$ no se viola.

7. Evalúe $\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle$ para una partícula confinada en un pozo unidimensional
$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$
Hágalo tanto para el estado base como para los estados excitados.