Problemas
Formalismos de la Física Cuántica (3):
Conjuntos Completos de Observables que Conmutan [§]

1. **Conjunto Completo de Observables que Conmutan (CCOC)**

   1. Sean $\hat{A}$ y $\hat{B}$ dos observables. Suponga que los autokets simultaneos de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ $\{|a', b'\rangle\}$ forman un conjunto ortonormal completo de kets base. ¿Se puede siempre concluir que $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela. Si es no, de un contraejemplo.

   2. Considere un espacio de kets tridimensional. Si un dado conjunto de kets ortonormales, digamos $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$, se usan como kets base, los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ están representados por

   $$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Obviamente $\hat{A}$ tiene un espectro degenerado. ¿También lo tiene $\hat{B}$?
   b) Muestre que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan.
   c) Encuentre un nuevo conjunto de kets ortonormales que sean autokets simultaneos de $\hat{A}$ y $\hat{B}$. Especifique los autovalores de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ para cada uno de los tres autokets.

   3. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados está desarrollado en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. En esta base, los operadores $\hat{H}$ y $\hat{B}$ están dados por

   $$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   donde ω_0 y b son constantes reales reales.

   a) $\hat{H}$ y $\hat{B}$ son hermíticos?
   b) $\hat{H}$ y $\hat{B}$ conmutan?
   c) En caso que conmuten, construir una base de autovectores comunes a ambos operadores.
   d) ¿Cuáles de los conjuntos $\{\hat{H}\}$, $\{\hat{B}\}$, $\{\hat{H}, \hat{B}\}$, $\{\hat{H}^2, \hat{B}\}$ son CCOC?

   4. Considerar en el mismo espacio vectorial que el ejercicio anterior, los operadores $\hat{L}$ y $\hat{S}$ que se definen según

   $$L|u\rangle = |u\rangle \quad L|v\rangle = 0 \quad L|w\rangle = -|w\rangle$$
   $$S|u\rangle = |w\rangle \quad S|v\rangle = |v\rangle \quad S|w\rangle = |u\rangle$$

   a) Escribir las matrices que representan a los operadores $\hat{L}$, $\hat{L}^2$, $\hat{S}$, y $\hat{S}^2$ en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$.
   b) ¿Son estos operadores observables?
   c) ¿Cuáles de los conjuntos $\{\hat{L}^2\}$, $\{\hat{S}\}$, $\{\hat{L}^2, \hat{S}\}$ son CCOC?

   5. Dos operadores hermíticos anticonmutan, es decir que $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = 0$. ¿Es posible tener un autoket común de $\hat{A}$ y $\hat{B}$? Pruebe o ilustre su conclusión.

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/ccoc

6. Dos observables $\hat{A}_1$ y $\hat{A}_2$, que no involucran explícitamente el tiempo, no conmutan ($[\hat{A}_1, \hat{A}_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con el hamiltoniano ($[\hat{A}_1, \hat{H}] = [\hat{A}_2, \hat{H}] = 0$). Pruebe que los autoestados de energía son, en general, degenerados. ¿Hay excepciones? Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $\hat{A}_1 \to \hat{L}_z$ y $\hat{A}_2 \to \hat{L}_x$.