Problemas
Momento Angular [§]

1. **Calculos básicos**
   (a) Demostrar las siguientes expresiones:
      i. $[\hat{L}_z, x] = i\hbar y$, $[\hat{L}_z, y] = -i\hbar x$, $[\hat{L}_z, z] = 0$
      ii. $[\hat{L}_z, p_x] = i\hbar p_y$, $[\hat{L}_z, p_y] = -i\hbar p_x$, $[\hat{L}_z, p_z] = 0$
      iii. $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$
      iv. $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$
   (b) Utilizando las expresiones anteriores, calcular:
      i. $[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$, $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$
      ii. $\hat{L} \times \hat{L}$ (comparar con el resultado clásico y explicar)
      iii. $[\hat{L}^2, \hat{L}]$
      iv. $[\hat{L}_z, r^2]$ $(r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$
      v. $[\hat{L}_z, p^2]$
      vi. El conmutador de $H = p^2/2m + V(r)$ con $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$
   (c) Calcular los autovalores y autovectores del operador $(a\ \hat{S}_y + b\ \hat{S}_z)$, donde a y b son constantes reales.

2. **Algunas propiedades**
   (a) Mostrar que $\hat{L}_x$ y $\hat{L}^2$ son Hermíticos
   (b) Si $[\hat{A}, \hat{L}_x^2] = [\hat{A}, \hat{L}_y^2] = 0$, ¿Cuánto vale $[\hat{A}, \hat{L}^2]$?
   (c) Supongamos que un sistema está rotando en el espacio, y que medimos su momento angular. ¿Es posible que hallemos el valor $L = \hbar\sqrt{7}$?
   (d) Supongamos que encontramos que $L^2 = 30\hbar^2$. Luego medimos L_z. ¿Qué valores vamos a encontrar?

3. **Representaciones del momento angular**
   (a) Expresar la matriz $\hat{L}_x$ en la base de autofunciones del momento angular, para $l = 0, 1, 2$
   (b) Expresar la matriz $\hat{L}_\pm$ en la base de autofunciones del momento angular, para $l = 0, 1, 2$

4. **Spin 1**
   (a) Considere una partícula de espín 1.
      i. Escribir la representación matricial de $\hat{S}_i$ en la base de z
      ii. Mostrar que $\hat{S}_z^3 = \hat{S}_z$
      iii. Mostrar que $(\hat{S}_x \pm i\hat{S}_y)^3 = 0$
   (b) Considere una partícula de espín 1. Evalúe los elementos de matriz de $\hat{S}_z(\hat{S}_z + \hbar)(\hat{S}_z - \hbar)$ y de $\hat{S}_x(\hat{S}_x + \hbar)(\hat{S}_x - \hbar)$ sin usar la representación matricial de $\hat{S}_x$. Comprobar el resultado utilizando la representación matricial.
   (c) Una partícula de $S = 1$ está sometida al Hamiltoniano

$$\hat{H} = a\ \hat{S}_z + b\ \hat{S}_x^2,$$

   donde a y b son constantes.

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/momentoangular

   i. Calcular los niveles de energía del sistema.
   ii. A tiempo $t = 0$ el sistema está en un autoestado de S, con $\hat{S}_z = \hbar$. Calcular los valores de expectación $\langle \hat{S}_i \rangle (t)$.

5. **Sumatoria de momentos angulares**
   Demostrar que si $\hat{J}_1$ y $\hat{J}_2$ son dos momentos angulares, entonces la suma de ellos $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$ también lo es.

6. **Principio de Incertidumbre**
   Calcular el producto de las dispersiones $\Delta \hat{J}_x \; \Delta \hat{J}_y$

7. **Autofunciones simultáneas de momentos angulares**
   Demostramos antes que $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$. Esto significa que se pueden encontrar autofunciones simultáneas de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$. Los pasos para hallar esas funciones son los siguientes:

   (a) Definimos $\hat{L}_\pm \equiv \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$
      i. demostrar: $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hbar \hat{L}_\pm$
      ii. demostrar: $[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$
      iii. demostrar que si f es una autofunción de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$, entonces la función $\hat{L}_\pm f$ también lo es. ¿Cuáles son los autovalores?

   (b) Demostrar que $\hat{L}^2 = \hat{L}_\pm \hat{L}_\mp + \hat{L}_z^2 \mp \hbar \hat{L}_z$

   (c) Supongamos entonces que f son las autofunciones simultáneas que buscamos $\hat{L}^2 f = \lambda f$ y $\hat{L}_z f = \mu f$. Entre estas f, existe una f_t a la cual, si se le aplica el operador $\hat{L}_+ f_t = 0$ (esto es debido a que la componente z del vector L no puede exceder su módulo). Supongamos que para ésta función se obtiene: $\hat{L}_z f_t = \hbar l_{max} f_t$ y $\hat{L}^2 f_t = \lambda f_t$. l_{max} es el máximo autovalor que puede tener el operador $\hat{L}_z$. Demostrar (aplicando la expresión anterior de $\hat{L}^2$) que $\lambda = \hbar^2 l_{max}(l_{max} + 1)$.

   (d) Repetir el paso, pero para el caso $\hat{L}_- f_b = 0$. En este caso $\hat{L}_z f_b = \hbar l_{min} f_b$ y $\hat{L}^2 f_b = \lambda f_b$. Demostrar que $\lambda = \hbar^2 l_{min}(l_{min} - 1)$.

   (e) Igualar las dos expresiones de λ y encontrar la relación entre l_{max} y l_{min}

   (f) Conclusión: Por medios *puramente algebraicos* hemos determinado los autovalores de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$, aún sin saber nada de sus autofunciones. Sintetizar los resultados.

8. **Operadores Escalera**
   Vimos que estos operadores cambian el autovalor de $\hat{L}_z$ en una unidad de $\hbar$:

$$\hat{L}_\pm f_l^m = A_l^m f_l^{m\pm 1}$$

   (a) ¿Son Hermíticos estos operadores?

   (b) ¿Cuánto vale A_l^m?

   (c) ¿Cuánto vale A_l^m en la cima y en el fondo de la escalera?

   (d) Dado el armónico esférico $Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{15/(8\pi)} \sin\theta \cos\theta \; e^{i\phi}$, calcular $Y_2^2(\theta, \phi)$.

9. **Autofunciones del momento angular**

   (a) Expresar $\hat{L}_z$ en coordenadas esféricas

   (b) Expresar $\hat{L}_\pm$ en coordenadas esféricas

(c) Suponer que la autofunción del momento angular Y_l^l se puede escribir como:

$$Y_l^l(\theta,\phi) = f_l^l(\theta)e^{il\phi}.$$

Aplicar $\hat{L}_+ Y_l^l(\theta,\phi) = 0$ y demostrar que

$$Y_l^l(\theta,\phi) = c_l(\sin\theta)^l e^{il\phi}.$$

10. **Por qué l no puede ser semi–entero**:

(a) Supongamos que $l = 1/2$. Vimos antes que a partir de $\hat{L}_+ Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi) = 0$ se llega a

$$Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi) = c_{1/2}\sqrt{\sin\theta}e^{i\frac{\phi}{2}}$$

(b) Aplicar $\hat{L}_-$ a $Y_{1/2}^{1/2}$ y construir $Y_{1/2}^{-1/2}$

(c) Suponer que $Y_{1/2}^{-1/2}$ se puede escribir $Y_{1/2}^{-1/2}(\theta,\phi) = f(\theta)e^{-i\frac{\phi}{2}}$. Aplicar $\hat{L}_- Y_{1/2}^{-1/2} = 0$ y verificar que se obtiene una $Y_{1/2}^{-1/2}$ distinta a la hallada anteriormente. Esto prueba que l no puede ser $1/2$.

11. **Elementos de matriz del momento angular**
De los siguientes elementos de matriz, expresar (utilizando principios de conservación) cuáles son los elementos nulos, y calcular el resto.

(a) $\langle 00 \mid Y_2^0 \mid 10\rangle$
(b) $\langle 10 \mid Y_2^0 \mid 10\rangle$
(c) $\langle 11 \mid Y_2^1 \mid 21\rangle$
(d) $\langle 00 \mid Y_1^1 \mid 11\rangle$
(e) $\langle 00 \mid Y_1^1 \mid 1(-1)\rangle$
(f) $\langle 00 \mid \Pi \mid 00\rangle$
(g) $\langle 11 \mid \Pi \mid 11\rangle$
(h) $\langle 00 \mid \Pi \mid 10\rangle$

12. **Cambio de Base**

(a) Construir, a partir de los armónicos esféricos Y_l^m, las autofunciones de $\hat{L}_x$, que llamaremos F_l^m. El procedimiento consta de tres etapas:
   i. Expresamos las funciones Y_l^m en coordenadas cartesianas
   ii. Realizamos una rotación de variables: $z \to x$, $x \to y$, $y \to z$
   iii. Pasamos nuevamente el resultado a coordenadas esféricas

(b) Realizar un procedimiento análogo y obtener las autofunciones G_l^m de $\hat{L}_y$.

(c) Sin hacer cálculos explícitos, indicar el resultado de aplicar $\hat{L}_x$ y $\hat{L}_y$ a las funciones F y G, para $l = 0, 1$

(d) Comprobar los resultados con el cálculo explícito.