Problemas
Rotaciones y Spin [§]

1. Definimos

$$\hat{U}_R(\mathbf{\hat{n}},\theta) = \exp\left(-\frac{i}{2}\ \theta\ \mathbf{\hat{n}}\cdot\hat{\sigma}\right) \tag{1}$$

   (a) Calcular $\langle \hat{S}_i\rangle_{R_x}$ en el sistema rotado alrededor del eje x, en función de los $\langle \hat{S}_i\rangle$ del sistema original

   (b) Calcular los valores de expectación para una rotación de $\theta = 2\pi$

   (c) Calcular $\hat{U}_R(\mathbf{\hat{x}}, 2\pi)|\alpha\rangle$, para un ket $|\alpha\rangle$ general.

2. Usando las propiedades de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli, pruebe la identidad

$$(\hat{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\hat{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\ \hat{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\ ,$$

   donde **a** y **b** son dos vectores complejos en tres dimensiones.

3. Muestre que el operador rotación para un sistema de espín 1/2 en la base $\{|+\rangle\,,|-\rangle\}$ se puede escribir como

$$\mathcal{D}(\mathbf{\hat{n}},\phi) = \exp\left(-i\frac{\hat{S}\cdot\mathbf{\hat{n}}\ \phi}{\hbar}\right) = \hat{I}\cos\frac{\phi}{2} - i\ \hat{\sigma}\cdot\mathbf{\hat{n}}\ \sin\frac{\phi}{2}\ ,$$

   donde $\hat{I}$ es la matriz identidad.

4. Escriba explícitamente la matriz de 2×2 que representa la rotación $\mathcal{D}(\mathbf{\hat{n}},\phi)$.

5. Sea $\mathbf{\hat{n}}$ el versor definido por los ángulos polares α y β según se muestra en la figura. Aplíque al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado para obtener el estado $\left|\hat{S}\cdot\mathbf{\hat{n}},+\right\rangle$, que representa un espín orientado según $\mathbf{\hat{n}}$. Compare el resultado con el obtenido diagonalizando la matriz $\hat{S}_n$.

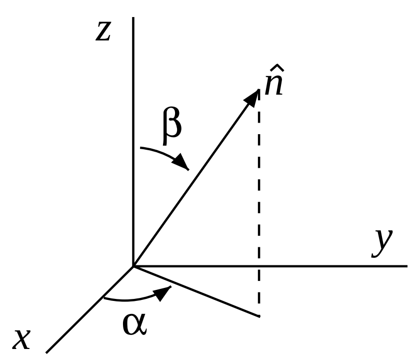

Figure 1: Caracterización de un vector.

6. Utilizando las propiedades de las matrices de Pauli, la definición (1), y la forma explícita de la matriz de rotación, probar que

$$\hat{U}_R^\dagger(\mathbf{\hat{n}},\theta)\ \hat{\sigma}\ \hat{U}_R(\mathbf{\hat{n}},\theta) = \mathbf{\hat{n}}(\mathbf{\hat{n}}\cdot\hat{\sigma}) - \mathbf{\hat{n}}\times(\mathbf{\hat{n}}\times\hat{\sigma}) + \mathbf{\hat{n}}\times\hat{\sigma}\ \sin(\theta) \tag{2}$$

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/rotaciones

7. Considere la matriz de 2×2

$$U = \frac{a_0 + i\hat{\sigma} \cdot \mathbf{a}}{a_0 - i\ \hat{\sigma} \cdot \mathbf{a}} \ ,$$

donde a_0 es un número real, y $\mathbf{a}$ es un vector de 3 componentes reales.

(a) Pruebe que U es unitaria y unimodular.

(b) En general, una matriz unitaria unimodular de 2×2 representa una rotación en tres dimensiones. Encuentre el eje y el ángulo de rotación para U en términos de a_0 y las componentes del vector $\mathbf{a}$.

8. Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de espín 1/2 representada por

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}}, \alpha)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{y}}, \beta)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}}, \gamma) \ .$$

(a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z \alpha}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_y \beta}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_z \gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

9. Una autofunción del momento angular (general) $|j, m = m_{\max} = j\rangle$ es rotada un ángulo infinitesimal ϵ alrededor del eje y. Sin utilizar la forma explícita de la matriz de rotación, calcular la probabilidad de encontrar el estado rotado en su posición original (en orden ϵ^2).