

Selección de resultados de Teoría de grupos

1. Dé una definición de 'simétrico' que valga tanto para un objeto, como para un sistema y como para un hamiltoniano, y muestre que la definición matemática de Grupo se puede adaptar como el marco teórico correcto para tratar problemas con simetrías.
2. El grupo $SU(2)$ se lo puede visualizar (y también se lo puede definir) a través de su representación fundamental que es el grupo de matrices de 2×2 unitarias de determinante igual a uno.

- (a) Muestre que esta representación de $SU(2)$ forma un grupo.
- (b) Muestre que cualquier elemento de esta representación se puede obtener a través de la exponenciación imaginaria de un vector del espacio vectorial generado por la base $\{\frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_2, \frac{1}{2}\sigma_3\}$. O sea, si $g \in \text{rep. fundamental de } SU(2)$ entonces existe $\vec{\theta} \in R^3$ tal que $g = e^{i\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}}$. Nota: en estos casos se llama 'espacio tangente a la identidad' al espacio vectorial, se llaman 'generadores del grupo' a los elementos de la base $(\{\frac{1}{2}\sigma_i\}_{i=1,2,3})$, y se lo llama 'Grupo de Lie' a esta clase de grupos. Observe que, debido a la exponencial, hay una biyección entre el espacio vectorial y el grupo.
- (c) En el grupo se puede definir una distancia entre elementos en función de la distancia —definida de la manera usual— entre los $\vec{\theta}$ que le corresponden a cada elemento. Muestre que cualquier elemento del grupo puede ser generado con productos de elementos de cualquier entorno de la identidad.
- (d) Muestre que los generadores del grupo satisfacen un álgebra en la cual el producto de dos elementos viene dado a través del conmutador de ellos,

$$[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j] = i\epsilon^{ijk}\frac{1}{2}\sigma_k.$$

Nota: el álgebra de los generadores de un grupo de Lie es lo que generalmente se llama álgebra de Lie, y los $i\epsilon^{ijk}$ son en este caso las constantes de estructura del grupo.

3. Tome ahora el grupo $SO(3)$, cuya representación fundamental viene dada por las matrices reales ortogonales de 3×3 . (O sea, el grupo de rotaciones tridimensionales.)
 - (a) Halle los generadores de este grupo de Lie.
 - (b) Halle las constantes de estructura de este grupo y compárelas con las de $SU(2)$ del problema anterior. Nota: cuando dos grupos de Lie tienen las mismas constantes de estructura entonces son localmente isomorfos. ¿Puede mostrar eso? (*)
4. Muestre que el tensor antisimétrico de rango y dimensión 2, ϵ_{ab} , es invariante ante cualquier matriz de la representación de $SU(2)$ de dimensión 2 según

$$U^\dagger \epsilon U^* = \epsilon.$$

(Ayuda: muéstrelo para U 's en un entorno de la identidad y luego muestre que debe valer para cualquier $U \in SU(2)$. Este truco es muy útil en demostraciones que tienen que ver con grupos de Lie.)

5. Sean dos subespacios de Hilbert $\mathcal{H}_{1,2}$ con estados posibles $|\phi_{i=1\dots n}\rangle$ y $|\psi_{j=1\dots m}\rangle$, respectivamente.
 - (a) Muestre que si el sistema es tal que su estado puede ser alguno de $\mathcal{H}_1$ o de $\mathcal{H}_2$ entonces la base de estados posibles para el sistema son $n + m$ estados. Halle estos estados. (En este caso se dice que el sistema se halla en un estado de la suma directa $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.)
 - (b) Muestre que si en cambio el sistema es tal que es una combinación de $\mathcal{H}_1$ y de $\mathcal{H}_2$, o sea por ejemplo que hay una partícula en $\mathcal{H}_1$ y otra en $\mathcal{H}_2$ que no interactúan entre sí, entonces la base de estados posibles para el sistema son $n \cdot m$ estados. Halle estos estados. Reflexione sobre cómo a pesar de que las partículas no interactúan se pueden formar estados que no corresponden a una partícula en un estado y la otra en otro, sino que están entrelazados los sistemas. (En este caso se dice que el sistema se halla en un estado del producto directo $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.)

6. Se define como producto directo de matrices a $a \otimes b$ del siguiente modo

$$(a \otimes b)_{rs} = a_{ij} b_{kl}$$

donde los índices r y s valen $r = ik = 11, 12, 13, \dots, 1n, 21, 22, \dots, 2n \dots mn$ (suponiendo que $i = 1 \dots m$ y $k = 1 \dots n$) y $s = jl$ en modo análogo. O sea, por ejemplo, si $a \in R^{2 \times 2}$ y $b \in R^{3 \times 3}$ entonces

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{11}b_{33} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} & a_{12}b_{33} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{21}b_{33} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{22}b_{33} \end{pmatrix}$$

- (a) Muestre que esta definición implica que cualquier operación que se realice sobre uno de los espacios de Hilbert factor del producto directo es independiente de lo que se realice sobre el otro espacio. O sea, que

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (a \cdot c) \otimes (b \cdot d)$$

- (b) Halle que en efecto esta definición de producto directo de matrices sirve para operar sobre el espacio de Hilbert producto directo $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, para esto halle cuál es la base correcta de estados del espacio producto directo.

- (c) Hagamos un ejemplo concreto que haga entender todo. Tome un elemento del grupo $SU(2)$ y sea a la matriz que lo representa en la representación de 2×2 y b la matriz que lo representa en la representación de 3×3 . Realice el producto directo $a \otimes b$ y luego haga el cambio de base que le indica la tabla de Clebsch-Gordan y verifique que la matriz resultante se divide en bloques y representa la transformación sobre el espacio suma directa resultante. Si hizo las cosas bien habrá mostrado que $2 \otimes 3 = 2 \oplus 4$ (o en la notación de la tabla de Clebsch-Gordan: $1/2 \otimes 1 = 1/2 \oplus 3/2$.)

7. Usando una tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan, muestre que si a los estados cuánticos se los rotula según bajo qué representación del grupo $SU(2)$ transforman, de acuerdo con la siguiente notación

- 1 = representación trivial de $SU(2)$ (p.ej. el singlete)
- 2 = representación de $SU(2)$ de spin $s = \frac{1}{2}$ (la fundamental)
- 3 = representación de $SU(2)$ de spin $s = 1$ (p.ej. triplete)
- 4 = representación de $SU(2)$ de spin $s = \frac{3}{2}$,
- etc..

entonces vale que

$$\begin{aligned} 2 \otimes 2 &= 1 \oplus 3 \\ 1 \otimes 2 &= 2 \\ 2 \otimes 2 \otimes 2 &= 2 \oplus 2 \oplus 4. \end{aligned}$$

y calcule

$$\begin{aligned} 2 \otimes 4 &= ? \\ 2 \otimes 3 &= ? \end{aligned}$$

¿Cómo interpretaría estos resultados en término de representación *matricial* del grupo $SU(2)$?(*)

8. Muestre que los números 1, i , -1 , $-i$ forman un grupo abeliano finito $\mathcal{G}$, y que las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son una representación de 2×2 de $\mathcal{G}$.

9. Muestre que las tres matrices $(J_i)_{m_1, m_2} = \langle jm_1 | J_i | jm_2 \rangle$, $i = 1, 2, 3$, $m_1, m_2 = -j, \dots, j$ son una representación irreducible de dimensión $2j + 1$ del álgebra de Lie de $SU(2)$, donde $J_1 = (J_+ + J_-)/2$, $J_2 = (J_+ - J_-)/2i$, y

$$J_+ |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \quad J_- |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \quad J_3 |jm\rangle = m |jm\rangle$$

Construya explícitamente las 3 matrices J_i de 6×6 y verifique que satisfacen el álgebra de $SU(2)$, p. ej $[J_1, J_2] = iJ_3$. A partir de la fórmula de Hausdorff, http://en.wikipedia.org/wiki/Baker-Campbell-Hausdorff_formula, sin más cuentas, muestre que el conjunto continuo $U(\vec{\theta}) = \exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{J})$ de matrices de $(2j+1) \times (2j+1)$ es una representación del grupo $SU(2)$.

10. En el ej.6 se vio que el espacio de dimensión 8 obtenido como producto directo de 3 representaciones fundamentales de $SU(2)$ es reducible y se descompone en suma directa de un espacio de dimensión 4 y dos de dimensión 2: $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$. Utilizando coeficientes de Clebsch-Gordan, y llamando $\{\uparrow, \downarrow\}$ a la base de la representación fundamental, muestre que la transformación lineal de la base producto a la base suma directa está dada por

$$\begin{cases} |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}}(2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(2|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle) \end{cases}$$

Por aplicación de los operadores de subida y bajada verifique que estos tres subespacios son en efecto irreducibles.

11. Sea H un hamiltoniano invariante ante un grupo $SU(2)$ y sean $|i\rangle$ y $|f\rangle$ dos estados cuánticos que transforman ante este grupo bajo las representaciones J_i y J_f , con autovalores de J_z iguales a M_i y M_f , respectivamente,

$$\begin{aligned} |i\rangle &\sim |J_i, M_i\rangle \\ |f\rangle &\sim |J_f, M_f\rangle. \end{aligned}$$

Muestre que el elemento de matriz $\mathcal{M} = \langle f | H | i \rangle$ es diferente de cero si y sólo si se cumple que $J_i = J_f$ y $M_i = M_f$. Es más, muestre que $\mathcal{M}$ sólo depende de $J_{i,f}$ y no de $M_{i,f}$.

12. Discuta cuáles son las diferencias más importantes desde el punto de vista matemático entre las ecuaciones de Newton y de Schrödinger. Indique qué ventajas le da entender Teoría de grupos para enfrentar la ecuación de Schrödinger.