Problemas
Atomo de Hidrógeno y potenciales centrales [§]

1. Calcular el radio, la energía y la longitud de onda de la transición $n = 2 \to n = 1$ de los siguientes sistemas de 2 partículas:
(Calcular significa con unidades !!)
   (a) H^2 (hidrógeno pesado = deuterón + electrón)
   (b) He^+
   (c) positronio
   (d) mesonio ($m_\mu = 207\ m_e$)

2. Sean $\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$ las soluciones del átomo de hidrógeno. Sean $R_{nl} = \frac{u_{nl}}{r}$ las funciones radiales reducidas.
   (a) Mostrar que u_{10}^2 tiene un máximo en $r = a_0$ (el radio de Bohr).
   (b) Calcular la posición para la cual la densidad de probabilidad es máxima, para el estado $n = 2$, $l = 1$.
   (c) Calcular el valor medio $\langle r \rangle$ en dicho estado
   (d) Si no coinciden, explicar por qué hay diferencias

3. Dibujar:
   (a) Dibujar las funciones radiales R_{nl}, para $n = 1, 2, 3$
   (b) Dibujar las funciones radiales reducidas P_{nl}, para $n = 1, 2, 3$
   (c) Calcular $< r >$ para el estado fundamental del Hidrógeno.
   (d) Calcular $< 1/r >$ para el estado fundamental del Hidrógeno. ¿Es igual a $1/ < r >$? ¿Por qué?
   (e) Repetir con $< r^2 >$
   (f) Calcular $< r >$ para los estados $1s$, $2s$, $3s$, $3p$, $3d$, y chequear los resultados con los gráficos.

4. Un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado $n = 2$, $l = 1$, $m_l = \pm 1$.
   (a) ¿A qué distancia del núcleo la probabilidad de hallar el electrón es máxima?
   (b) Calcular $\langle r \rangle$ y $\langle \frac{1}{r} \rangle$
   (c) Calcular los valores medios de las energías (cinética, potencial y total) para ese estado.

5. Un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado

$$\Psi(r, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{100}(r) e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \psi_{211}(r) e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}$$

   (a) ¿Qué valores de E, L^2 y L_z se pueden medir de este estado, y con qué probabilidad?
   (b) Calcular $\langle E(t = 49 \text{ sec}) \rangle$

6. Encontrar la energía mas baja y el menor radio de inflexión (*classical turning point*) para el átomo de hidrógeno en estados con $l = 6$

7. Encontrar la densidad de probabilidad para un estado con $E = 3.40$ eV.

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/hidrogeno

8. Un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado

$$\Psi(r,0) = \frac{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}{(2a_0)^{3/2}} \left[e^{-r/a_0} + A\frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} (-iY_1^1 + Y_1^{-1} + \sqrt{7} Y_1^0) \right]$$

   (a) Calcular el valor de normalización A
   (b) Calcular la probabilidad de medir $\hbar^2 l(l+1)$ en una medición de L^2
   (c) Calcular la densidad de probabilidad $P_r(r)$ de encontrar el electrón en una capa dr alrededor del protón
   (d) Calcular el radio en el cual P_r es máximo
   (e) Calcular la energía media
   (f) Supongamos que se mide $L_z|\Psi(r,t=0)\rangle$ y resulta un valor $+\hbar$. ¿Cuánto vale $\Psi(r,t>0)\rangle$?
   (g) ¿Y si el resultado anterior fue $L_z|\Psi(r,t=0)\rangle = 0$?

9. Usando la regla de recursión, demostrar que la solución radial del átomo de hidrógeno cumple con

$$R_{n(n-1)} = N_n r^{n-1} e^{-r/(na_0)} \tag{1}$$

10. Mostrar que un estado estacionario nl del átomo de hidrógeno cuyo momento angular es máximo

   (a) $\langle r \rangle = a_0 n(n+\frac{1}{2})$
   (b) $\langle r^2 \rangle = a_0^2 n^2 (n+1)(n+\frac{1}{2})$
   (c) Usar los resultados anteriores para mostrar que si n y l son muy grandes el electrón está localizado cerca de la superficie de una esfera de radio $a_0 n^2$ y su energía es igual a la de un electrón clásico
   (d) Calcular el valor mas probable del radio para $l = n-1$

11. La función de onda de un átomo de hidrógeno es:

$$\Psi = \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}} Z^{3/2} (6 - Zr) Zr e^{-\frac{Zr}{3}} \cos\theta$$

   (a) Determinar los valores de los números cuánticos n, l y m_l de Ψ por inspección.
   (b) Generar otra función con los mismos valores de n y l, pero con $m_l + 1$.
   (c) Determinar el valor más probable de r en el estado especificado por Ψ, para $Z = 1$.

12. **Oscilador Armónico isotrópico en 3–d**

    (a) Hallar el espectro y la degeneración de los estados de un oscilador armónico isotrópico en 3 dimensiones, en coordenadas cartesianas, para los primeros estados con $N = n_x + n_y + n_z \leq 4$

    (b) Dibujar el espectro en un gráfico N vs. l para un oscilador armónico tridimensional.

    (c) Comparar la degeneración de los estados en coordenadas esféricas, con los obtenidos en coordenadas cartesianas.

    (d) Señalar la paridad de los estados en coordenadas esféricas.

13. **Funciones esféricas de Bessel**

    (a) Mostrar por derivación directa, que $j_2(kr)$ es solución del problema de partícula libre.

    (b) Mostrar para el caso de $l = 2$, que se cumplen los siguientes límites:

    $$\lim_{\rho\to\infty} j_l(\rho) = \frac{1}{\rho}\sin\left(\rho - \frac{1}{2}l\pi\right) ; \qquad \lim_{\rho\to\infty} n_l(\rho) = -\frac{1}{\rho}\cos\left(\rho - \frac{1}{2}l\pi\right) ,$$

    para argumentos pequeños, los límites son,

    $$\lim_{\rho\to 0} j_l(\rho) = \rho^l/(2l+1)!! ; \qquad \lim_{\rho\to 0} n_l(\rho) = -(2l-1)!!/\rho^{l+1} .$$

14. ** Calcular el estado básico de hidrógeno en la representación de momento. Ayuda: Usar coordenadas esféricas con el eje en la dirección de p. Hacer la integral de θ primero.

    $$\Phi(p) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2a_0}{\hbar}\right)^{3/2}\frac{1}{\left[1 + (\frac{a_0 p}{\hbar})^2\right]^2}$$

    (a) Graficar la función

    (b) Chequear la normalización

    (c) Calcular $\langle p^2 \rangle$

    (d) Calcular $\langle T \rangle$ (chequear teorema virial)

15. En las figuras siguientes están dibujadas las soluciones radiales $\Psi_{nl}(r)$ y las funciones radiales reducidas $P_{nl}(r) = r\Psi_{nl}(r)$, para los orbitales $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$, $3d$, $4s$, $4p$ y $4d$ del átomo de Hidrógeno. Identificar cada figura.

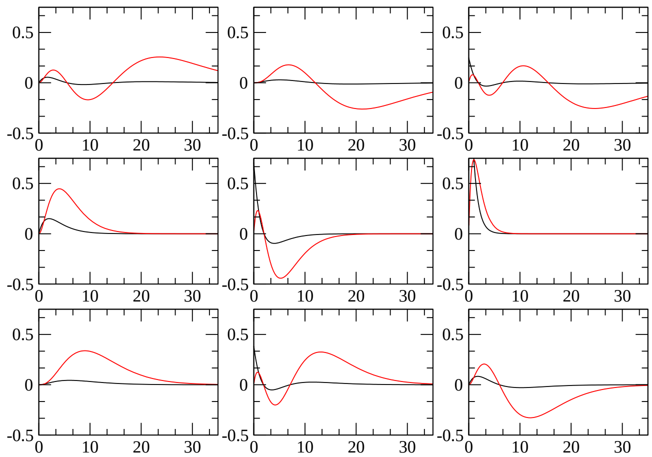

Figure 1: Soluciones radiales del átomo de Hidrógeno.