Problemas
Partículas Idénticas [§]

1. **Operadores Permutación**
   Se define el operador permutación para un sistema de dos partículas, no idénticas pero con espacio de estado isomórficos (o sea, se pueden representar usando una base común):
   $$\hat{P}_{21}|u_i u_j\rangle \equiv |u_j u_i\rangle$$
   Demostrar:
   (a) $\hat{P}_{21}^2 = 1$
   (b) $\hat{P}_{21}$ es su propio inverso
   (c) $\hat{P}_{21}$ es Hermítico
   (d) $\hat{P}_{21}$ es unitario
   (e) sus autovalores son reales (hallarlos!).

2. **Permutación y Paridad**
   Considerar un sistema de dos partículas con un vector relativo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.
   (a) Mostrar que $\hat{P}_{21}\psi(\mathbf{r}) = \hat{P}\psi(\mathbf{r})$, donde $\hat{P}$ es el operador paridad.
   (b) ¿Se puede decir que la paridad es un *buen número cuántico* en la representación de la energía?
   (c) Dos partículas interactúan bajo un potencial $V(r)$, y se conoce que el sistema está en el estado $R_{43}(r)Y_3^0(\theta,\phi)$. ¿Cuál es la simetría del estado?

3. **Proyectores de simetría ("simetrizadores")**
   En el mismo sistema anterior definimos los operadores:
   $$\hat{S} \equiv \frac{1}{2}(1+\hat{P}_{21}) \quad \hat{A} \equiv \frac{1}{2}(1-\hat{P}_{21})$$
   Demostrar:
   (a) $\hat{S}^2 = \hat{S}$
   (b) $\hat{A}^2 = \hat{A}$
   (c) $\hat{S}^\dagger = \hat{S}$
   (d) $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$
   (e) $\hat{S}\hat{A} = \hat{A}\hat{S} = 0$
   (f) $\hat{S} + \hat{A} = 1$
   (g) Para un ket arbitrario $|\psi\rangle$,
      i. $\hat{S}|\psi\rangle$ es simétrico
      ii. $\hat{A}|\psi\rangle$ es antisimétrico
      iii. $\hat{S}\hat{P}_{21}|\psi\rangle = \hat{S}|\psi\rangle$
      iv. $\hat{A}\hat{P}_{21}|\psi\rangle = -\hat{A}|\psi\rangle$

4. **Transformación de observables por permutaciones**
   Demostrar que para un sistema de dos partículas como el anterior:
   (a) $\hat{P}_{21}\hat{B}(1)(\hat{P}_{21})^\dagger = \hat{B}(2)$
   (b) $\hat{P}_{21}[\hat{B}(1)+\hat{C}(2)](\hat{P}_{21})^\dagger = \hat{B}(2)+\hat{C}(1)$
   (c) $\hat{P}_{21}[\hat{B}(1)\hat{C}(2)](\hat{P}_{21})^\dagger = \hat{B}(2)\hat{C}(1)$
   (d) si un observable es simétrico, conmuta con el operador de permutación

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/identicas

5. **Operadores de permutación para N partículas**
   (a) Encontrar todos los operadores de permutación posibles para un sistema de 3 partículas
   (b) Demostrar que $\hat{P}_{123} = 1$
   (c) Demostrar que $(\hat{P}_{312})^{-1} = \hat{P}_{231}$
   (d) Encontrar algúnos de estos operadores que sean igual a sus inversas
   (e) Demostrar que $\hat{P}_{312}\hat{P}_{132} = \hat{P}_{321}$
   (f) Calcular $[\hat{P}_{312}, \hat{P}_{132}]$

6. **Operadores de transposición para N partículas**
   Demostrar que el operador de permutación $\hat{P}_{312}$ se puede escribir como un producto de operadores de transposición:

$$\hat{P}_{312} = \hat{P}_{132}\hat{P}_{213} = \hat{P}_{321}\hat{P}_{132} = \hat{P}_{213}\hat{P}_{321} = \hat{P}_{132}\hat{P}_{213}(\hat{P}_{132})^2 = \cdots$$

7. **Simetrizadores para N partículas**
   (a) Encontrar la expresión para los operadores de simetría para el caso de N partículas
   (b) De las propiedades enunciadas para los proyectores de simetría en sistemas de dos partículas, ¿cuáles se siguen cumpliendo en sistemas de N partículas?

8. **Degeneración de intercambio, de simetría y accidental**
   (a) Calcular los autoestados correspondientes a dos partículas distinguibles (aunque tienen la misma masa), que no interactúan entre sí, en un pozo infinito unidimensional, con energía $E = 13\ E_1$.
   (b) Para una partícula en un pozo infinito de 2 dimensiones, se definen los estados *anti/simétricos* como

$$\Psi_S(x, y) = \Psi_S(y, x) \qquad ; \qquad \Psi_A(x, y) = -\Psi_A(y, x).$$

   Escribir los estados Ψ_A y Ψ_S que tienen una energía $E = 29\ E_1$.
   (c) Construir los estados de una partícula en un pozo infinito de 2 dimensiones rectangular (sus anchos son a y $2a$), cuyas energías sean $E = 5\ E_1$.

9. **2 partículas en un pozo unidimensional**
   (a) Supongamos que dos partículas con masas $m_1 \neq m_2$ se encuentran, en t_0 en el estado

$$\Psi(x1, x2, t_0) = \frac{3\psi_5(x_1)\psi_4(x_2) + 7\psi_9(x_1)\psi_8(x_2)}{\sqrt{58}}$$

   i. ¿Qué valores de energía se pueden medir y con qué probabilidad?
   ii. Calcular la probabilidad de encontrar la partícula de m_1 en el intervalo $(0, L/2)$ a t_0.
   iii. Si se mide $E = E_{5,4}$, expresar la función de onda para un tiempo t.

   (b) Si las partículas fueran idénticas, comparar las probabilidades de encontrar una partícula en un intervalo dado, para una función simétrica y una antisimétrica.

(c) Demostrar que para dos partículas idénticas en un pozo infinito unidimensional, el valor medio de la separación interpartícula

$$d^2 \equiv (x_1 - x_2)^2$$

cumple con

$$\langle d^2 \rangle_S \leq \langle d^2 \rangle_A$$

10. Suponer dos partículas que no interactúan entre sí en un pozo de potencial infinito (unidimensional). Encontrar las funciones de onda de los primeros estados (incluir la degeneración) y sus correspondientes energías para los casos en que:
    (a) las partículas son distinguibles
    (b) las partículas son Fermiones idénticos
    (c) las partículas son Bosones idénticos

11. Considerar 3 partículas cuyos estados individuales ortonormales son $|\varphi\rangle$, $|\xi\rangle$ y $|\omega\rangle$. Encontrar la función de onda correspondiente, cuando las partículas son Bosones y en los casos:
    (a) $|\varphi\rangle \neq |\xi\rangle \neq |\omega\rangle$
    (b) $|\varphi\rangle = |\xi\rangle \neq |\omega\rangle$
    (c) $|\varphi\rangle = |\xi\rangle = |\omega\rangle$

12. Repetir el problema anterior, pero ahora las partículas son Fermiones.

13. Calcular la energía del estado fundamental de un sistema compuesto por N partículas de spin 1/2. Calcular la energía de Fermi.

14. Dos partículas de igual masa están confinadas por un potencial de oscilador armónico unidimensional, cuya distancia característica es x_c. Una de las partículas se encuentra en el estado $n = 0$, y la otra en $n = 1$.
    (a) Encontrar la raiz cuadratica media (*root mean square*) de la distancia entre las partículas
        i. para partículas no–idénticas
        ii. para Bosones idénticos
        iii. para Fermiones idénticos
    (b) Calcular la probabilidad de encontrar ambas partículas en un rango $[x_c/5]$ alrededor del centro
        i. para partículas no–idénticas
        ii. para Bosones idénticos
        iii. para Fermiones idénticos

15. Suponer un átomo de He en el cual un electrón está en el estado ψ_{100m_s} y el otro en el $\psi_{21m_lm_s}$.
    (a) Construir los estados posibles (de dos electrones)
    (b) Describir el espectro, incluyendo la repulsión entre los dos electrones

16. Dos electrones se mueven en un pozo infinito unidimensional.
    (a) Escribir la función de onda (y su energía) del estado fundamental, si suponemos que el sistema está en el estado triplet

(b) Suponer que está en el singlet

(c) Suponer que se aplica una interacción atractiva del tipo

$$V = -\lambda\delta(x_1 - x_2).$$

Describir cómo se modifican los niveles de energía obtenidos anteriormente, en primer orden perturbativo.

17. **Determinantes de Slater**

    (a) Escribir las funciones de onda de los términos correspondientes a la configuración $1s2s$ del Helio.

    (b) Escribir la función del ^1S como combinación lineal de determinantes de Slater de los *"orbitales spin"*.
    Solución: $\Psi(^1S) = (1s\overline{2s}) - (\overline{1s}2s)$

    (c) Generar la función de onda del estado $1s^22s\ ^1S_{(1/2,-1/2)}$ del Li.

18. **Regla de Hund**

    (a) Experimentalmente se determina que el estado fundamental del Cr ($Z = 24$) es un multiplet de degeneración 7. Escribir el nivel correspondiente.

    (b) De acuerdo a la regla de Hund, escribir el estado fundamental del C ($Z = 6$).

    (c) De acuerdo a la regla de Hund, escribir el estado fundamental del O ($Z = 8$).

    (d) Comprobar si los elementos de $Z = 11$ a $Z = 18$ ("configuración de Neón") satisfacen la regla de Hund.

19. **Para y Orto Helio**
    Expresar el valor medio de la energía de interacción electroestática del Helio, en función de las energías de Coulomb y de intercambio, para las funciones radiales del Para/Orto Helio.