# Problemas
## Tensores Esféricos y Teorema de Wigner–Eckart [§]

1. **Operadores Tensoriales**

   (a) Considerar un operador $\hat{V}$ que satisface las relaciones de conmutación

   $$\left[\hat{L}_i, \hat{V}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{V}_k$$

   i. Probar que $\exp\left(-i\phi\hat{L}_x/\hbar\right)$ es un operador de rotación correspondiente a una rotación alrededor del eje $x$, en un ángulo $\phi$
   Ayuda: Considerar el operador

   $$\hat{X}_i \equiv e^{-\frac{i\phi\hat{L}_x}{\hbar}}\hat{V}_i e^{\frac{i\phi\hat{L}_x}{\hbar}}$$

   y mostrar que la derivada

   $$\frac{d\hat{X}_i}{d\phi} = -\frac{i}{\hbar}e^{-\frac{i\phi\hat{L}_x}{\hbar}}\left[\hat{L}_x, \hat{V}_i\right]e^{\frac{i\phi\hat{L}_x}{\hbar}} = \epsilon_{xij}\hat{X}_j \ .$$

   De allí se obtienen todas las componentes de $\hat{X}$, que corresponden a la rotación pedida.

   ii. Probar que

   $$e^{\frac{i\pi\hat{L}_x}{\hbar}}|lm\rangle = |l-m\rangle$$

   Ayuda: Rotar $\hat{L}_z$ en un ángulo $\phi = \pi$ y obtener $-\hat{L}_z$

   iii. Mostrar que una rotación en un ángulo $\pi$ alrededor del eje $z$ se puede obtener rotando el eje $x$ en $\pi/2$, luego el $y$ en $\pi$ y finalmente, el $x$ en $-\pi/2$
   Ayuda: Rotar $(\hat{L}_y)^n$ y mostrar que es equivalente a $(\hat{L}_z)^n$

   (b) Señalar cuál de estos operadores cumple con la propiedad que define a un operador vectorial

   $$\mathcal{D}^\dagger(R)\hat{A}_i\mathcal{D}(R) = \sum_j R_{ij}\hat{A}_j$$

   i. $\hat{J}$
   ii. $\hat{p}$
   iii. $\hat{r}$

   (c) Un operador tensorial esférico debe cumplir con

   $$\begin{aligned}\left[J_z, T_q^{(k)}\right] &= \hbar q T_q^{(k)} \\ \left[J_\pm, T_q^{(k)}\right] &= \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}T_{q\pm1}^{(k)} \ .\end{aligned}$$

   Comprobar que las siguientes combinaciones de vectores son tensores esféricos

   $$\begin{aligned}T_0^{(0)} &= \frac{U_{+1}V_{-1} + U_{-1}V_{+1} + U_0V_0}{3} \\ T_{\pm2}^{(2)} &= U_{\pm1}V_{\pm1} \\ T_{\pm1}^{(2)} &= \frac{U_{\pm1}V_0 + U_0V_{\pm1}}{\sqrt{2}} \\ T_0^{(2)} &= \frac{U_{+1}V_{-1} + 2U_0V_0 + U_{-1}V_{+1}}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

[§] http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/teoricaII/tensores

$$\begin{aligned} J_{\pm 1}^{(1)} &= \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(J_x \pm iJ_y\right) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} J_\pm \\ J_0 &= J_z \end{aligned}$$

(d) Una forma de construir tensores esféricos es utilizando los armónicos esféricos y un vector. En este caso

$$T_q^{(k)} = Y_{l=k}^{m=q}(V)$$

i. Utilizar el vector $r = (x, y, z)$ y construir los tensores de rango 1.

ii. Chequear que efectivamente son tensores esféricos.

(e) Otra forma de construir un tensor esférico (irreducible) de rango $k$ es combinando dos tensores esféricos irreducibles $X_{q_1}^{(k_1)}$ y $Z_{q_2}^{(k_2)}$ de la forma

$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1}\sum_{q_2}\langle k_1 k_2; q_1 q_2 | k_1 k_2; kq\rangle X_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)} \ .$$

i. Construir los tensores $T_{\pm 1,0}^{(1)}$ siendo $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Z}$ dos vectores ($\mathbf{X} = (X_x, X_y, X_z)$)

ii. Construir un tensor esférico de rango 2 con los mismos vectores.

2. **Teorema de Wigner–Eckart**

Recordamos al teorema de Wigner–Eckart

$$\langle \alpha', j'm' | T_q^{(k)} | \alpha, jm\rangle = \langle jk; mq | jk; j'm'\rangle \frac{\langle \alpha' j' || T^{(k)} || \alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}} \ ,$$

y el teorema de proyección

$$\langle \alpha', jm' | V_q | \alpha, jm\rangle = \frac{\langle \alpha', jm | J\cdot V | \alpha, jm\rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle jm' | J_q | jm\rangle \ .$$

(a) Evaluar el elemento matriz

$$\hat{A} = e\langle \alpha, j, m' | (x^2 - y^2) | \alpha, j, m = j\rangle$$

en función del momento cuadrupolar eléctrico

$$\hat{Q} = e\langle \alpha, j, m = j | (3z^2 - r^2) | \alpha, j, m = j\rangle.$$

Ayuda: Los tensores esféricos de rango 2 se pueden escribir

$T_{+2}^{(2)} = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + ixy \qquad T_{-2}^{(2)} = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - ixy$

$T_{+1}^{(2)} = -(xz + izy) \qquad T_{-1}^{(2)} = xz - izy$

$T_0^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{6}}(2z^2 - x^2 - y^2)$