

# Actividad III.35 - Física de la caída de un imán permanente por un tubo conductor

---

## Objetivo

Estudio experimental del pasaje de un imán permanente por una espira y de la caída libre de un imán permanente por un tubo conductor. Determinación de velocidad final del imán dentro del tubo. Interpretación de los resultados usando las leyes del electromagnetismo.

## Introducción

Una de las demostraciones más llamativas es la caída de un imán potente (por ejemplo, uno de tierras raras) dentro de un tubo de cobre o aluminio de paredes gruesas. A pesar que entre el imán y estos metales no existe una atracción magnética, la caída del imán dentro del tubo es significativamente retardada por la fuerza originada por la interacción entre las corrientes inducidas en el tubo por el movimiento del imán y el imán. Este experimento es una notable demostración del efecto de la ley de Lenz. El propósito de estos experimentos es realizar un estudio cuantitativo de los efectos que ocurren en este proceso. Dada la importancia de las propiedades magnéticas del imán que se usa, la primera parte de este experimento se dedica a determinar el momento magnético del imán. Luego, se propone estudiar la forma de los pulsos inducidos por el imán al atravesar una espira y por último se sugiere el estudio de la caída del imán por un tubo metálico.

## Proyecto 1.- *Determinación del momento magnético de un imán permanente.*

**Equipamiento recomendado:** Un imán de tierras raras, una bobina de Helmholtz, una fuente de alimentación dc. Opcional: un fotointerruptor y un sistema de adquisición de datos asociado a una PC.

Como se verá en los siguientes proyectos, el conocimiento del momento magnético  $m_B$  de un imán es muy importante para entender cuantitativamente la física asociada a los efectos producidos por un imán permanente. Por lo tanto, es necesario conocer el valor de esta magnitud<sup>[1,2]</sup>. Desde luego existen muchos métodos experimentales para conocer este valor.

### a) **Oscilación de un imán permanente en el centro de una bobina de Helmholtz.**

Una bobina de Helmholtz consiste de dos espiras circulares de radio  $R$  y separadas por una distancia igual a su radio. Si ambas espiras tienen un número de

arrollamientos igual a  $N$  y por ambas espiras circula una misma corriente  $I$  (en el mismo sentido), se tiene que el campo magnético en el centro de las espiras misma es extremadamente constante dentro de un volumen de radio  $R^3$ . El valor de este campo viene dado por:<sup>[1-3]</sup>

$$B_z(z) = \mu_0 \cdot \frac{8}{\sqrt{125}} \cdot \frac{N \cdot I}{R} \quad (35.1)$$

Si en el centro de este par de Helmholtz colgamos de un hilo al imán permanente, el mismo se orientará, al igual que la flecha de una brújula, en la dirección del campo magnético  $B$  de la bobina (35.1). Para colgar el imán es conveniente usar un hilo liviano y blando, que no ejerza un torque apreciable al torcerlo (por ejemplo, hilo de cocer). Si el imán se perturba de su posición de equilibrio, el mismo comenzará a oscilar. El campo magnético ejercerá un torque restaurador dado por:

$$\tau = m_B \cdot B \cdot \text{sen} \theta \approx m_B \cdot B \cdot \theta . \quad (35.2)$$

En todo lo que sigue supondremos que las oscilaciones son pequeñas de modo que con buena aproximación podemos reemplazar  $\text{sen} \theta$  por  $\theta$ . La frecuencia natural de oscilación vendrá dada por:

$$\omega_0^2 = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{m_B \cdot B}{I} \quad (35.3)$$

donde  $I$  representa el momento de inercia del imán,  $m_B$  su momento dipolar y  $B$  el valor del campo externo (producido por las bobinas de Helmholtz). El momento de inercia puede ser determinado conociendo la masa y la geometría del imán. Es preciso tener algunos cuidados para pesar un imán. Para evitar influencias espurias o magnetizar la balanza, es conveniente usar un vaso liviano de plástico invertido sobre la balanza y pesar el imán sobre el mismo, de modo que su campo interactúe lo menos posible con la balanza. El período de oscilación  $T$  puede medirse directamente midiendo el tiempo de un número  $n$  de oscilaciones o usando algún dispositivo como un fotointerruptor o una bobina que capte la oscilación del mismo (conectada a una PC). Se debe tener cuidado que el dispositivo de medida (fotointerruptor, bobina, etc. no contenga partes ferromagnéticas). Si se realiza un gráfico de  $I \cdot \omega_0^2$  en función de  $B$ , la pendiente de este gráfico nos da el valor buscado de  $m_B$ .<sup>[4]</sup>

b) **Usando un Gaussímetro o sonda Hall.** Otra técnica para determinar  $m_B$  consiste en medir el campo del imán en la dirección del eje  $z$  (tomamos el eje  $z$  coincidente con la dirección de  $m_B$ ) y en una dirección perpendicular al mismo (eje  $x$ ). Recordando que para un dipolo tenemos:<sup>[1-4]</sup>

$$B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2m_B \cdot \frac{\cos \theta}{r^3} \quad (35.5)$$

y

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot m_B \cdot \frac{\text{sen} \theta}{r^3} \quad (35.6)$$

los valores de  $B_z(z)$  y  $B_z(x)$  se pueden escribir como:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2m_B \cdot \frac{1}{z^3} \quad (35.7)$$

y

$$B_z(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot m_B \cdot \frac{1}{x^3} \quad (35.8)$$

Ajustando estas expresiones a los datos experimentales se puede determinar  $m_B$ . Para un imán de longitud  $L$  la expresión (35.7) se puede mejorar por la expresión:<sup>[5]</sup>

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m_B}{L} \cdot \left[ \frac{1}{(z-L/2)^2} - \frac{1}{(z+L/2)^2} \right] \quad (35.9.a)$$

Esta expresión se reduce a (35.7) para  $L \rightarrow 0$ . Si se tiene en cuenta el radio del imán,  $a$ , puede usarse:<sup>[6]</sup>

$$B_z(z) = \mu_0 \cdot \frac{M}{2} \cdot \left[ \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2 + (z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2 + (z-L/2)^2}} \right] \quad (39.9.b)$$

donde  $M$  es el momento magnético por unidad de volumen del imán,  $M = m_B/V$ , y la distancia  $z$  se mide desde el centro del imán.

- Determine  $m_B$  para el imán elegido usando el método que le resulte más apropiado y estime su incertidumbre.

## Proyecto 2.- Estudio experimental de pulsos inducidos por un imán al atravesar una espira

**Equipamiento recomendado:** Un imán de tierras raras, un tubo de vidrio o acrílico, una bobina de unas 30 vueltas. Un sistema de adquisición de datos asociado a una PC.

En este experimento nos proponemos estudiar la forma del pulso de tensión inducida en una bobina o espira exploradora cuando el imán la atraviesa con distintas velocidades. Para realizar este proyecto es útil disponer de un tubo no conductor, preferiblemente transparente (acrílico o vidrio) y de diámetro interno mayor que el imán, de modo que el mismo pueda caer en su interior sin rozar las paredes. Es conveniente disponer de una espira de unas 30 vueltas sobre el tubo, que pueda deslizarse a lo largo de mismo, o bien varias bobinas de este tipo distribuidas cada 10 cm aproximadamente, todas ellas conectadas en serie. La espira o espiras pueden realizarse usando alambre de cobre esmaltado de 0.2 a 0.1 mm de diámetro. El tubo se cuelga como indica la Fig. 35.1. Al final del mismo se cuelga un peso que mantiene la verticalidad del mismo. También es útil disponer de algún recipiente para recibir el imán, ya que mucho de estos imanes de tierras raras son muy frágiles. Una sugerencia

práctica consiste en rodear al imán con una cinta autoadhesiva transparente que impide que el imán pueda girar dentro del tubo y dando así mayor estabilidad a la caída; al mismo tiempo la cinta puede protegerlo mecánicamente. La espira o espiras se conectan a la entrada de un sistema de adquisición de datos por computadora que pueda registrar los pulsos generados al pasar el imán por las distintas espiras. Si la señal eléctrica tiene mucho ruido y dispone de un amplificador de instrumentación (diferencial), puede utilizarlo entre la espira y la entrada del sistema de toma de datos. Esto último no es crucial y puede suplirse aumentando el número de vueltas de cada espira.

Si dispone de un fotointerruptor, colóquelo en la parte superior y conectado a otra entrada del sistema de toma de datos. Este fotointerruptor genera una señal cuando el imán inicia su caída. De este modo, el tiempo entre la señal del fotointerruptor y el cruce por cero de la señal de la espira, determina el tiempo de caída,  $t$ , del imán. Este tiempo y la distancia  $y$  entre la entrada del tubo (posición del fotointerruptor) y la posición de la espira definen la velocidad de paso del imán por la espira. Suponiendo que la caída se realiza con aceleración constante, la velocidad  $v$  del imán al atravesar la espira será:

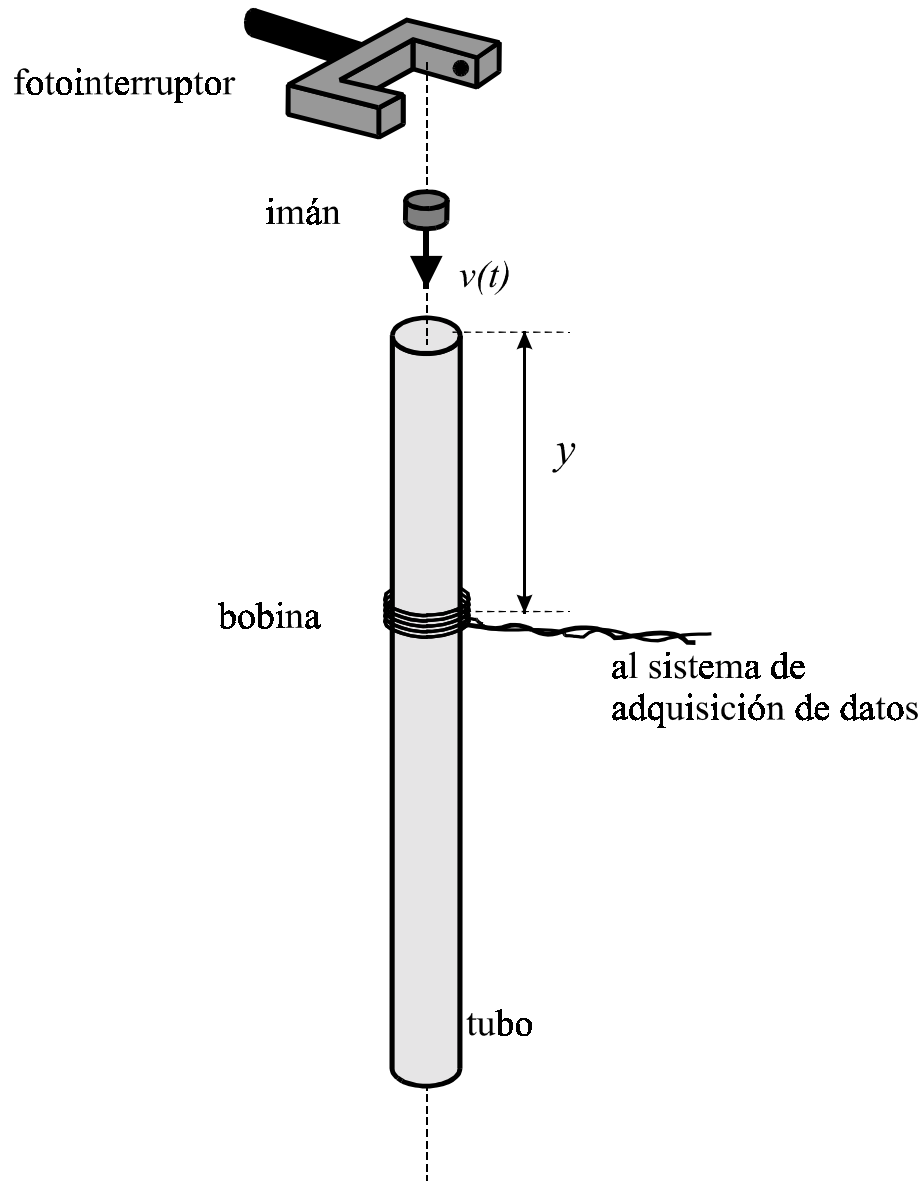
$$v = \frac{2 \cdot x}{t} \quad (35.10)$$

Usando la ley de inducción de Faraday en combinación con un modelo del campo magnético de imán, Ec.(35.8), es posible obtener una expresión que da el valor de la tensión generada en una espira de radio  $R$  y  $N$  vueltas, cuando un imán de momento  $m_B$  y longitud  $L$  la atraviesa con una velocidad  $v$ . Este expresión se deduce en detalle en la Ref. [5], y se expresa como:

$$\varepsilon(z) = v \cdot N \cdot m_B \cdot \frac{R^2}{2 \cdot L} \cdot \mu_0 \cdot \left\{ \frac{1}{\left( (z + L/2)^2 + R^2 \right)^{3/2}} - \frac{1}{\left( (z - L/2)^2 + R^2 \right)^{3/2}} \right\}. \quad (35.11)$$

Si tomamos como origen de tiempo el punto en que el imán está en el centro de la espira (cuando la tensión inducida pasa por cero), y suponiendo que durante el paso del imán la velocidad es constante e igual a  $v$ , tenemos que la tensión inducida variará en el tiempo como:

$$\varepsilon(t) = v \cdot N \cdot m_B \cdot \frac{R^2}{2 \cdot L} \cdot \mu_0 \cdot \left\{ \frac{1}{\left( (v \cdot t + L/2)^2 + R^2 \right)^{3/2}} - \frac{1}{\left( (v \cdot t - L/2)^2 + R^2 \right)^{3/2}} \right\} \quad (35.12)$$



**Figura 35.1** Diagrama del dispositivo experimental sugerido.

El objetivo de este proyecto es someter a prueba experimental las expresiones (35.10) y (35.11). Se supone que los parámetros  $N$ ,  $R$ ,  $v$ ,  $L$  y  $m$  son conocidos o medibles.

Usando estas últimas expresiones se puede obtener el valor de la integral de  $\underline{g}(t)$  entre 0 e infinito,  $I_\varepsilon$ , el resultado es:<sup>[5]</sup>

$$I_\varepsilon = \int_{t=0}^{\infty} \varepsilon(t) \cdot dt = N \cdot m_B \cdot \mu_0 \cdot \left\{ \frac{1}{(L^2 + 4R^2)^{1/2}} \right\} \quad (35.13)$$

- Realice el experimento para distintos valores de  $v$  y registre los pulsos de tensión inducidos en las espiras por el paso del imán.
- A partir de sus mediciones y usando (35.10) y (35.11) compare los valores de la tensión medidos con los calculados. Discuta el grado de acuerdo o desacuerdo.
- Calcule en cada caso el valor experimental de  $I_e$  realizando una integración numérica de los datos de tensión inducida en función del tiempo. Represente gráficamente  $I_e$  en función de la velocidad  $v$ . Compare en el mismo gráfico con los valores predichos por (35.13).

### Proyecto 3.- Caída de un imán permanente por un tubo conductor

**Equipamiento recomendado:** Un imán de tierras raras, un tubo de aluminio o cobre de por lo menos 2 mm de pared. Una bobina de unas 100 vueltas deslizable o, mejor, varias espiras (de aproximadamente 30 vueltas) distribuidas uniformemente a lo largo del tubo. Un sistema de adquisición de datos asociado a una PC.

El objetivo de este experimento es estudiar la forma de los pulsos de tensión inducidos en las espiras,  $V(t)$ , cuando el imán pasa a través de las mismas y medir la velocidad límite,  $v_\infty$ , que adquiere el imán por el tubo. A partir de estas mediciones, nos proponemos desarrollar un modelo teórico que explique y conecte esta información experimental.

Para este proyecto se puede usar una disposición experimental similar al indicado en la Fig. 35.1, excepto que el tubo esta vez es de un material conductor no ferromagnético. Se puede utilizar o bien una bobina o espira deslizable a lo largo del tubo, o bien varias espiras fijas equiespaciadas a lo largo del tubo. Una posibilidad interesante, aunque no imprescindible, consiste en disponer de una espira realizada sobre un receso torneado en el tubo, de modo que la espira quede posicionada en el centro de la pared del tubo. De este modo la señal captada por esta espira es más representativa del campo que genera las corrientes en el tubo. En nuestro caso supondremos que el tubo tiene un radio medio (en el centro de la pared)  $a$ , la conductividad del material es  $\sigma$  y el espesor de la pared es  $\delta$ . También suponemos que el imán tiene un momento magnético  $m_B$ , masa  $m$  y longitud  $L$ . La espira que mide la tensión del pulso,  $V(t)$ , tiene  $N$  espiras y su radio es  $a_e \approx a$ . Todos estos parámetros en principio son conocidos o medibles.

El problema de la caída de un imán por un tubo fue estudiado por varios autores.<sup>[7-9]</sup> Dado que la fuerza que frena al imán es proporcional a la velocidad  $v$  del imán,<sup>[8-10]</sup> es decir:  $F_M = K \cdot v$ , el imán caerá finalmente con una velocidad constante dada por:

$$v_\infty = \frac{m \cdot g}{K} \quad (35.14)$$

Esta velocidad puede medirse a partir de los intervalos de tiempo que separan los distintos pulsos inducidos y la distancia entre las espiras.

Las corrientes inducidas en el tubo están relacionadas con la *fem* inducida,  $\varepsilon(t)$ , en las espiras. Esta *fem* también está relacionada con la componente azimutal del campo  $E_\theta$  por:

$$E_\theta(z) = \frac{\varepsilon(z)}{2\pi \cdot a} \quad (35.15)$$

Por conservación de la energía, cuando el imán alcanza su velocidad límite, la variación de energía gravitatoria del imán se usa en el calentamiento del tubo (potencia Joule), es decir:<sup>[7]</sup>

$$P = v_\infty \cdot m \cdot g = v \cdot \frac{\sigma \cdot \delta}{2\pi \cdot a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(t) \cdot dt . \quad (35.16)$$

de donde se puede obtener una expresión que relaciona la fuerza magnética con la tensión inducida en las espiras:

$$F_M = m \cdot g = \frac{\sigma \cdot \delta}{2\pi \cdot a \cdot N^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V^2(t) \cdot dt \quad (35.17)$$

También es posible calcular la velocidad límite a partir del conocimiento de la magnitud de la componente radial del campo magnético del imán en la posición de la pared del tubo  $B_r(z)$ , la relación es:<sup>[7]</sup>

$$v_\infty = \frac{mg}{2\pi \cdot a \cdot \sigma \cdot \delta \cdot \int B_r^2(z) \cdot dz} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} V^2(t) dt}{(2\pi \cdot a)^2 \cdot N^2 \cdot \int B_r^2(z) \cdot dz} \quad (35.18)$$

Este campo  $B_r(z)$  puede obtenerse realizando un modelo del imán o bien por medición directa de esta magnitud. A su vez, el valor de este campo también se relaciona con el valor de la tensión inducida en las espiras:

$$V(t) = N \cdot \varepsilon(t) = 2\pi \cdot N \cdot a \cdot E_\theta(t) = 2\pi \cdot N \cdot a \cdot v \cdot B_r[z(t)]. \quad (35.19)$$

De este modo es posible conectar tanto la forma de los pulsos  $V(t)$  con la velocidad límite  $v_\infty$  y el valor del campo  $B_r(z)$ .

- Determine el perfil de velocidad del imán en el tubo y determine el valor de la velocidad límite  $v_\infty$ .
- Usando la Ec.(35.17) determine el valor de la fuerza magnética  $F_M$ . Usando esta fuerza encuentre la variación de velocidad del imán en su caída  $v(t)$ .
- De ser posible, determine el perfil de velocidades experimental a medida que el imán cae por el tubo y realice un gráfico de  $v$  en función de  $z$ . Superponga en este gráfico el perfil de velocidad obtenido a partir de la fuerza  $F_M$ .

Compare también el perfil de velocidades en este caso con el que observó cuando el tubo no era metálico, Proyecto 2.

- Usando el método que le resulte más conveniente o posible, ya sea por medición directa o por la elaboración de un modelo, determine el valor de  $B_r(z)$ . Usando las expresiones (35.18) y (35.19) compare la implicancia de este campo con la forma del pulso medido  $V(t)$  y el valor de  $v_\infty$  encontrado experimentalmente y discuta sus conclusiones.
- Analice cómo sería la velocidad límite  $v_\infty$  de un conjunto de imanes idénticos que se hicieran caer por el tubo (imanes apilados, pegados por la interacción magnética). Si dispone de varios imanes idénticos, realice el experimento arrojando dos, tres, etc., imanes por vez, y discuta los resultados.<sup>[8]</sup>

**Nota:** Los valores de resistividad eléctrica del Al y del Cu a temperatura ambiente son:

$$\rho_{\text{Al}} = 2.83 \mu\Omega\text{-cm}$$

$$\rho_{\text{Cu}} = 1.72 \mu\Omega\text{-cm}$$

## Bibliografía

1. E. M. Purcell, *Berkeley physics course, volumen 2, Electricidad y Magnetismo* (Reverté, Barcelona, 1969).
2. M. Alonso y E. J. Finn, *Física, vol.II, Campos y Ondas* (Fondo Educativo Interamericano, Mexico, 1970; ed. inglesa de Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967).
3. J.D. Jackson, *Electrodinámica clásica* (Alambra, S.A., Madrid, 1971; ed. Inglesa, J. Wiley and Sons, New York, 1991).
4. J. Bisquert, E. Hurtado, S. Mafé and J. Pina, "Oscillation of a dipole in a magnetic field: An experiment," *Am. J. Phys.* **58**, 838 (1990); *ibid.* **59**,567 (E) (1991).
5. J. Manzanares, *et al.*, "An experiment on magnetic induction pulses," *Am. J. Phys.* **62**, 702 (1994).
6. C. Navau and A. Sánchez, "Magnetic levitation of superconductors in the critical state," *Phys. Rev.* **B58**, 963 (1998).
7. C. S. Mac Latchy, P. Backman and L. Bogan "A quantitative magnetic braking experiment," *Am. J. Phys.* **61**, 1096 (1993).



7. W.M. Saslow, "Maxwell's theory of eddy current in thin conducting sheets, and applications to electromagnetic shielding and MAGLEV," *Am. J. Phys.* **60**, 693 (1992).
8. C. A. Sawicki, "A Lenz's law experiment revisited," *Phys. Teach.* **38**, 439 (2000).
9. C. A. Sawicki, "A dynamic demonstration of Lenz's law," *Phys. Teach.* **35**, 47 (1997)