Actividad III.44 - Estudio de las corrientes de Foucault – Eddy Currents

Campos electromagnéticos cuasiestacionaria en conductores

Objetivo

Las corrientes de Foucault,[1-6] o corrientes parásitas o "Eddy Currents", son corrientes circulan en el interior de conductores como consecuencia de campos magnéticos variables con el tiempo en los mismos. La potencia Joule disipada en los mismos varía aproximadamente como el cuadrado de la frecuencia del campo aplicado.[5,6] Este efecto se usa por ejemplo en los llamados hornos de inducción, de gran utilidad en la industria que funcionan a altas frecuencias ($f \approx 400$ kHz) y con grandes corrientes[7]. El lector seguramente habrá notado que los núcleos o armaduras de los transformadores eléctricos están construidos laminadas aisladas, lo cual reduce considerablemente las perdidas de potencia que se producen como consecuencia de las corrientes Foucault. Estas corrientes también son la base del funcionamiento de los detectores de metales de los aeropuertos y otros detectores de metales que se usan el las playas, en la exploraciones mineras y por los constructores para detectar caños e hierros de las estructuras de las construcciones. Estas corrientes son asimismo la base del funcionamiento de sistemas de levitación magnética, como los trenes MAGLEV.[6,7] Finalmente, las corrientes de Foucault se usan en numerosos ensayos no destructivos que se emplean para inspeccionar la integridad física de piezas metálicas y soldaduras. Estas corrientes tienden a circular por la superficie de los conductores y son muy eficientes el apantallar los campos electromagnéticos variables con el tiempo. Cuando corrientes alternas de altas frecuencias (mayores que algunos KHz) circulan por conductores, las corrientes tienden a circular por la superficie de los mismos, incrementándose esta tendencia al aumentar la frecuencia. Este efecto (efecto piel o "skin"o Kelvin) produce que la resistencia de los conductores aumente notablemente con la frecuencia, de modo que para altas frecuencias a veces resulta ventajoso usar conductores huecos.

En los siguientes proyectos experimentales nos proponemos estudiar algunas características básicas de los efectos de los campos electromagnéticos variables lentamente en presencia de conductores. Estos estudios son de gran interés tanto teórico como práctico. También, a través de estos estudios nos proponemos lograr cierta familiaridad con un instrumento de mucha utilidad en los laboratorios modernos, el Lock-in Amplifier. Este instrumento permite realizas mediciones de gran precisión y sensibilidad de señales cuya variación en el tiempo es conocida. También nos permite medir la variación en fase de una señal de entrada con respecto a sus salida. Esto es particularmente útil cuando estamos interesados de determinar la variación en frecuencia de una admitancia compleja de un sistema.

Introducción

Campos electromagnéticos cuasiestacionaria en conductores

Las ecuaciones de Maxwell para un medio material, en el sistema SI son[1-9]:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{K\varepsilon_0} \qquad (1) \qquad\qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad (3) \qquad\qquad \nabla \times B = +\mu_0 \mu_r \cdot J + \mu_0 \mu_r K \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \qquad (4)$$

Aquí, ε_0 y μ_0 son la permitividad y permeabilidad del vacío respectivamente mientras que K es la contante dieléctrica del medio y μ_r su permitividad magnética relativa. Estas ecuaciones junto con la fuerza de Lorentz

$$F = q \cdot (E + v \times B) \qquad (5)$$

y la ecuación constitutiva

$$J = \sigma \cdot E\,,^{\#} \qquad (6)$$

donde J es la densidad de corriente y σ la conductividad del medio, nos permiten encontrar los campos electromagnéticos en presencia de medios conductores. Aplicando el operador $\nabla \times$ a las ecuaciones (2) y (4), es fácil obtener las siguientes expresiones para los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$:[3,6]

$$\nabla^2 E - \sigma \mu_0 \mu_r \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \mu_r K \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \qquad (7)$$

y

$$\nabla^2 B - \sigma \mu_0 \mu_r \cdot \frac{\partial B}{\partial t} + \mu_0 \mu_r K \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0\ . \qquad (8)$$

Como

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \qquad (9)$$

y

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}\,, \qquad (10)$$

para el caso de campos alternos de la forma:

$$E(r,t) = E(r)\exp(-i\omega t) \qquad (11)$$

las expresiones (7) y (8) se reducen a:

$$\nabla^2 E(r) + \left(\frac{4\pi^2 \mu_r K}{\lambda^2} + i\frac{2}{\delta^2} \right) \cdot E(r) = 0 \qquad (12)$$

$$\nabla^2 B(r) + \left(\frac{4\pi^2 \mu_r K}{\lambda^2} + i\frac{2}{\delta^2} \right) \cdot B(r) = 0 \qquad (13)$$

con

$$\delta^2 = \frac{2}{\sigma \cdot \mu_0 \mu_r \omega} \text{ en SI} \quad \text{y} \quad \delta^2 = \frac{c^2}{2\pi \cdot \sigma \cdot \mu_0 \mu_r \omega} \text{ en CGS} \qquad (14)$$

El parámetro δ tiene dimensiones de longitud y se conoce como longitud de penetración. En las ecuaciones (12) y (13), el primer término dentro del paréntesis es consecuencia de la corriente de desplazamiento, mientras que el segundo está relacionado con las corrientes de

[#] Esta expresión en rigor sólo es válida en equilibrio, pero en la mayoría de los conductores el tiempo de relajación, o sea el tiempo que tarda es sistema en llegar al equilibrio es de orden de: $\tau \approx K\varepsilon_0/\sigma \approx 10^{-14}$s. Por lo tanto, en los conductores típicos, esta relación es válida hasta frecuencias del orden del infrarrojo.[8,9]

conducción. Si consideramos el caso cuasiestacionaria, es decir el caso en que las dimensiones del sistema de interés son tales su longitud característica ℓ es mucho menos que la longitud de onda λ del campo electromagnético, es decir:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} >> \ell \tag{15}$$

tenemos que el término dentro del paréntesis de las ecuaciones (12) y (13), asociado con la corriente de desplazamiento es despreciable frente al término asociado a la corriente de conducción, por lo tanto las expresiones (12) y (13) se reducen a:

$$\nabla^2 E(r) + i\frac{2}{\delta^2}\cdot E(r) = 0 \tag{16}$$

y

$$\nabla^2 B(r) + i\frac{2}{\delta^2}\cdot B(r) = 0 \tag{17}$$

Usando (6) tenemos también que:

$$\nabla^2 J(r) + i\frac{2}{\delta^2}\cdot J(r) = 0\,. \tag{18}$$

Estas ecuaciones, junto a las condiciones de contorno:

$$B_{n1} = B_{n2} \qquad\qquad B_{t1}/\mu_{r1} = B_{t2}/\mu_{r2} \tag{19}$$

y

$$E_{n,conductor} = \frac{J_{n,conductor}}{\sigma_{conductor}} = 0 \tag{20}$$

donde los subíndices *t* y *n* representan las componentes tangenciales y normales a la superficie metal (*2*) y aire o vacío (*1*) respectivamente. Estas ecuaciones son el punto de partida para encontrar los campos electromagnéticos en una gran cantidad de casos de interés. La expresión (20) está asociada al hecho que las corrientes, por continuidad, no puede tener componente perpendicular al conductor, ya que al ser el medio circundante (aire o vacío) no conductor (σ_2=0), no hay corrientes en el mismo.

Para campos electromagnéticos de frecuencias de 1 MHz, la longitud de onda $\lambda \approx$ 300m. Por lo tanto para sistemas cuyas dimensiones del orden del metro, la aproximación cuasiestacionaria es en general adecuada, para campos de frecuencias iguales o menores que alguno MHz.

Físicamente, la aproximación cuasiestacionaria es valida en la medida que podamos despreciar los efectos de las corrientes de desplazamiento en relación a las corrientes de conducción. Este criterio es equivalente a despreciar todos lo efectos ligados a la velocidad finita de propagación de los campos electromagnéticos. Es claro que esto será posible siempre que las dimensiones del problema sean pequeñas respecto de λ.

Proyecto 1.- Apantallamiento electromagnético I

Equipamiento recomendado: Dos bobinas concéntricas 100 a 500 vueltas cada una de modo de formar una especia de transformador con un primario exterior y un secundario interior. También se requiere de tubos de aluminio, cobre o algún conductor conocido, de espesores variables entre 0.05 mm a 2 mm. Estos tubos metálicos deben de poder interponerse entre las bobina primaria y secundaria, conteniendo a esta última en su interior. Un Osciloscopio de dos canales de 20Mhz o más rápido. Un generador de funciones.

El efecto de apantallamiento electromagnético es una de las tantas manifestaciones de la interacción de campos electromagnéticos dependientes del tiempo, susceptibles de analizar usando la aproximación cuasiestacionaria discutida previamente. En este proyecto, el arreglo experimental se presenta esquemáticamente el la Figura 1. Un solenoide de unas 200 a 500 vueltas de algunos centímetros de largo y aproximadamente 3 cm de diámetro interno se usa como primario para generar un campo magnético en su interior. Una segunda bobina de unos 100 a 500 vueltas se coloca colinealmente en el interior de la primera. Estas dimensiones son solo para orientar la construcción pero pueden modificase con cierta discreción. Entre ambas debe haber suficiente espacio para introducir un tubo metálico, de radio interior R y espesor d, que actuará de pantalla electromagnética. El espesor d y características (tipo de metal, su radio R y su conductividad σ) es conveniente que sea bien conocidas. Asimismo es útil disponer de tubos del mismo material pero de espesores variables entre unos 0.1 mm a unos 3 mm.

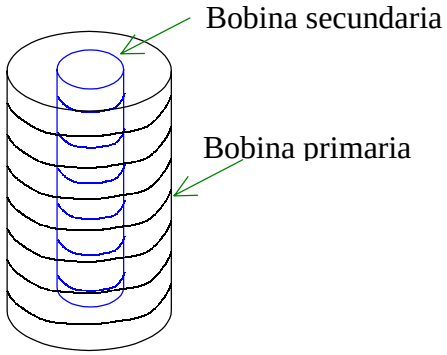

Figura 1. dispositivo experimental para estudiar el apantallamiento electromagnético en una geometría cilíndrica.

Consideraciones teóricas: En este caso si bien es posible resolver las ecuaciones (12) y (13) para encontrar los campos electromagnéticos, es más simple y físicamente más transparente usar el esquema desarrollado por S. Fahy *et al*[11,12], partiendo de los mismos supuesto que se usaron para deducir las ecs. (12) y (13).

Suponemos que se cumple $d<<\delta<<R$, donde R es el radio del cilindro y d su espesor.
H_0 es el campo magnético generado por el solenoide primario. H_2 es el campo magnético en la zona del secundario. El campo magnético en el interior del cilindro conductor es:

$$B_2 = B_0 + B_p \tag{21}$$

con

$$B_0(t) = B_{00} \cdot e^{i\omega t} \tag{22}$$

donde $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular del campo aplicado al primario. B_P es el campo generado por la pantalla cilíndrica debido las corrientes parásitas inducidas por el campo magnético variable B_2

.

Por la Ley de Faraday, la fem ε generada en la superficie del cilindro metálico será:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = (\pi R^2) \cdot i\omega \cdot B_2(t) \tag{23}$$

Esta fem genera una corriente azimutal en la superficie del cilindro. La corriente por unidad de longitud viene dada por la siguiente expresión:

$$J_\varphi = \frac{\varepsilon}{\delta\Re} = \frac{\varepsilon}{2\pi R \cdot \rho / d} = i\frac{Rd \cdot \omega}{2\rho} \cdot B_2(t), \tag{24}$$

Aquí, $\delta\Re$ representa la resistencia de una franja del cilindro de longitud unitaria y $\rho = 1/\sigma$ es la resistividad del material. Esta corriente azimutal en el cilindro genera un campo magnético B_p, por la ley de Ampère, este campo será:

$$B_p = \mu_0 \cdot J_\varphi \cdot K_{geom} = i\mu_0 \cdot \frac{\pi Rd \cdot f}{\rho} \cdot K_{geom} \cdot B_2(t) \tag{25}$$

Aquí, K_{geom} es un coeficiente de corrección geométrico, si el solenoide es largo, este coeficiente es la unidad, es caso contrario tendrá un valor que dependerá de la geometría y será del orden de la unidad, pero que será contante en el tiempo. Remplazando (25) en (21), tenemos:

$$B_2 = B_0(t) + i\mu_0 \cdot \frac{\pi Rd \cdot f}{\rho} \cdot K_{geom} \cdot B_2(t) \tag{26}$$

por lo tanto:

$$B_2(t) = \frac{B_0(t)}{\left(1 - i \cdot \frac{Rd \cdot \mu_0 \cdot \omega}{2\rho} \cdot K_{geom}\right)} = \frac{B_0(t)}{\left(1 - i \cdot \frac{Rd}{\delta^2} \cdot K_{geom}\right)} \tag{27}$$

Si lo que medimos en el circuito secundario es la tensión inducida $V_2(t)$ por el campo $B_2(t)$ y comparamos este valor con la tensión aplicada al primario $V_1(t)$. Tenemos para campos alternos:

$$\frac{V_2(t)}{V_1(t)} = \frac{B_2(t)}{B_0(t)} = \left(1 - i \cdot \frac{Rd}{\delta^2} \cdot K_{geom}\right)^{-1} \tag{28}$$

El cociente de los valores picos o eficaces se conoce como *factor de apantallamiento* y será proporcional al módulo de esta última expresión.

$$\left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{pico} = \left|\frac{V_2(t)}{V_1(t)}\right| = \frac{1}{\left(1+\left(\frac{Rd}{\delta^2}\cdot K_{geom}\right)^2\right)^{1/2}}, \qquad (29)$$

De acuerdo con la hipótesis inicial $d<<\delta<<R$, tenemos que $\sqrt{Rd\cdot K_{geom}} < \delta$, y podemos simplificar (29) como:

$$\left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{pico} \cong \frac{\delta^2}{Rd\cdot K_{geom}} = \frac{1}{\mu_0 \pi Rd}\cdot\frac{1}{f} \qquad (30)$$

Otra forma útil de presentar ese resultado es tomar logaritmo en ambos miembros, es decir:

$$Log\left[\left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{pico}\right] \cong -Log(\mu_0 \pi Rd) - Log(f). \qquad (31)$$

Estas expresiones pueden usarse para convalidar el modelo experimentalmente. Si observamos la dependencia del factor de apantallamiento y del desfasaje en función de la frecuencia *f* del campo magnético aplicado al primario, será posible comparar estos resultados con las predicciones (28), (30) y (31) del modelo propuesto.

	ρ_{tab} (μΩcm)
Bronce 1	13-18
Bronce 2	13-18
Bronce 3	13-18
Aluminio	2,82
Cobre	1,72

Tabla 1. Resistividades para algunos metales comunes[10]

Experimento:

- ✓ Usando el circuito descripto en la Figura 1, estudie experimentalmente la variación del apantallamiento en función de la frecuencia aplicada. varie la frecuencia entre unos pocos kHz hasta un centenar de KHz.
- ✓ Construya un gráfico del apantallamiento $(V2/V1)_{pico}$ como función de la frecuencia en escala lineal y logarítmica, para cada uno de los cilindros metálicos de espesores *d* medidos. En los mismos gráficos incluya las predicciones del modelo propuesto.
- ✓ Construya un gráfico de $d.(V2/V1)_{pico}$ como función de la frecuencia en escala lineal y logarítmica, incluyendo todos los datos medidos para todos los espesores *d* usados. En los mismos gráficos incluya las predicciones del modelo propuesto.
- ✓ Construya un gráfico de la diferencia de fase del apantallamiento $(V2/V1)_{fase}$ como función de la frecuencia, para al menos un espesor *d* medido. En los mismos gráficos incluya las predicciones del modelo propuesto.

- ✓ ¿Qué puede concluir respecto de la bondad del modelo propuesto? Discuta el comportamiento del modelo para bajas y altas frecuencias. ¿Cómo explica cualitativamente el comportamiento a altas frecuencias?

Proyecto 2.- Apantallamiento electromagnético II

Equipamiento recomendado: Dos bobinas concéntricas 100 a 500 vueltas cada una de modo de formar una especia de transformador con un primario exterior y un secundario interior. También se requiere de tubos de aluminio, cobre o algún conductor conocido, de espesores variables entre 0.05 mm a 2 mm. Estos tubos metálicos deben de poder interponerse entre las bobina primaria y secundaria, conteniendo a esta última en su interior. Un osciloscopio de dos canales de 20Mhz o más rápido. Un generador de funciones y un amplificador Lock-in

Este proyecto es esencialmente idéntico al anterior, excepto que esta vez se usa un lock-in amplifier para realizar las mediciones del factor de apantallamiento. Además de lograr una señal más nítida y con menor ruido que en el caso anterior, con el Lock-in es posible medir la componentes de la señal de salida V_2 en fase con V_1 y en contrafase con la misma. De este modo es posible obtener la diferencia de fase entre ambas señales.

Experimento:

- ✓ Usando el circuito descripto en la Figura 2, estudie experimentalmente la variación del apantallamiento en función de la frecuencia aplicada, varie la frecuencia entre unos pocos kHz hasta un centenar de KHz.
- ✓ Construya un gráfico del apantallamiento $(V2/V1)_{pico}$ como función de la frecuencia en escala lineal y logarítmica, para cada uno de los cilindros metálicos de espesores d medidos. En los mismos gráficos incluya las predicciones del modelo propuesto.
- ✓ Construya un gráfico de $d.(V2/V1)_{pico}$ como función de la frecuencia en escala lineal y logarítmica, incluyendo todos los datos medidos para todos los espesores d usados. En los mismos gráficos incluya las predicciones del modelo propuesto.
- ✓ Construya un gráfico de la diferencia de fase del apantallamiento $(V2/V1)_{fase}$ como función de la frecuencia, para al menos un espesor d medido. En los mismos gráficos incluya las predicciones del modelo propuesto.

- ✓ ¿Qué puede concluir respecto de la bondad del modelo propuesto? Discuta el comportamiento del modelo para bajas y altas frecuencias. ¿Cómo explica cualitativamente el comportamiento a altas frecuencias?
- ✓ Discuta las ventajas del presente método de medición con el realizado usando osciloscopio.

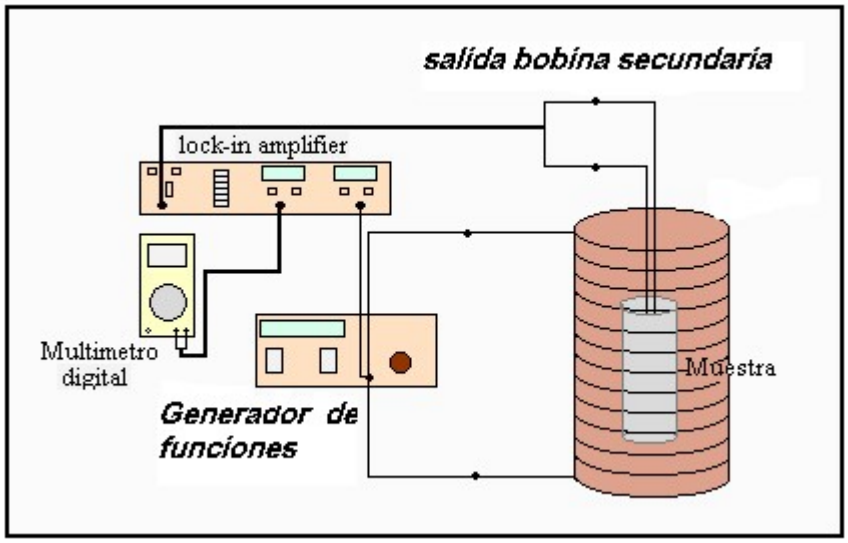

Figura 2. dispositivo experimental para estudiar el apantallamiento electromagnético en una geometría cilíndrica.

Proyecto 3.- Apantallamiento electromagnético III

Equipamiento recomendado: Dos espiras de 100 a 500 vueltas cada una de modo de formar una especia de transformador con un primario y un secundario. También se requiere de placas de aluminio, cobre o algún conductor conocido, de espesores variables entre 0.05 mm a 2 mm. Estos placas metálicos deben de tener dimensiones mayores que las espiras, de modo de poder interponerse entre las espira primaria y secundaria. Un osciloscopio de dos canales de 20Mhz o más rápido. Un generador de funciones y un amplificador Lock-in

Este proyecto es similar a los anteriores, excepto que esta vez se usan dos bobinas en forma de espiras como se muestra en la figura 3 y el apantallmieno lo realizan placas metalicas planas y cuadradas. Se puede usar un oscilñoscopio como en el proyecto 1 o mejor aun un lock-in amplifier para realizar las mediciones del factor de apantallamiento.

Experimento:

- ✓ Usando el circuito descripto en la Figura 3, estudie experimentalmente la variación del apantallamiento en función de la frecuencia aplicada, varie la frecuencia entre unos pocos kHz hasta un centenar de KHz.
- ✓ Construya un gráfico del apantallamiento $(V2/V1)_{pico}$ como función de la frecuencia en escala lineal y logarítmica, para cada placa metálica de espesor *d*. En los mismos gráficos incluya las predicciones del modelo propuesto, usando R como un parametro ajustable para optimizar el ajuste.
- ✓ Construya un gráfico de $d.(V2/V1)_{pico}$ como función de la frecuencia en escala lineal y logarítmica, incluyendo todos los datos medidos para todos los espesores *d* usados. En los mismos gráficos incluya las predicciones del modelo propuesto.
- ✓ Estudie y compare el comportamiento del apantallamiento usando una placa lisa y otra del mimo espesor pero con un corte como se indica en la Fig.3. ¿Qué puede concluir respecto a la forma de las corrientes de Foucault a partir de este análisis?

Figura 3. dispositivo experimental para estudiar el apantallamiento electromagnético en una geometría plana.

Proyecto 4.- Variación de la resistencia de un alambre con la frecuencia

Equipamiento recomendado: Un alambre de cobre de 1 a 3 mm de diámetro. Un osciloscopio de dos canales de 20Mhz o más rápido. Un generador de funciones y un amplificador Lock-in

Este proyecto se pretende estudiar experimentalmente la variación de la resistencia de un alambre conductor por el que circula una corriente alterna de frecuencia variable.

Consideraciones teóricas: Consideremos un conductor cilíndrico homogéneo de radio *a* y longitud $L>>a$, por el que circula una corriente:

$$i(t) = I_0 \cdot e^{j\omega t} \qquad (32)$$

En esta sección usaremos $j=\sqrt{-1}$, para no confundir la unidad compleja con la corriente. En este caso suponemos el cilindro orientado en la dirección *z* como muestra la Figura 4. De este modo, la densidad de corriente en el mismo tendrá solo componente *z*, es decir $\vec{J}=J(r)\cdot\hat{k}$, donde suponemos que la componente *z* de la corriente puede tener una dependencia en *r*, por la simetría del problema esta es la única dependencia esperada, ya que el problema tiene simetría cilíndrica (a lo largo de *z*) . Según (18), usando coordenadas cilíndricas, *J(r)* satisface la ecuación:

$$\nabla^2 J(r)+j\frac{2}{\delta^2}\cdot J(r)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rJ(r))+j\frac{2}{\delta^2}\cdot J(r)=0\,. \tag{33}$$

o bien:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+k^2\right)\cdot J(r)=0 \text{ con } k^2=j\frac{2}{\delta^2} \tag{34}$$

con:

$$I_0=2\pi\int_{r=0}^{r=a}J(r)r^2dr \tag{35}$$

La ecuación (34) es un ecuación diferencial e Bessel cuya solución, con la condición de ser regular en el origen es:

$$J(r)=A\cdot J_0(kr) \tag{36}$$

Aplicando la condición (35) podemos determinar A, la solución es:[3,4]

$$I_0=\left|\frac{2\pi aJ_1(j^{3/2}ma)}{j^{3/2}m}\right|\cdot A \tag{37}$$

donde

$$m^2=\mu_{0\cdot}\cdot\sigma\cdot\omega \tag{38}$$

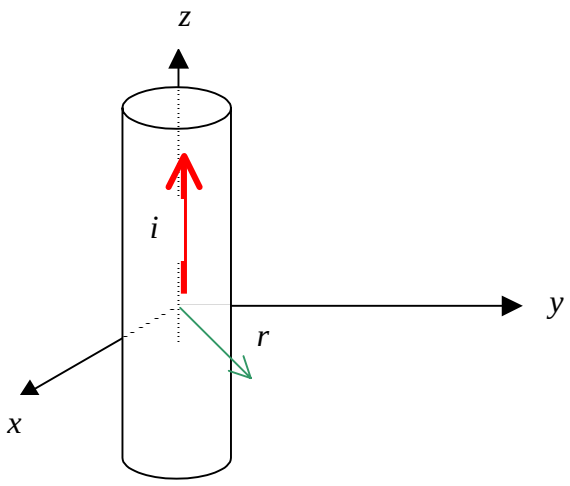

Figura 4. Alambre cilíndrico alineado el la dirección del eje z.

En el caso límite de bajas frecuencias, o sea cuando vale $a/\delta<<1$, se pude probar que:

$$J(r) \propto Constante \cdot \left[1+\left(\frac{r}{2\delta}\right)^4+...\right] \tag{39}$$

y en el limite de altas frecuencias tenemos ($a/\delta >>1$,):

$$J(r) \propto Constante \cdot \left[Exp\left(\frac{r}{\delta}\right)\right] \tag{40}$$

O sea en ambos casos vemos que la corriente se incrementa a medida que nos acercamos a la superficie (efecto piel). La distancia de penetración esta dada precisamente por el parámetro δ. A partir de estas relaciones es posible obtener la resistencia del alambre como función de la frecuencia, el resultado es para límite de bajas frecuencias $a/\delta<<1$:

$$R(\omega)=\left(\frac{L}{\sigma\cdot\pi a^2}\right)\cdot\left[1+\frac{\omega^2\tau^2}{192}\right]=R_0\cdot\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2\delta^4}\right)\right] \tag{41}$$

y

$$L(\omega)=\left(\frac{\mu_0 L}{8\pi}\right)\cdot\left[1-\frac{\omega^2\tau^2}{134}\right] \tag{42}$$

donde $\tau=\sigma\mu_0 a^2$ y $L(\omega)$ es la componente imaginaria de la impedancia compleja asociada al alambre conductor.

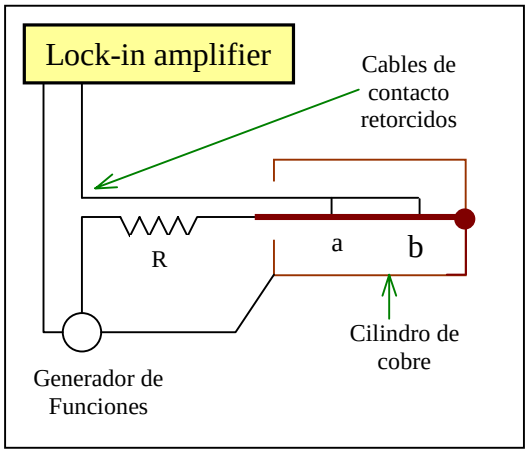

Figura 4. Circuito para determinar la variación de la resistencia compleja de un alambre conductor

Una aproximación mejor de $R(\omega)$ se puede obtener tomando más términos del desarrollo completo, un resultado útil que extiende el de la expresión (41) es:[5]

$$R(\omega) == R_0 \cdot \begin{cases} \left[1+\frac{k^4}{3}\right] & \text{si} \quad k<1 \\ [0.997\cdot k+0.277] & \text{si} \quad 1.5<k<10 \\ \left[k++\frac{1}{4}+\frac{3}{64k}\right] & \text{si} \quad k>10 \end{cases} \tag{43}$$

con $k=a/2\delta$.

Experimento:

- ✓ Usando el circuito descripto en la Figura 4, estudie experimentalmente la variación de la impedancia compleja $Z(\omega)=R(\omega)+jL(\omega)$ en función de la frecuencia aplicada.
- ✓ Construya un gráfico del $R(\omega)$ y $L(\omega)$ como función de la frecuencia en escala lineal y logarítmica. En los mismos gráficos incluya las predicciones del modelo (41) y (42).
- ✓ ¿Qué puede concluir respecto de la bondad del modelo propuesto? Discuta el comportamiento del modelo para bajas ($a/\delta<<1$) y altas frecuencias ($a/\delta>1$). ¿Cómo explica cualitativamente el comportamiento a altas frecuencias?

Bibliografía

1. R. P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sand, *The Feynmann Lecture on Physics* – Vol.1 Chap. 49 –Addison-Wesley, Reading Ma 1970.
2. E. M. Purcell, *Berkeley physics course, volumen 2, Electricidad y Magnetismo* (Reverté, Barcelona, 1969).
3. Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media* Pergamon Press Oxford 1960
4. Louis A. Pipes, *Matemáticas Aplicadas para Ingenieros y Físicos*, McGraw-Hill Co. Madrid 1963
5. N.I. Koshkin y M.G. Shirkevich, *Manual de Física* (MIR, Moscú, 1975).
6. Smythe *Static and Dynamic Electricity*, McGraw-Hill Co. NY 1950 Chap. XI
7. G.Wouch, A.E. Lord, Jr Eddy Currents: Levitation, metal detectors, and induction heating, Am. J. Phys. **46** 464 (1978).
8. W. M. Saslow, Maxwell's theory of eddy currents in thin conducting sheets, and application to electromagnetic shielding and MAGLEV, Am. J. Phys. **60** 693 (1992).
9. J.D.Jackson, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, (1975).
10. D. E. Gray, *American Institute of Physics Handbook*, 2nd. Ed. McGraw Hill NY 1957
11. S.Fahy, C.Kittel & S.Louie, Electromagnetic screening by metals, Am. J. Phys. **56** 989 (1988).
12. P.Rochon & N.Gauthier, Strong shielding due to an electromagnetically thin metal sheet, Am.J.Phys. 58 276 (1990).
13. J.H.Scofield, Frequency-domain description of a lock-in amplifier, Am. J. Phys. 62 129 (1994).

14. J.R. Gosselin, P. Rochon, and N. Gauthier, Study of eddy current in cylindrical wire: an undergraduate laboratory experiment, Am. J. Phys. **50**, 440 (1982).
15. Kraftmakher, Y. Eddy currents: Contactless measurement of electrical resistivity. Am. J. Phys. **68, xxx,** 2000
16. Juri, L., Bekeris V. I., Steinmann, R. Skin depth and complex magnetic susceptibility: An experimental alternative approach Am. J. Phys. **54,** xxx 1986