Actividad VI.39 – Ondas acústicas en una caja cuadrada

Objetivo

Estudio experimental de ondas sonoras estacionarias en tres dimensiones. Cavidades resonantes. Determinación de las frecuencias características. Medición de la velocidad del sonido.

Introducción

En las actividades anteriores estudiamos los casos de ondas estacionarias en una dimensión (tubos abiertos y cerrados), y también estudiamos un caso de ondas estacionarias en un sistema complejo haciendo uso de un modelo simple (Resonador de Helmholtz) para interpretar las frecuencias fundamentales. En este experimento nos proponemos estudiar los distintos modos de oscilación de una caja prismática. [1-3] Este problema es de mucho interés e importancia tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Por un lado este es uno de los pocos sistemas que puede resolverse analíticamente y sus resultados pueden compararse directamente con las mediciones. Por otra parte este sistema es un paradigma que permite entender muchos otros problemas físicos importantes, como ser las energías permitidas de una partícula confinada en una caja. Este modelo se utiliza en muchas áreas de la física, en particular en sistemas cuánticos, en los que una partícula está confinada en un volumen finito. Por ejemplo, nucleones en un núcleo, electrones en un cristal, fotones en una cavidad, etc.

En este caso suponemos que tenemos una caja prismática de dimensiones *a*, *b* y *c*. La presión del gas en la caja debe de satisfacer la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 p + \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \qquad (39.1)$$

con la condición de borde en cada una de las paredes:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{pared(y,z)}=0\,,\ \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{pared(x,z)}=0\,,\ \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{pared(x,y)}=0 \qquad (39.2)$$

Usando el método de separación de variables, es fácil ver que una solución de la ecuación de ondas (39.1) es:

$$p=A\cdot e^{i\omega\cdot t}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{a}\cdot n_1\cdot x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{b}\cdot n_2\cdot y\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{c}\cdot n_3\cdot z\right) \qquad (39.3)$$

con n_1, n_2, y n_3 = 0,1,2,3,.... Es fácil comprobar que esta ecuación es efectivamente una solución de (39.1) y que además satisface la condición de borde (39.2) en todas las paredes del recinto. Reemplazando (39.3) en (39.1) obtenemos una expresión para ω, a saber:

$$\omega^2=\pi^2\cdot c^2\cdot\left[\left(\frac{n_1}{a}\right)^2+\left(\frac{n_2}{b}\right)^2+\left(\frac{n_3}{c}\right)^2\right] \qquad (39.4)$$

o bien en términos de la frecuencia:

$$f=\frac{C}{2}\cdot\sqrt{\left[\left(\frac{n_1}{a}\right)^2+\left(\frac{n_2}{b}\right)^2+\left(\frac{n_3}{c}\right)^2\right]} \qquad (39.5)$$

Esta relación nos dice que la frecuencia natural de oscilación del gas en la caja está cuantizada, o sea que sólo ciertas frecuencias, determinadas por la Ec. (39.5) son posibles. La tríada de números (n_1, n_2, , n_3) caracteriza la frecuencia posible y el modo de oscilación o modo normal asociado a esta frecuencia. El objetivo de este experimento es poner a prueba estas predicciones teóricas.

Proyecto 1.- Ondas estacionarias en una caja

Equipamiento recomendado: Una caja prismática de madera, vidrio o acrílico de 17 x 25 x 32 cm^3, con dos agujeros de unos 2 cm de diámetro en dos de sus esquinas opuestas y un agujero en el centro de cada una de las caras. Un parlante pequeño o audífono conectado a un generador de funciones y un micrófono. Un generador de funciones y un osciloscopio de dos canales o bien un sistema de adquisición de datos conectados a una PC.

Prepare la caja prismática, de dimensiones *a, b* y *c*, evitando que estas dimensiones sean múltiplos una de otras. Es conveniente que la tapa superior de la caja posea dos orificios en extremos opuestos para introducir el emisor y el receptor. Para este experimento se requiere un emisor acústico (parlante y audífono conectado a un generador de funciones) que puede emitir sonidos puros, es decir de una frecuencia bien definida. Para determinar las frecuencias de resonancias o modos normales de oscilación del gas dentro de la caja, coloque el emisor y receptor en los orificios correspondientes y realice un barrido en frecuencia. Trate de ubicar las frecuencias de resonancia, controlando la frecuencia con el generador de funciones. Cuide que la amplitud del generador sea constante. Las resonancias se manifiestan por un pronunciado aumento de la amplitud de la señal de salida del receptor. Si usa un osciloscopio de dos canales, en la que un canal está conectado al receptor y el otro a la entrada del emisor, si se opera el mismo en modo *X-Y*, en resonancia, la representación *Y(X)* es una recta.

- Determine las primeras 10 o 12 frecuencias de resonancia de la caja.

- Use una tabla de cuatro columnas y registre en la primera columna las frecuencias encontradas experimentalmente, en orden ascendente. En la segunda columna transcriba las correspondientes frecuencias obtenidas usando la Ec. (39.5), tratando de que en cada fila, las frecuencias tengan la mejor concordancia. En la tercera columna anote el valor de la tríada (n_1, n_2, n_3) que caracteriza el modo o frecuencia registrada en la segunda columna.

- Usando la nueva variable (o seudovariable) N_{pseudo}, definida como:

$$N_{pseudo} = \sqrt{\left[\left(\frac{n_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{c}\right)^2\right]} \tag{39.6}$$

registre el valor de esta nueva variable en la cuarta columna de la tabla. Realice un gráfico de las frecuencias obtenidas tanto experimentalmente como por la expresión (39.6) (primera y segunda columnas de la tabla) como función de N_{pseudo}. Discuta el grado de concordancia o discrepancia entre las frecuencias determinadas experimentalmente con las obtenidas por la expresión (39.5). ¿Qué conclusiones obtiene respecto de la validez del modelo propuesto?

- Usando el gráfico anterior, varíe el valor de la velocidad del sonido C hasta obtener el mejor acuerdo entre los datos experimentales y teóricos (ver Ec.(39.5). ¿Cuál es el valor de C que obtiene? ¿Cómo se compara este valor con los valores esperado de C o valores tabulados?

Proyecto 2.- Estudio de los modos normales de oscilación

A partir del estudio realizado en el Proyecto 1, identifique tres modos normales en donde haya logrado una concordancia aceptable. Sintonice el generador de funciones en cada una de estas frecuencias. Usando el receptor (micrófono) conectado al extremo de una barra delgada de aluminio, madera o plástico, introduzca el receptor por los orificios que están en los centros de cada cara. Estudie como varía la amplitud de la señal de salida a lo largo de cada uno de estos ejes.

- Para cada uno de los modos identificados, realice un gráfico de la amplitud medida en función de la distancia de penetración del receptor. En el mismo gráfico, incluya el valor de la intensidad media obtenida usando la Ec. (39.3), o sea:

$$I = \frac{A^2}{2} \cdot \left[Cos(\frac{\pi}{a} \cdot n_1 \cdot x) \cdot Cos(\frac{\pi}{b} \cdot n_2 \cdot y) \cdot Cos(\frac{\pi}{c} \cdot n_3 \cdot z) \right]^2 \qquad (39.3)$$

Ajuste el valor de la amplitud *A* de modo de obtener el mejor ajuste posible. ¿Qué puede concluir respecto de la validez del modelo propuesto para explicar sus observaciones?

Proyecto 3.- Ancho de las resonancias

Determine para por lo menos las primeras cinco resonancias encontradas sus respectivos semianchos de frecuencia. Estos se definen como las distancias en frecuencia en las que la amplitud cae a la mitad de su valor en resonancia.

Opcional: de ser posible, introduzca una tirita de tela o paño grueso dentro de la caja y estudie como varían las frecuencias de resonancia y los semianchos de las mismas. Trate de explicar sus resultados, usando como analogía un sistema de masa y resorte.

Bibliografía

1. M. Alonso y E.J. Finn, *Física, vol.II, Campos y ondas, y vol. III, Fundamentos cuánticos y estadísticos* (Fondo Educativo Interamericano; ed. inglesa, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1967).

2. H. L. Armstrong, "An experiment on sound in an enclosure," *Am. J. Phys.* **51**, 1052 (1983).

3. U. Ingard and D. C. Galehouse, "Second-order pressure distribution in an acoustic normal mode in a rectangular cavity," *Am. J. Phys.* **39**, 811 (1971)