

Actividad xx – Determinación de resistividades – Efecto piel en conductores.

Método de las cuatro puntas o método de Kelvin

Objetivo

Determinación experimental de la resistividad (o conductividad) de diversas muestras en distintas geometrías. Introducción a la técnica de cuatro puntas para medir resistividades. Estudio experimental del efecto piel (skin effect) en conductores de corrientes, este efecto produce que cuando por un conductor circula una corriente alterna la densidad de corriente no es uniforme, sino que es mayor en los bordes del mismo.

Introducción

La determinación de la resistividad o conductividad de una muestra es de gran utilidad en muchos experimentos. Generalmente estamos interesados en investigar como varia la conductividad en función de algún otro parámetro, por ejemplo la temperatura, la frecuencia, etc. Para medir una resistencia de valores intermedio (entre unas decenas de Ohms (Ω) a unos pocos $M\Omega$, tal vez lo más simple es usar un multímetro (Ohmetro) y conectar como se indica en la figura xx.1.

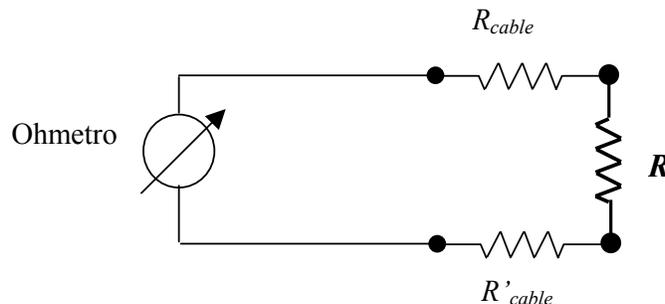


Figura xx.1 Determinación de la resistencia de una muestra usando un Ohmetro o Multímetro. La resistencia de interés es R sin embargo lo que mide el Ohmetro es $R + R'_{cable} + R_{cable}$.

La resistencia de interés es R , pero lo que mide el Ohmetro es la suma de: $R + R'_{cable} + R_{cable} \approx R$ solo si $R \gg R'_{cable} + R_{cable}$. Desde luego, esta situación sólo se da en los casos más simples. En general para medir una resistencia, será necesario tener en cuenta tanto las resistencias de los cables como los potenciales de contacto que pueden estar presentes al poner en contacto dos metales distintos. Estos potenciales de contactos son comunes en las uniones. Este método de medición de resistencia se denomina método a dos puntas.

Método de las cuatro puntas o método de Kelvin

Este método, ilustrado esquemáticamente en la figura xx.2, hace uso de dos circuitos vinculados. Por un circuito se hace circular la corriente (circuito exterior en la figura). Como los voltímetros modernos tienen altas resistencias internas, por el circuito de medición de la tensión (circuito interior de la figura) prácticamente no circula corriente. La tensión medida será en este caso:

$$V^+ = \varepsilon_A + I^+ \cdot R - \varepsilon_B \quad (\text{xx.1})$$

El superíndice (+) indica que la corriente circula como se indica en la figura (xx.2). Usamos el superíndice (-) cuando la dirección de la corriente se invierte, invirtiendo la fuente, pero sin alterar el resto del circuito. En este caso la tensión medida por el voltímetro será:

$$V^- = \varepsilon_A - I^- \cdot R - \varepsilon_B \quad (\text{xx.2})$$

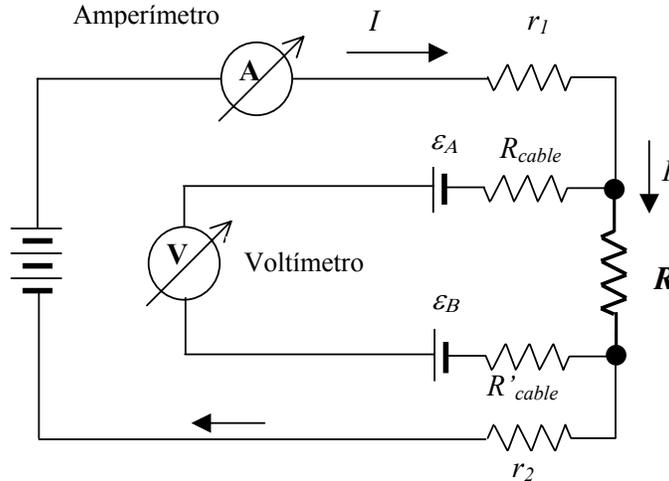


Figura xx.2 Determinación de la resistencia de una muestra usando el método de las cuatro puntas. Nótese que como los voltímetros en general tiene alta resistencia ($R_{\text{voltímetro}} > 10 \text{ M}\Omega$) prácticamente toda la corriente circula por el circuito exterior y no hay caída de tensión en R_{cable} .

Restando las ecuaciones (xx.1) y (xx.2) tenemos:

$$V^+ - V^- = [I^+ + I^-] \cdot R \quad (\text{xx.3})$$

Por lo tanto, invirtiendo el sentido de circulación de la corriente y tomando la diferencia de los potenciales medidos, podemos anular el efecto de los potenciales de contacto. Más específicamente tenemos:

$$R = \frac{V^+ - V^-}{|I^+ + I^-|} \quad (\text{xx.4})$$

Vemos así que el método de las cuatro puntas nos permite eliminar simultáneamente el efecto de las resistencias de los cables y contactos como así también los potenciales de contacto. Al aplicar la expresión (29.12) a un caso concreto, analice críticamente los signos que utiliza para I^\pm y V^\pm . En el caso de las Ec.(xx.1) y (xx.2) hemos supuesto que el signo de I^\pm es siempre positivo, de allí el cambio de signo en los término que contienen I^\pm , pero que el valor de V^\pm si cambia en las Ec.(xx.1) y (xx.2).

En muchos casos de interés práctico, la fuente de alimentación del circuito (externo) es alterna (AC). En este caso es conveniente realizar la medición de tensión usando un instrumento que filtre las componentes de continua (DC). Muchos instrumentos poseen la opción de activar este modo de medición, por ejemplo los osciloscopios, multímetros, Lock-in Amplifiers, etc. Si se mide la tensión en modo AC, la ecuación (xx.1) se transforma en:

$$V^{AC} = I^{AC} \cdot R, \quad (\text{xx.5})$$

ya que en este modo los potenciales de contacto (DC) son filtrados automáticamente por el instrumento medidor. Por lo tanto en este caso es posible simplificar el método de medición a cuatro puntas.

Muestra unidimensional

En este caso imaginamos un alambre de área transversal A . La diferencia de potencial entre dos puntos separados una distancia s será:

$$\Delta V = I \cdot \rho \cdot \frac{s}{A}, \quad (\text{xx.6})$$

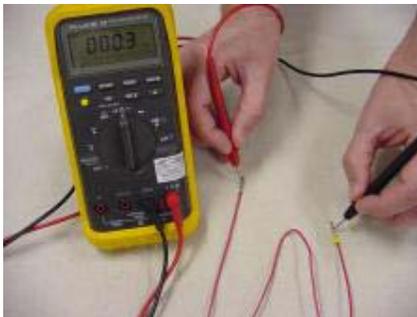
empleando Ecs. (xx.4) y (xx.5) tenemos:

$$\rho = (A/s) \cdot (\Delta V/I) = (A/s) \cdot \frac{V^+ - V^-}{|I^+ - I^-|} = (A/s) \cdot \frac{V^{AC}}{I^{AC}}, \quad (\text{xx.7})$$

según se use una fuente DC o AC respectivamente. En cualquier caso, es importante que la geometría del alambre sea bien conocida, es decir que los valores de A y L se puedan medir con incertidumbres pequeñas.

En este caso, la distancia s entre los electrodos de medición y el área transversal A del alambre son importantes.

Método e medición a dos puntas



Método e medición a cuatro puntas

Figura xx.3 Ilustración de los métodos de medición de resistencia a dos y cuatro puntas respectivamente. Nótese que sólo algunos instrumentos especiales poseen un arreglo para medir a cuatro puntas directamente (cuadro de la derecha). Sin embargo, siempre es posible diseñar un arreglo con instrumentos convencionales, como se ilustra en la figura xx.2, para realizar la medición a cuatro puntas.

Determinación de la resistividad de una muestra bidimensional

Imaginemos una muestra de material conductor plana, de extensión infinita, cuyo espesor es t y su resistividad es ρ como se indica en la figura xx.4. Supongamos que en un punto de la muestra se inyecta una corriente I . Por simetría podemos imaginar que la corriente se distribuye uniformemente en todas las direcciones de la muestra, para terminar en el

infinito. De este modo la diferencia de potencial entre dos puntos separados una distancia dr sobre el borde, y a una distancia r del punto de inyección será:

$$dV' = I \cdot \delta R = I \cdot \frac{\rho}{t \cdot 2\pi} \cdot \frac{dr}{r}. \quad (\text{xx.8})$$

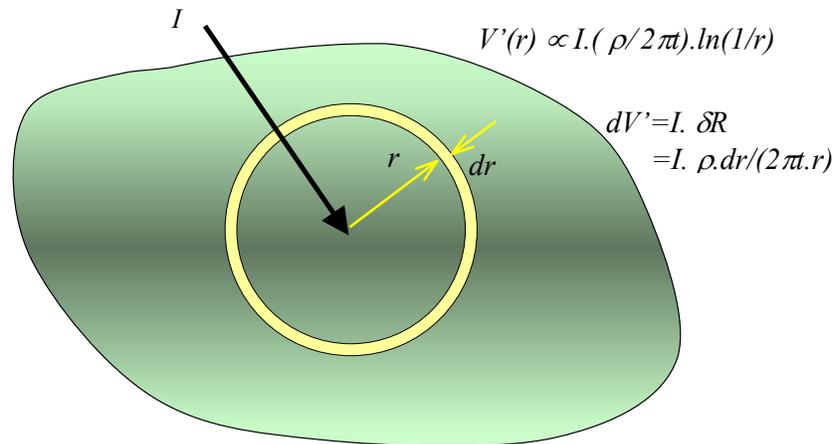


Figura xx.4 Variación del potencial en una muestra plana de extensión infinita y espesor t , por la que se inyecta una corriente I por un punto. dV' representa la diferencia de potencial entre dos puntos separados una distancia dr , debido sólo a la corriente inyectada I . $V'(r)$ es el potencial generado por la corriente inyectada solamente.

La diferencia de potencial entre dos puntos que están a una distancia a y b respectivamente del punto de inyección será:

$$\Delta V'(a,b) = I \cdot \frac{\rho}{t \cdot 2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (\text{xx.9})$$

Si las distancias entre el punto de inyección y los puntos de medición son las mismas, como se muestra en la figura xx.5, o sea si: $a=s$ y $b=2s$, entonces $b/a=2$. Si además por un segundo punto de la muestra distanciado del punto de inyección por una distancia $3s$ como se ilustra en la figura xx.4, se extrae la misma corriente I , por el principio de superposición tenemos:

$$\Delta V(a,b) = I \cdot \frac{\rho}{t \cdot \pi} \cdot \ln(2). \quad (\text{xx.10})$$

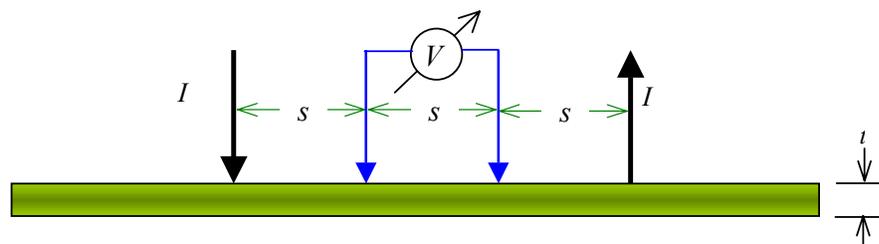


Figura xx.5 Cuatro electrodos separados por la misma distancia s sobre una muestra plana de espesor t , con $s \gg t$.

Por lo tanto, en una geometría plana y con electrodos equidistantes y separados una distancia $s \gg t$, como se ilustra en la figura xx.5, la resistividad de la muestra puede extraerse de la medición de la corriente de inyección I y la medición de la diferencia de potencial ΔV , como $\rho = [\pi \cdot t / \ln(2)] \cdot (\Delta V / I)$. Nótese que la distancia s no interviene en el cálculo de ρ , aunque debe cumplirse que $s \gg t$ para que valga la suposición de geometría plana. Otra condición implícita en este método es que las dimensiones de la paca plana, caracterizada por la longitud d , sea mucho mayor que la distancia entre los electrodos. Si no se cumple con $d \gg s$, debe usarse un coeficiente de corrección por dimensión finita.^{1,2,3} En este caso la resistividad se calcula por:

$$\rho = f_1 \cdot \frac{\pi}{\ln(2)} \cdot t \cdot \frac{\Delta V(a,b)}{I} \quad (\text{xx.11})$$

Con el coeficiente de corrección f_1 dado por el siguiente gráfico.^{1,2} Similarmente, si la muestra no es muy delgada, es decir si no se cumple $s \gg t$ es necesario introducir una corrección análoga.¹

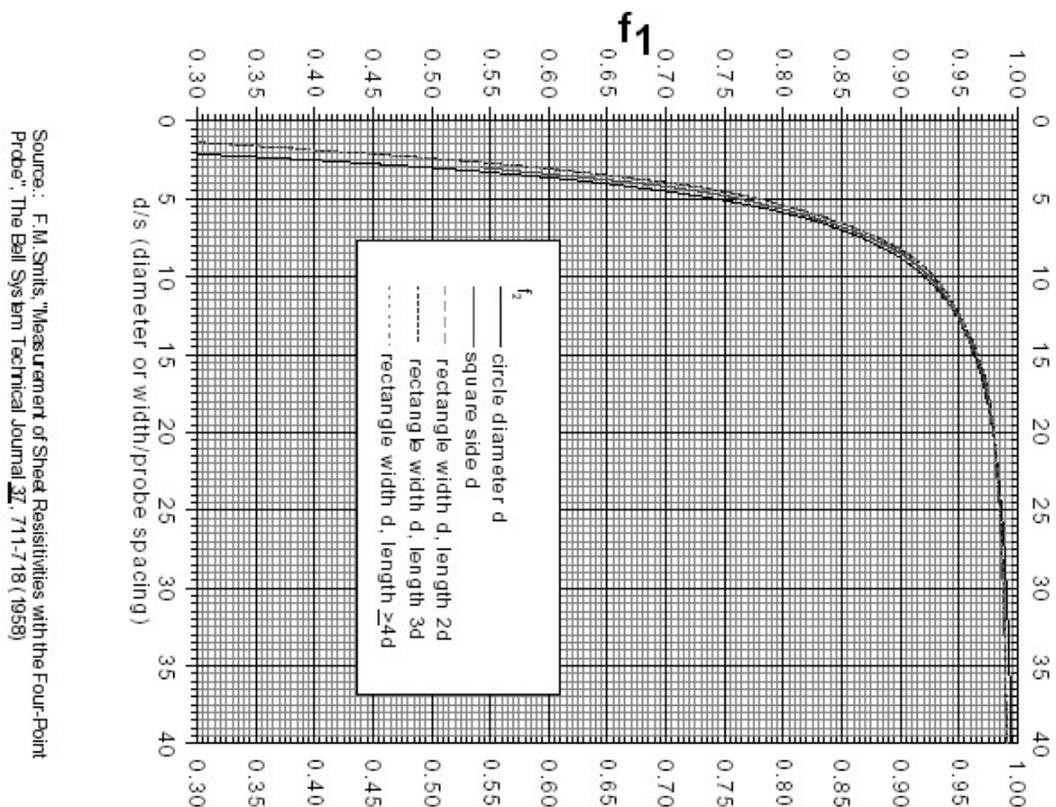


Figura xx.6 Coeficiente de corrección por muestra finita, cuando no se cumple que la dimensión d de la muestra es mucho mayor que la distancia entre electrodos s .^{1,2}

Muestra tridimensional grande (*Bulk sample*)

El método de las cuatro puntas también puede usarse para estimar la resistividad de una muestra tridimensional grande. Este es el caso en que las dimensiones de la muestra son mucho mayor de la separación entre los electrodos. Un ejemplo sería la medición de la conductividad de una región del suelo. Para justificar las expresiones a utilizar, consideramos primero el caso de una corriente I que se inyecta a una muestra

tridimensional, similar al caso ilustrado en la figura xx.6. En estas condiciones, dado el carácter tridimensional del problema, la diferencia de potencial entre dos puntos adyacentes y separados una distancia infinitesimal dr será:

$$dV' = I \cdot \delta R = I \cdot \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r^2}, \quad (\text{xx.12})$$

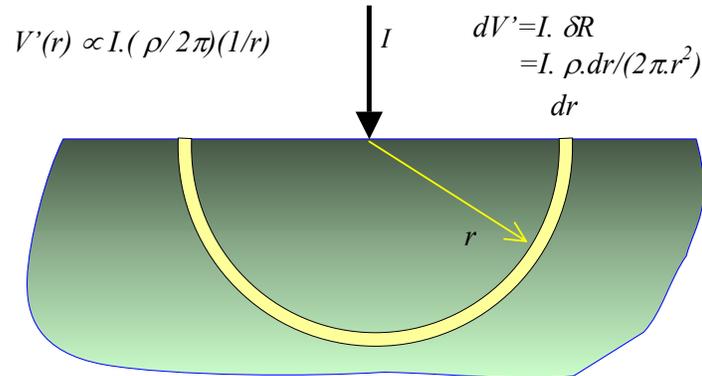


Figura xx.7 Variación del potencial en una muestra tridimensional semi-infinita, por la que se inyecta una corriente I por un punto de su superficie. dV' representa la diferencia de potencial en dos puntos separados una distancia dr , debido sólo a la corriente inyectada I .

de nuevo el tilde (prima) indica la diferencia de potencial debida sólo a la corriente inyectada. La diferencia de potencial entre dos electrodos a distancias $a=s$ y $b=2s$ respectivamente del punto de inyección, similar al caso de la figura xx.6 será:

$$\Delta V'(a,b) = I \cdot \frac{\rho}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = I \cdot \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{1}{s}. \quad (\text{xx.13})$$

Si de nuevo usamos una geometría para los electrodos, similar al de la figura xx.6, es decir los cuatro electrodos alineados y separados por una distancia s . Usando superposición tenemos:

$$\Delta V = I \cdot \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{s}, \text{ o bien } \rho = 2\pi \cdot s \cdot (\Delta V/I). \quad (\text{xx.14})$$

este arreglo para medir resistividades también se conoce como el método de Wenner de los cuatro electrodos.⁴ (four-electrode Wenner array). Este tipo de método se usa en experiencia de geofísica para medir la resistividad de la Tierra y conocer a que profundidad se encuentra una capa diferente por ejemplo agua.⁴

Método de las cuatro puntas de van der Pauw- Transresistencias

En muchos caso de interés práctico no es útil o posible usar una distribución de electrodos equidistantes como se discutió anteriormente. Consideremos el caso de una muestra plana semi-infinita como se ilustra en la figura xx.8.

Según vimos antes, la diferencia de potencial entre los puntos B y C se puede escribir como:⁵

$$\Delta V(B,C) = I_{AD} \cdot \frac{\rho}{\pi \cdot t} \cdot \left\{ \left[\ln\left(\frac{1}{a}\right) - \ln\left(\frac{1}{a+b}\right) \right] - \left[\ln\left(\frac{1}{c+b}\right) - \ln\left(\frac{1}{c}\right) \right] \right\} =$$

$$= I_{AD} \cdot \frac{\rho}{\pi \cdot t} \cdot \ln\left[\frac{(a+b)(b+c)}{a \cdot c} \right] \quad , \quad (\text{xx.14})$$

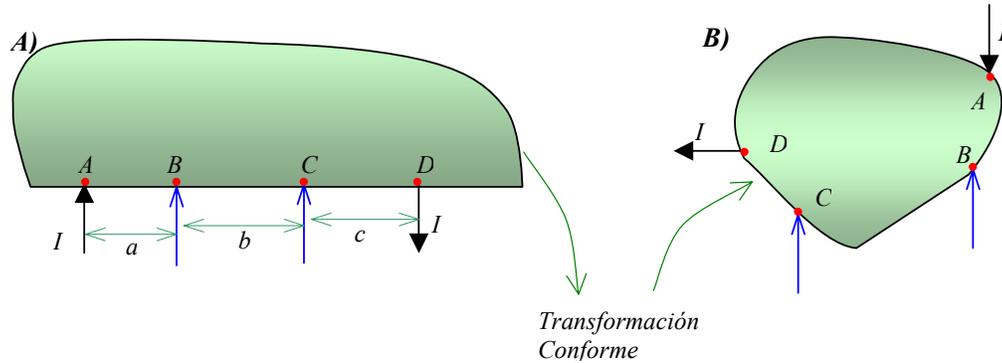


Figura xx.8 A) Variación del potencial en una muestra plana semi-infinita de espesor t , por la que se inyecta una corriente I por el punto A y se extrae la misma corriente desde el punto D . Los electrodos de medición se conectan a los puntos B y C . B) Por una transformación conforme⁶, la región semi-infinita de la izquierda se transforma en la región cerrada de la derecha.

De modo similar, la diferencia de potencial entre D y C , debida a la corriente que pasa entre A y B será:

$$\Delta V(D,C) = I_{AB} \cdot \frac{\rho}{\pi \cdot t} \cdot \ln\left[\frac{(a+b)(b+c)}{b(a+b+c)} \right]. \quad (\text{xx.15})$$

Si la corriente se inyecta entre los puntos B y C , la diferencia de potencial entre D y A será:

$$\Delta V(D,A) = I_{BC} \cdot \frac{\rho}{\pi \cdot t} \cdot \ln\left[\frac{(a+b)(b+c)}{c \cdot a} \right]. \quad (\text{xx.16})$$

Se definen la transresistencia $R_{AB,CD}$ como el cociente entre la diferencia de tensión CD y la corriente que circula por los puntos AB . Por lo tanto de (xx.15) y (xx.16) tenemos:

$$R_{AB,CD} = \frac{\Delta V(D,C)}{I_{AB}} = \frac{\rho}{\pi \cdot t} \cdot \ln\left[\frac{(a+b)(b+c)}{b(a+b+c)} \right] \quad \text{y} \quad R_{BC,DA} = \frac{\rho}{\pi \cdot t} \cdot \ln\left[\frac{(a+b)(b+c)}{a \cdot c} \right] \quad (\text{xx.17})$$

Es fácil probar que se cumple:⁷ $a \cdot (a+b+c) + ca = (a+b) \cdot (b+c)$. Otra forma de interpretar $R_{AB,CD}$ es como la diferencia de potencial entre los puntos C y D cuando por los puntos A y B para una corriente unitaria. Se puede probar que:⁷

$$R_{AB,CD} = R_{CD,AB} \quad , \quad R_{BC,DA} = R_{DA,BC} \quad ,$$

$$R_{AC,BD} = R_{BD,AC} \quad , \quad \text{y} \quad R_{AB,CD} + R_{BC,DA} + R_{AC,BD} = 0. \quad (\text{xx.18})$$

Si combinamos las dos expresiones (xx.17) de modo de eliminar todas las distancias, obtenemos:^{5,7}

$$\exp\left[-\pi \cdot t \cdot R_{AB,CD} / \rho\right] + \exp\left[-\pi \cdot t \cdot R_{BC,DA} / \rho\right] = 1. \quad (\text{xx.19})$$

Esta expresión la obtuvimos para un borde recto de una región semi-infinita como el de la figura xx.8A). **Nótese sin embargo que las relaciones (xx.18) y (xx.17) no dependen de las dimensiones geométricas de la muestra, sino solo de las transresistencias (diferencias de potenciales), el espesor de la muestra y la resistividad del medio.** Van der Pauw, usando las técnicas de transformación conforme,^{6,7} probó que esta expresión es válida para cualquier región plana en forma de disco, como la que se muestra en la figura xx.8B). Esta expresión es de mucha utilidad práctica para determinar resistividades.

Un argumento heurístico que hace plausible estas relaciones se basa en el hecho que siempre es posible, mediante una transformación conforme, establecer una conexión biunívoca entre un semi-plano como el ilustrado a la izquierda de la figura xx.8 y la región cerrada a la derecha de dicha figura. Como sabemos, una transformación conforme preserva la solución de Laplace y las condiciones de borde para una región bi-dimensional. Por lo tanto es de esperar que las relaciones asociada al potencial, que vales en el problema del semi-plano superior de la figura xx.8, sigan valiendo en la solución obtenida después de la transformación. Por lo tanto es razonable esperar que las relaciones (xx.17) y (xx.18) sean válidas para una región plana compacta general.⁷

Proyecto 1.- Determinación de la resistividad de una muestra de cobre o aluminio

Equipamiento recomendado: Muestras metálicas planas de Cu, Al, o algún otro metal puro de interés. Dos multímetros, una fuente de tensión o corriente DC y otra AC.

Para este proyecto se requieren muestras de algunos metales puros ($\approx 99\%$ de pureza) de modo de comparar fácilmente los valores medidos con los tabulados para el mismo material. Construya un circuito similar al indicado en la figura xx.2.

- Recorte la muestra de modo que se cumplan las hipótesis del método desarrollado para muestras planas.
- Conecte los electrodos de inyección de corriente y de medición de tensión alineados y equidistantes.
- Use una fuente de DC con una resistencia limitadora de corriente en serie, 50Ω @ 5 W puede ser adecuado, de este modo se podrá hacer circular una corriente de hasta 100 mA. Si la resistencia entre los puntos de medición es de alguno $m\Omega$, esperamos medir tensiones del orden de unas centenas de μV . Por lo tanto elija el rango apropiado en su multímetro para medir estas tensiones y las corrientes correspondientes.
- Varíe el sentido de la corriente e investigue si la tensión medida cambie significativamente. Explique sus resultados.
- Conociendo el espesor de la muestra, determine el valor de la resistividad del material y estime sus errores.
- Discuta el grado de acuerdo encontrado con los valores de tablas correspondientes.

Proyecto 2.- Variación de la resistencia de un alambre con la frecuencia usando un Lock-in Amplifier

Equipamiento recomendado: Un alambre de cobre de 1 a 3 mm de diámetro y unos 30 a 40 cm de largo. Un osciloscopio de dos canales de 20Mhz o más rápido. Un generador de funciones y un amplificador Lock-in

Este proyecto se pretende estudiar experimentalmente la variación de la resistencia de un alambre conductor por el que circula una corriente alterna de frecuencia variable.

Consideraciones teóricas: Las ecuaciones de Maxwell para un medio material nos permiten escribir la ecuación de onda para medio conductor como:^{8,9,10}

$$\nabla^2 E - \sigma \mu_0 \mu_r \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \mu_r K \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{xx.20})$$

donde σ es conductividad del medio y K su constante dieléctrica. Para el caso de campos alternos de la forma:

$$E(r, t) = E(r) \exp(-j\omega t) \quad (\text{xx.21})$$

las expresión (xx.20) se reduce a:

$$\nabla^2 E(r) + \left(\frac{4\pi^2 \mu_r K}{\lambda^2} + j \frac{2}{\delta^2} \right) \cdot E(r) = 0 \quad (\text{xx.22})$$

con

$$\delta^2 = \frac{2}{\sigma \cdot \mu_0 \mu_r \omega} \text{ en SI} \quad \text{y} \quad \delta^2 = \frac{c^2}{2\pi \cdot \sigma \cdot \mu_0 \mu_r \omega} \text{ en CGS.} \quad (\text{xx.23})$$

En esta sección usaremos $j = \sqrt{-1}$, para no confundir la unidad compleja con la corriente. El parámetro δ tiene dimensiones de longitud y se conoce como *longitud de penetración*. En la ecuación (xx.22), el primer término dentro del paréntesis es consecuencia de la corriente de desplazamiento, mientras que el segundo está relacionado con las corrientes de conducción. Si consideramos el caso cuasiestacionario, es decir el caso en que las dimensiones del sistema de interés son tales que su longitud característica ℓ es mucho menos que la longitud de onda λ del campo electromagnético, es decir:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg \ell, \quad (\text{xx.24})$$

tenemos que el primer término dentro del paréntesis de la ecuación (xx.22), asociado con la corriente de desplazamiento es despreciable frente al término asociado a la corriente de conducción, por lo tanto la expresión (xx.22) se reduce a:

$$\nabla^2 E(r) + j \frac{2}{\delta^2} \cdot E(r) = 0. \quad (\text{xx.25})$$

Usando la ecuación constitutiva: $J = \sigma \cdot E$, donde J es la densidad de corriente, tenemos que:

$$\nabla^2 J(r) + j \frac{2}{\delta^2} \cdot J(r) = 0. \quad (\text{xx.26})$$

Estas ecuaciones, junto a las condiciones de contorno:

$$B_{n1} = B_{n2} , \quad B_{t1} / \mu_{r1} = B_{t2} / \mu_{r2} \quad (\text{xx.27})$$

y

$$E_{n,conductor} = \frac{J_{n,conductor}}{\sigma_{conductor}} = 0, \quad (\text{xx.28})$$

donde los subíndices t y n representan las componentes tangenciales y normales a la superficie del metal. El subíndice (2) hace referencia al material conductor y el subíndice (1) al aire o vacío. Las ecuaciones (xx.25) y (xx.26) son el punto de partida para encontrar los campos electromagnéticos en una gran cantidad de casos de interés. La expresión (xx.28) está asociada al hecho que las corrientes, por continuidad, no puede tener componente perpendicular al conductor, ya que al ser el medio circundante (aire o vacío) no conductor ($\sigma_f=0$), no hay corrientes en el mismo.

Para campos electromagnéticos de frecuencias de 1 Mhz, la longitud de onda es $\lambda \approx 300\text{m}$. Por lo tanto para sistemas cuyas dimensiones son del orden del metro, la aproximación cuasiestacionaria es en general adecuada para campos de frecuencias iguales o menores que algunos Mhz.

Consideremos un conductor cilíndrico homogéneo de radio a y longitud $L \gg a$, por el que circula una corriente:

$$i(t) = I_0 \cdot e^{j\omega t} \quad (\text{xx.29})$$

En este caso suponemos el cilindro orientado en la dirección z como muestra la Figura xx.8. De este modo, la densidad de corriente en el mismo tendrá solo componente z , es decir $\vec{J} = J(r) \cdot \hat{k}$, donde suponemos que la componente z de la corriente puede tener una dependencia en r , por la simetría del problema esta es la única dependencia esperada, ya que el problema tiene simetría cilíndrica (a lo largo de z).

Según (xx.24), usando coordenadas cilíndricas, $J(r)$ satisface la ecuación:

$$\nabla^2 J(r) + j \frac{2}{\delta^2} \cdot J(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rJ(r)) + j \frac{2}{\delta^2} \cdot J(r) = 0. \quad (\text{xx.30})$$

o bien:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 \right) \cdot J(r) = 0 \text{ con } k^2 = j \frac{2}{\delta^2} = j \cdot m^2 \quad (\text{xx.31})$$

con:

$$m^2 = \mu_0 \cdot \sigma \cdot \omega. \quad \text{y} \quad k = j^{1/2} m \quad (\text{xx.32})$$

La solución $J(r)$ debe satisfacer la condición:

$$I_0 = 2\pi \int_{r=0}^{r=a} J(r) r^2 dr. \quad (\text{xx.33})$$

La ecuación (xx.31) es una ecuación diferencial de Bessel cuya solución, con la condición de ser regular en el origen es:

$$J(r) = A \cdot J_0(kr) \quad (\text{xx.34})$$

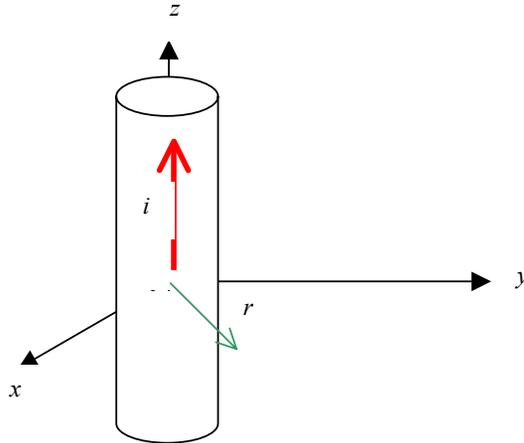


Figura xx.9. Alambre cilíndrico alineado en la dirección del eje z.

Aplicando la condición (xx.33) podemos determinar A, la solución es:^{8,9,10,11,12}

$$I_0 = \left| \frac{2\pi a J_1(j^{3/2}ma)}{j^{3/2}m} \right| \cdot A \quad (\text{xx.35})$$

de modo que:

$$J(r) = \frac{I_0}{2\pi a \cdot |J_1(j^{3/2}ma)|} \cdot J_0(j^{1/2}mr) \quad (\text{xx.36})$$

En el caso límite de bajas frecuencias, o sea cuando vale $a/\delta \ll 1$, se puede probar que:

$$J(r) \propto \text{Constante} \cdot \left[1 + \left(\frac{r}{2\delta} \right)^4 + \dots \right] \quad (\text{xx.37})$$

En el límite de altas frecuencias tenemos ($a/\delta \gg 1$) y vale:

$$J(r) \propto \text{Constante} \cdot \left[\text{Exp}\left(\frac{r}{\delta} \right) \right] \quad (\text{xx.38})$$

En ambos casos vemos que la corriente se incrementa a medida que nos acercamos a la superficie (efecto piel). La distancia de penetración está dada precisamente por el parámetro δ . A partir de estas relaciones es posible obtener la resistencia del alambre como función de la frecuencia, el resultado para límite de bajas frecuencias: $a/\delta \ll 1$ es:¹²

$$R(\omega) \approx \left(\frac{L}{\sigma \cdot \pi a^2} \right) \cdot \left[1 + \frac{\omega^2 \tau^2}{192} \right] = R_0 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2\delta} \right)^4 \right] \quad (\text{xx.39})$$

y

$$L(\omega) \approx \left(\frac{\mu_0 L}{8\pi} \right) \cdot \left[1 - \frac{\omega^2 \tau^2}{134} \right] \quad (\text{xx.40})$$

donde $\tau = \sigma \mu_0 a^2$ y $L(\omega)$ es la componente imaginaria de la impedancia compleja asociada al alambre conductor.

Una aproximación mejor de $R(\omega)$ se puede obtener tomando más términos del desarrollo completo, un resultado útil que extiende el de la expresión (xx.39) es:¹¹

$$R(\omega) = R_0 \times \begin{cases} \left[1 + \frac{\varepsilon^4}{3} \right] & \text{si } \varepsilon \leq 1 \\ \left[0.997 \cdot \varepsilon + 0.277 \right] & \text{si } 1.5 < \varepsilon < 10 \\ \left[\varepsilon + \frac{1}{4} + \frac{3}{64\varepsilon} \right] & \text{si } \varepsilon \geq 10 \end{cases} \quad (\text{xx.41})$$

con $\varepsilon = a/2\delta$ o bien $\varepsilon^2 = a^2 \cdot \sigma\mu_0\mu_r\omega/4$.

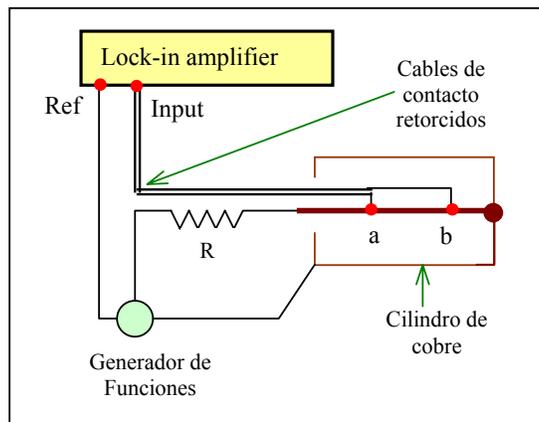


Figura xx.10. Circuito para determinar la variación de la resistencia compleja de un alambre conductor

Experimento:

- ✓ Usando el circuito descrito en la Figura xx.10, estudie experimentalmente la variación de la impedancia compleja $Z(\omega) = R(\omega) + jL(\omega)$ en función de la frecuencia aplicada.
- ✓ Construya un gráfico del $R(\omega)$, $(R(\omega) - R_0)/R_0$ y $L(\omega)$ como función de la frecuencia en escala lineal y logarítmica. En los mismos gráficos incluya las predicciones del modelo (xx.39), (xx.40) y (xx.41).
- ✓ ¿Qué puede concluir respecto de la bondad del modelo propuesto? Discuta el comportamiento del modelo para bajas ($a/\delta \ll 1$) y altas frecuencias ($a/\delta \gg 1$). ¿Cómo explica cualitativamente el comportamiento a altas frecuencias?

Bibliografía

- ¹ F.M. Smits, Measurement of sheets resistivities with a four-point probe – The Bell System Technical Journal, Pag.711-718, may 1958.
- ² D E Vaughan, Four-probe resistivity measurements on small circular specimens, J. Appl. Phys. 12 414-416 (1961)
- ³ A.P.Schuetze, W.Lewis,C.Brown, and W.J.Geerts, A laboratory on the four-point probe technique Am.J. Phys. 72(2) 149-153, 2004

-
- ⁴ Brian Avants, Dustin Soodak, and George Ruppeinera, "Measuring the electrical conductivity of the earth," *Am. J. Phys.*, 67, (7), 593-598 (1999).
- ⁵ D. K. de Vries and A.D. Wieck "Potential distribution in the van der Pauw technique" *Am. J. Phys.*, 63, (12), 1074-1078 (1995).
- ⁶ Murray R Spiegel, *Complex Variables*, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill, N.Y. 1963
- ⁷ L. J. van der Pauw, "A method for measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape", Phillips Research Report, 13, 1 (1958).
- ⁸ Louis A. Pipes, *Matemáticas Aplicadas para Ingenieros y Físicos*, McGraw-Hill Co. Madrid 1963
- ⁹ Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon Press Oxford 1960
- ¹⁰ W.R. Smythe *Static and Dynamic Electricity*, McGraw-Hill Co. NY 1950 Chap. XI
- ¹¹ N.I. Koshkin y M.G. Shirkevich, *Manual de Física* (MIR, Moscú, 1975)
- ¹² J. R. Gosselin, P. Rochon, and N. Gauthier "Study of eddy currents in a cylindrical wire: an undergraduate laboratory experiment," *Am. J. Phys.* **50**, 440 (1982)