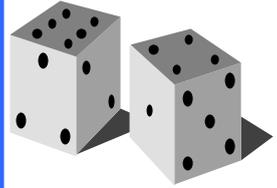


-  Ejemplos
-  Ejercicios
-  Misceláneas
-  Evaluación

# Teoría de errores - Incertezas de medición



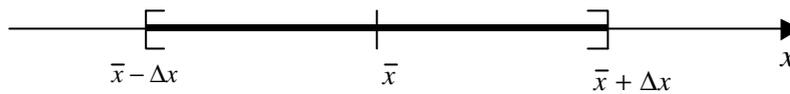
Errores de medición. Precisión y exactitud. Cifras significativas. Errores absolutos y relativos. Histogramas. Errores sistemáticos y accidentales. Propagación de errores. Elección de instrumentos de medición.

## 1 1– Introducción

Una *magnitud física* es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o una sustancia, que puede determinarse cuantitativamente, es decir, es un atributo susceptible de ser medido. Ejemplos de magnitudes son la longitud, la masa, la potencia, la velocidad, etc. A la magnitud de un *objeto* específico que estamos interesado en medir, la llamamos *mesurando*. Por ejemplo, si estamos interesado en medir la longitud de una barra, esa longitud específica será el mesurando

Para establecer el valor de un mesurando tenemos que usar *instrumentos de medición* y un *método de medición*. Asimismo es necesario definir *unidades de medición*. Por ejemplo, si deseamos medir el largo de una mesa, el instrumento de medición será una regla. Si hemos elegido el Sistema Internacional de Unidades (SI), la unidad será el metro y la regla a usar deberá estar calibrada en esa unidad (o submúltiplos). El método de medición consistirá en determinar cuantas veces la regla y fracciones de ella entran en la longitud buscada.

En ciencias e ingeniería, el concepto de *error* tiene un significado diferente del uso habitual de este término. Coloquialmente, es usual el empleo del término error como análogo o equivalente a equivocación. En ciencia e ingeniería, el error, como veremos en lo que sigue, está más bien asociado al concepto de *incerteza* en la determinación del resultado de una medición. Más precisamente, lo que procuramos en toda medición es conocer las cotas (o límites probabilísticos) de estas incertezas. Gráficamente, buscamos establecer un intervalo  $\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$  como el de la Figura 1.1, donde con cierta probabilidad, podamos decir que se encuentra el *mejor valor* de la magnitud  $x$ . Este mejor valor  $\bar{x}$  es el más representativo de nuestra medición y al semiancho  $\Delta x$  lo denominamos la incerteza o error absoluto de la medición.



**Figura 1.1.** Intervalo asociado al resultado de una medición. Notamos que, en lugar de dar un único número, definimos un intervalo. Al valor representativo del centro del intervalo ( $\bar{x}$ ) lo llamamos el mejor valor de la cuestión. El semiancho del intervalo ( $\Delta x$ ) se denomina la *incertidumbre o error absoluto de la medición*.

En todo proceso de medición existen limitaciones dadas por los instrumentos usados, el método de medición, el observador (u observadores) que realizan la medición. Asimismo, el mismo proceso de medición introduce errores o incertezas. Por ejemplo, cuando usamos un termómetro para medir una temperatura, parte del calor del objeto fluye al termómetro (o viceversa), de modo que el resultado de la medición es un valor modificado del original debido a la inevitable interacción que debemos realizar. Es claro que esta interacción podrá o no ser significativa: Si estamos midiendo la temperatura de un metro cúbico de agua, la cantidad de calor transferida al termómetro puede no ser significativa, pero si lo será si el volumen en cuestión es de una pequeña fracción del mililitro.

Tanto los instrumentos que usamos para medir como las magnitudes mismas son fuente de incertezas al momento de medir. Los instrumentos tienen una *precisión* finita, por lo que, para un dado instrumento, siempre existe una variación mínima de la magnitud que puede detectar. Esta mínima cantidad se denomina la *apreciación nominal* del instrumento. Por ejemplo, con una regla graduada en milímetros, no podemos detectar variaciones menores que una fracción del milímetro.

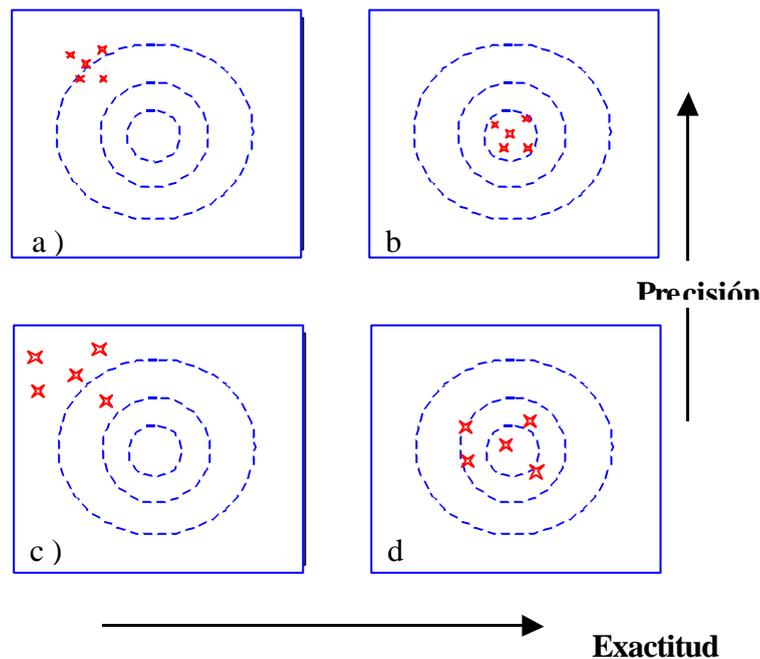
A su vez, las magnitudes a medir no están definidas con infinita precisión. Imaginemos que queremos medir el largo de una mesa. Es posible que al usar instrumentos cada vez más precisos empecemos a notar las irregularidades típicas del corte de los bordes o, al ir aun más allá, finalmente detectemos la naturaleza atómica o molecular del material que la constituye. Es claro que en ese punto la longitud dejará de estar bien definida. En la práctica, es posible que mucho antes de estos casos límites, la falta de paralelismo en sus bordes haga que el concepto de la “longitud de la mesa” comience a hacerse cada vez menos definido, y a esta limitación intrínseca la denominamos *incerteza intrínseca* o *falta de definición* de la magnitud en cuestión.

Otro ejemplo sería el caso en que se cuenta la cantidad de partículas alfa emitidas por una fuente radioactiva en 5 segundos. Sucesivas mediciones arrojarán diversos resultados (similares, pero en general distintos). En este caso, de nuevo, estamos frente a una manifestación de una incerteza intrínseca asociada a esta magnitud “número de partículas emitidas en 5 s”, más que al error de los instrumentos o del observador.

## 1.2 – Algunos conceptos básicos

Otra fuente de error que se origina en los instrumentos además de la *precisión* es la *exactitud* de los mismos. Como vimos, la precisión de un instrumento o un método de medición está asociada a la sensibilidad o menor variación de la magnitud que se pueda detectar con dicho instrumento o método. Así, decimos que un tornillo micrométrico (con una apreciación nominal de  $10\ \mu\text{m}$ ) es más preciso que una regla graduada en milímetros; o que un cronómetro es más preciso que un reloj común, etc.

La exactitud de un instrumento o método de medición está asociada a la calidad de la calibración del mismo. Imaginemos que el cronómetro que usamos es capaz de determinar la centésima de segundo pero adelanta dos minutos por hora, mientras que un reloj de pulsera común no lo hace. En este caso decimos que el cronómetro es todavía más preciso que el reloj común, pero menos exacto. La exactitud es una medida de la calidad de la calibración de nuestro instrumento respecto de *patrones de medida* aceptados internacionalmente. En general los instrumentos vienen calibrados, pero dentro de ciertos límites. Es deseable que la calibración de un instrumento sea tan buena como la apreciación del mismo. La Figura 1.2 ilustra de modo esquemático estos dos conceptos.



**Figura 1.2.** Esta figura ilustra de modo esquemático los conceptos de precisión y exactitud. Los centros de los círculos indican la posición del “verdadero valor” del medido y las cruces los valores de varias determinaciones del centro. La dispersión de los puntos da una idea de la precisión, mientras que su centro efectivo (centroide) está asociado a la exactitud. a) es una determinación precisa pero inexacta, mientras d) es más exacta pero imprecisa; b) es una determinación más exacta y más precisa; c) es menos precisa que a).

Decimos que conocemos el valor de una magnitud dada, en la medida en que conocemos sus errores. En ciencia consideramos que la medición de una magnitud con un cierto error no significa que se haya cometido una *equivocación* o que se haya realizado una mala medición. Con la indicación del error de medición expresamos, en forma cuantitativa y lo más precisamente posible, las limitaciones que nuestro proceso de medición introduce en la determinación de la magnitud medida.

### **¡Es imprescindible en ciencia e ingeniería especificar los errores de medición!**

La nomenclatura moderna usada en Metrología para denotar los conceptos discutidos en este capítulo puede encontrarse consultando las publicaciones sobre el tema elaboradas por la International Organization for Standardization ([ISO 3534-1993](#))<sup>[7]</sup> que puede obtenerse a través de la página de Internet del National Institute of Standard and Technology ([NIST](#)) de los EE. UU. (<http://www.nist.gov/>). La institución equivalente en la República Argentina es el Instituto de Tecnología Industrial ([INTI](#)): <http://www.inti.gov.ar/cefis/>).

## **1.3 – Clasificación de los errores**

Existen varias formas de clasificar y expresar los errores de medición. Según su origen los errores pueden clasificarse del siguiente modo:

### **I. Errores introducidos por el instrumento:**

- ✓ **Error de apreciación,  $s_{ap}$ :** si el instrumento está correctamente calibrado la incertidumbre que tendremos al realizar una medición estará asociada a la mínima división de su escala o a la mínima división que podemos resolver con algún método de medición. Nótese que no decimos que el error *de apreciación* es la mínima división del instrumento, sino la mínima división que es discernible por el observador. La mínima cantidad que puede medirse con un dado instrumento la denominamos *apreciación nominal*. El error de apreciación puede ser mayor o menor que la apreciación nominal, dependiendo de la habilidad (o falta de ella) del observador. Así, es posible que un observador entrenado pueda apreciar con una regla común fracciones del milímetro mientras que otro observador, con la misma regla pero con dificultades de visión sólo pueda apreciar 2 mm.
- ✓ **Error de exactitud,  $s_{exac}$ :** representa el error absoluto con el que el instrumento en cuestión ha sido calibrado.

- II. **Error de interacción; ,  $S_{int}$ :** esta incerteza proviene de la interacción del método de medición con el objeto a medir. Su determinación depende de la medición que se realiza y su valor se estima de un análisis cuidadoso del método usado.
- III. **Falta de definición en el objeto sujeto a medición:** como se dijo antes, las magnitudes a medir no están definidas con infinita precisión. Con  $S_{def}$  designamos la incertidumbre asociada con la falta de definición del objeto a medir y representa su incertidumbre intrínseca.

En general, en un dado experimento, todas estas fuentes de incertidumbres estarán presentes, de modo que resulta útil definir el *error nominal de una medición*  $S_{nom}$ , como:

$$S_{nom}^2 = S_{ap}^2 + S_{def}^2 + S_{int}^2 + S_{exac}^2 \quad (I.1)$$

Este procedimiento de sumar los cuadrados de los errores es un resultado de la estadística, y proviene de suponer que todas las distintas fuentes de error son independientes una de otras<sup>[10,13]</sup>.

 Se desea determinar el diámetro del tronco de un árbol y el área de su sección transversal. ¿Cómo procederíamos y cuáles son las fuentes principales de incertidumbre en esta determinación? Un método podría consistir en medir el perímetro con una cinta métrica y luego determinar el diámetro y usar este valor para calcular el área. En este caso, la mayor fuente de incertidumbre proviene de la definición del mesurando (el diámetro). Una forma de estimar la incertidumbre sería determinar los valores máximos y mínimos del diámetro usando una serie de mediciones y tomar como  $S_{diámetro}$  la semidiferencia de estos valores,  $S_{diámetro} = \frac{1}{2}(D_{max} - D_{min})$ .

Según su carácter los errores pueden clasificarse en sistemáticos, estadísticos e ilegítimos o espurios.

- a) **Errores sistemáticos:** se originan por las imperfecciones de los métodos de medición. Por ejemplo, pensemos en un reloj que atrasa o adelanta, o en una regla dilatada, el error de paralaje, etc. Los errores introducidos por estos instrumentos o métodos imperfectos afectarán nuestros resultados siempre en un mismo sentido. El valor de  $S_{exac}$  sería un ejem-

plo de error sistemático pero no son lo mismo, ni los errores de exactitud son los únicos responsables de los errores sistemáticos. Imaginemos por ejemplo el caso de una balanza bien calibrada que se usa para conocer el peso de las personas en los centros comerciales u otros negocios, como es usual que las personas (en público) se pesen vestidas, los valores registrados con estas balanzas tendrán un error sistemático por el peso de la vestimenta. La única manera de detectarlos y corregirlos es comparar nuestras mediciones con otros métodos alternativos y realizar un análisis crítico y cuidadoso del procedimiento empleado. También es aconsejable intercalar en el proceso de medición patrones confiables que permitan calibrar el instrumento durante la medición.

**b) Errores estadísticos:** Son los que se producen al azar. En general son debidos a causas múltiples y fortuitas. Ocurren cuando, por ejemplo, nos equivocamos en contar el número de divisiones de una regla, o si estamos mal ubicados frente al fiel de una balanza. Estos errores pueden cometerse con igual probabilidad por defecto como por exceso. Por tanto, midiendo varias veces y promediando el resultado, es posible reducirlos considerablemente. Es a este tipo de errores a los que comúnmente hace referencia la teoría estadística de errores de medición que formularemos sucintamente en lo que sigue. A estos errores lo designaremos con  $S_{est}$

**c) Errores ilegítimos o espurios:** Supongamos que deseamos calcular el volumen de un objeto esférico y para ello determinamos su diámetro. Si al introducir el valor del diámetro en la fórmula, nos equivocamos en el número introducido, o lo hacemos usando unidades incorrectas, o bien usamos una expresión equivocada del volumen, claramente habremos cometido un error. Esta vez este error está más asociado al concepto convencional de equivocación. A este tipo de errores los designamos como ilegítimos o espurios. A este tipo de errores no se aplica la teoría estadística de errores y el modo de evitarlo consiste en una evaluación cuidadosa de los procedimientos realizados en la medición. Un ejemplo de este tipo de error es el que se cometió en el Mars Climate Explorer a fines de 1999, al pasar de pulgadas a cm se cometió un error que costó el fracaso de dicha misión a Marte.

Cuando se desea combinar los errores sistemáticos con los estadísticos, la prescripción usual es sumar los cuadrados de los errores absolutos y luego tomar la raíz cuadrada de este resultado, como lo indica la Ec. (1.2). Si estamos midiendo una magnitud  $Z$ , el error final o combinado o efectivo de  $Z$ ,  $DZ$ , vendrá dado por:

$$\Delta Z = \sqrt{s_{est}^2 + s_{nom}^2} = \sqrt{s_{est}^2 + s_{ap}^2 + s_{def}^2 + s_{int}^2 + s_{exac}^2} \quad (1.2)$$

Los errores pueden asimismo expresarse de distintos modos, a saber:

- **Error absoluto:** es el valor de la incertidumbre combinada (Ec. 1.2). Tiene las mismas dimensiones que la magnitud medida y es conveniente expresarla con las mismas unidades de ésta. Si  $Z$  es la magnitud en estudio,  $\bar{Z}$  es el mejor valor obtenido y  $\Delta Z$  su incertidumbre absoluta. El resultado se expresa adecuadamente como:

$$Z = \bar{Z} \pm \Delta Z \quad (1.3)$$

El significado de esta notación es equivalente a decir que, según nuestra medición, con una cierta probabilidad razonable  $p_0$  (usualmente  $p_0 = 0.68$ , 68%) el valor de  $Z$  está contenido en el intervalo  $(\bar{Z} - \Delta Z, \bar{Z} + \Delta Z)$ , o sea:

$$\bar{Z} - \Delta Z < Z < \bar{Z} + \Delta Z \quad (1.4)$$

lo que es equivalente a:

$$P(\bar{Z} - \Delta Z < Z < \bar{Z} + \Delta Z) = p_0, \quad (1.5)$$

que significa que la probabilidad que el *mejor estimador* de  $Z$  esté comprendido entre  $\bar{Z} - \Delta Z$  y  $\bar{Z} + \Delta Z$  es igual a  $p_0$ . El valor de  $p_0$  se conoce con el nombre de *coeficiente de confianza* y los valores  $(\bar{Z} - \Delta Z, \bar{Z} + \Delta Z)$  determinan un *intervalo de confianza* para  $Z$ .

- **Error relativo:**  $e_Z = \Delta Z / \bar{Z}$ , el cociente entre el error absoluto y el mejor valor de la magnitud.
- **Error relativo porcentual:**  $e_{Z,\%} = 100 \cdot e_Z$ , es la incertidumbre relativa multiplicada por 100.

 Imaginemos que medimos el espesor de un alambre (cuyo diámetro es  $d \approx 3 \text{ mm}$ ) y su longitud ( $L \approx 1 \text{ m}$ ) con la misma regla graduada en milímetros. Es claro que los errores absolutos de medición, dados por la apreciación del instrumento, es en ambos casos la misma ( $\Delta d = \Delta L = 1 \text{ mm}$ ). Sin embargo, resulta evidente que la determinación de la longitud del alambre es mucho mejor que la del diámetro. El error relativo porcentual refleja esta diferencia, ya que para el caso del diámetro su valor es  $\epsilon_d\% \approx 30\%$ , y para el caso de la longitud tenemos  $\epsilon_L\% \approx 0.1\%$ .

---

## 1.4 – Cifras significativas

Cuando realizamos una medición con una regla graduada en milímetros, está claro que, si somos cuidadosos, podremos asegurar nuestro resultado hasta la cifra de los milímetros o, en el mejor de los casos, con una fracción del milímetro, pero no más. De este modo nuestro resultado podría ser  $L = (95.2 \pm 0.5) \text{ mm}$ , o bien  $L = (95 \pm 1) \text{ mm}$ . En el primer caso decimos que nuestra medición tiene tres *cifras significativas* y en el segundo caso sólo dos. El número de cifras significativas es igual al número de dígitos contenidos en el resultado de la medición que están a la izquierda del primer dígito afectado por el error, incluyendo este dígito. El primer dígito, o sea el que está más a la izquierda, es el más significativo (9 en nuestro caso) y el último (más a la derecha) el menos significativo, ya que es en el que tenemos “menos seguridad”. Nótese que carece de sentido incluir en nuestro resultado de  $L$  más cifras que aquellas en donde tenemos incertidumbres (donde “cae” el error).

No es correcto expresar el resultado como  $L = (95.\underline{321} \pm 1) \text{ mm}$ , ya que si tenemos incertidumbre del orden de 1 mm, mal podemos asegurar el valor de las décimas, centésimas y milésimas del milímetro. Si el valor de  $L$  proviene de un promedio y el error es del orden del milímetro, se debe redondear el dígito donde primero cae el error.

Es usual expresar las incertidumbres con *una sola cifra significativa*, y solo en casos excepcionales y cuando existe fundamento para ello, se pueden usar más. También es usual considerar que la incertidumbre en un resultado de medición afecta a la última cifra si es que no se la indica explícitamente. Por ejemplo, si sólo disponemos de la información que una longitud es  $L = 95 \text{ mm}$ , podemos suponer que la incertidumbre es del orden del milímetro y, como dijimos antes, el resultado de  $L$  tiene dos cifras significativas.

Una posible fuente de ambigüedad se presenta con el número de cifras significativas cuando se hace un cambio de unidades. Si en el último ejemplo deseamos expresar  $L$  en  $\mu\text{m}$ , el resultado sería  $L = (95000 \pm 1000) \mu\text{m}$ . ¿Cuántas cifras significativas tenemos en este resultado? Claramente dos, igual que antes, ya que la última cifra significativa sigue siendo 5. Sin embargo, si no indicamos explícitamente la incertidumbre de  $L$ , es difícil saber cuántas cifras significativas tenemos. Nótese que  $95 \text{ mm} \neq 95000 \mu\text{m}$ , ya que el primer resultado tiene sólo dos cifras significativas mientras el segundo tiene 5 (a propósito compare los costos de los

instrumentos para realizar estas dos clases de determinaciones). Para evitar estas ambigüedades se emplea la notación científica. Podemos escribir la siguiente igualdad:  $9.5 \times 10^1 \text{ mm} = 9.5 \times 10^4 \text{ }\mu\text{m}$ . Notemos que los números en ambos miembros de la igualdad tienen igual número de cifras significativas, siendo la única diferencia las unidades usadas.

## 1.5 – Histogramas y distribución estadística

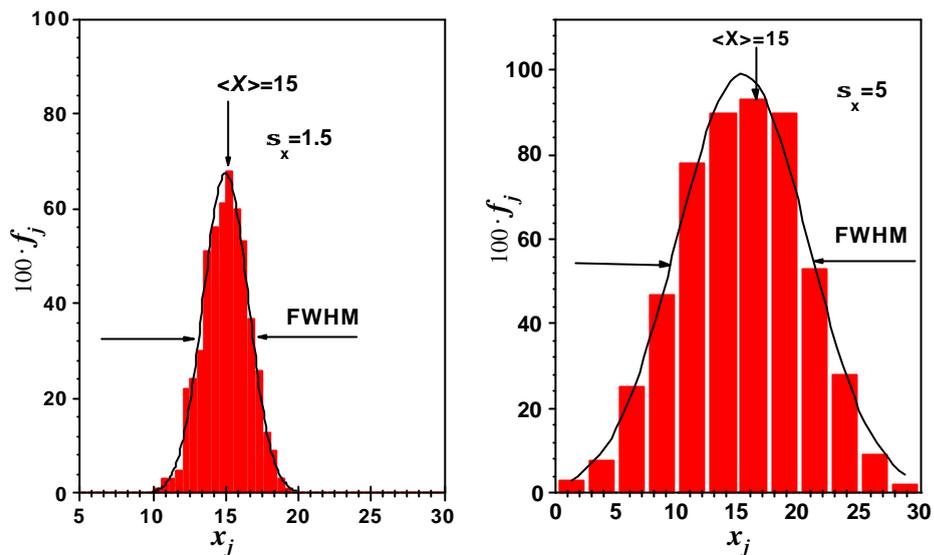
Consideremos una población de personas de una ciudad y que queremos analizar cómo se distribuyen las estaturas de la población. Para llevar adelante este estudio podemos medir la altura de todos los individuos de la *población*, o bien tomar una *muestra representativa* de la misma, a partir de la cual inferiríamos las características de la población. Esta clase de estudio es un típico problema de estadística. Si tomamos una muestra de tamaño  $N$  y para la misma medimos las alturas de cada individuo, este experimento dará  $N$  resultados:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ . Todos estos datos estarán comprendidos en un intervalo de alturas ( $x_{\min}, x_{\max}$ ) entre la menor y mayor altura medidas. Una manera útil de visualizar las características de este conjunto de datos consiste en dividir el intervalo ( $x_{\min}, x_{\max}$ ) en  $m$  subintervalos iguales, delimitados por los puntos ( $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ ) que determinan lo que llamaremos el *rango de clases*. Seguidamente, contamos el número  $n_1$  de individuos de la muestra cuyas alturas están en el primer intervalo  $[y_1, y_2)$ , el número  $n_j$  de los individuos de la muestra que están en el  $j$ -ésimo intervalo  $[y_{j-1}, y_j)$ , etc., hasta el subintervalo  $m$ . Aquí hemos usado la notación usual de usar corchetes, [...], para indicar un intervalo cerrado (incluye al extremo) y paréntesis comunes, (...), para denotar un intervalo abierto (excluye el extremo). Con estos valores definimos la función de distribución  $f_j$  que se define para cada subintervalos  $j$  como:

$$f_j = \frac{n_j}{\sum_j n_j} \quad (1.6)$$

Esta función de distribución está normalizada, es decir:

$$\sum_{j=1}^m f_j = 1 \quad (1.7)$$

El gráfico de  $f_j$  versus  $x_j$  [ $x_j = 0.5 (y_{j-1} + y_j)$ ] nos da una clara idea de cómo se distribuyen las altura de los individuos de la muestra en estudio. Este tipo de gráfico se llama un *histograma* y la mayoría de las hojas de cálculo de programas comerciales (Excel, Quatro-Pro, Origin, etc.) tienen herramientas para realizar las operaciones descritas aquí y el gráfico resultante. En la Fig. 1.3 ilustramos dos histogramas típicos.



**Figura 1.3.** Histograma de dos muestras con igual valor medio pero con distintos grados de dispersión. En este ejemplo, los datos tienen una distribución Gaussiana o Normal, descrita por la curva de trazo continuo.

Tres parámetros importantes de una distribución son:

➤ El valor medio:  $\bar{x} = \langle x \rangle = \sum_{j=1}^m x_j \cdot f_j = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i$  (1.8)

➤ La varianza:  $Var(x) = \mathbf{s}_x^2 = \sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2 \cdot f_j$  (1.9)

➤ La desviación estándar:  $\mathbf{s}_x = \sqrt{Var(x)}$  (1.10)

El valor medio da una idea de la localización o valor medio de los valores en la muestra. En general  $\langle x \rangle$  da el centro de masa (centroide) de la distribución. Tanto  $Var(x)$  como  $\mathbf{s}_x$  dan una idea de la dispersión de los datos alrededor del promedio. Cuando más concentrada esté la distribución alrededor de  $\langle x \rangle$  menor será  $\mathbf{s}_x$  y viceversa.

Una distribución de probabilidad muy común en diversos campos es la *distribución gaussiana o normal*, que tiene la forma de una campana como se ilustra en trazo continuo en la Fig. 1.3. La expresión matemática de esta distribución es:

$$f(x) = N(x; m, \mathbf{S}) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{S}}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2 \cdot \mathbf{S}^2}\right) \quad (1.11)$$

La “campana de Gauss” está centrada en  $m$  y su ancho está determinado por la desviación estándar  $\mathbf{S}$ . En particular, los puntos de inflexión de la curva están en  $x-\mathbf{S}$  y  $x+\mathbf{S}$ . El área de esta curva entre estos dos puntos constituye el 68.3% del área total. El área entre  $x-2\mathbf{S}$  y  $x+2\mathbf{S}$  es del 96% del total. Es útil caracterizar para esta función el ancho a mitad de su altura, que está relacionado con  $\mathbf{S}$  a través de la expresión:  $\text{FWHM} = 2.35\mathbf{S}$  (FWHM, de “full width half maximum”). Aunque esta distribución ocurre naturalmente en muchos procesos, desde luego no es única y existen muchos tipos de distribuciones de ocurrencia común en la naturaleza.

Cuando se desea comparar un histograma no normalizado con una curva normal, es necesario calcular el número total de datos  $N_t$ , el valor medio de los mismos,  $\bar{x}$  y la desviación estándar de los datos,  $\sigma_x$ . Supondremos que el rango de clases está equiespaciado por una separación  $\Delta x (= x_i - x_{i-1})$ . Para comparar el histograma con la curva normal debemos multiplicar la distribución (1.11) por el factor  $N_t \cdot \Delta x$ .

 Los parámetros más usuales con los que puede caracterizarse la localización de una distribución asociada a un conjunto de  $N$  datos son:

- a) la media
- b) la mediana
- c) la moda

La *media* o *promedio* de la distribución se define, según ya vimos, como:

$$\bar{x} = \sum_i^N x_i / N, \text{ y es la media aritmética de los valores observados.}$$

La *moda* corresponde al valor de la variable donde está la máxima frecuencia, o sea, que en un histograma la moda corresponde al valor de la variable donde hay un pico o máximo. Si una distribución tiene dos máximos la denominamos distribución bimodal, si tiene tres máximos trimodal y así sucesivamente.

La *mediana* es el valor de la variable que separa los datos entre aquellos que definen el primer 50% de los valores de los de la segunda mitad. O sea que la mitad de los datos de la población o muestra están a derecha de la mediana y la otra mitad están a la izquierda de la misma.

Mientras que a la media la calculamos usando una fórmula, a la moda la evaluamos directamente del histograma.

Para estimar la mediana tenemos que observar la lista de datos ordenados de menor a mayor, y ubicar el valor central de la lista. Si el número de datos es impar, la mediana corresponde precisamente al valor central. Si el número  $N$  de datos es par, la mediana se estima como  $\frac{1}{2} (X_{N/2} + X_{N/2+1})$ . En una distribución dada, una línea vertical trazada desde la mediana divide a la distribución en dos partes de área equivalentes.

Es fácil darse cuenta que media, moda y mediana no tienen, en general, porqué coincidir. Estos tres parámetros sí son iguales en el caso de distribuciones simétricas respecto del valor medio y unimodales. Este es el caso de una distribución gaussiana o normal. En el caso de una distribución asimétrica, las diferencias entre moda, media y mediana pueden ser sustanciales.

Es importante saber cuál parámetro de localización es más apropiado de usar o más representativo en una dada situación. Consideremos, para fijar ideas, la distribución del ingreso familiar en un país dado. La presencia de millonarios, aunque sean relativamente pocos, tiene un efecto sobre la media que contrarresta a muchos miembros de la población en el extremo inferior de la escala de salarios. De esta manera, la moda y la media difieren sustancialmente. En este caso tal vez la moda es un parámetro más representativo que la media. A menudo los datos estadísticos pueden ser interpretados de diversas maneras. El siguiente ejemplo ilustra las distintas interpretaciones que pueden extraerse de un conjunto de datos estadísticos.

☞ La empresa Pochoclos S.A. analiza la necesidad de discutir los salarios. El cuadro de sueldos es el siguiente:

Gerente	\$9000
Sub-gerente	\$5000
2Asesor	\$2500
2 Secretarias	\$ 1350 c/u
Capataz	\$ 1200
6 Operarios	\$600 c/u

La empresa argumenta que el salario medio es \$2000. El delegado gremial sostiene que el sueldo representativo es de \$600. Un político consultado asegura que el salario más representativo es \$900. ¿Qué parámetros tuvo en cuenta para argumentar cada persona participante de la reunión?. Calcule la moda, la mediana y la media de los ingresos para esta empresa.

## 1.6 – Error de una magnitud que se mide una única vez

En este caso el mejor valor será simplemente el valor medido y el error vendrá dado por el error nominal ( $S_{nom}$ ) del instrumento. Según se deduce de (1.2),  $DZ = S_{nom}$ .

## 1.7 – Error de una magnitud que se mide directamente $N$ veces

Un modo de minimizar la incidencia de los errores estadísticos, es realizar varias mediciones del mesurando. Dado el carácter al azar de los este tipo de errores es claro que, al promediar los resultados, el promedio estará menos afectado de las desviaciones estadísticas que los valores individuales. El procedimiento que se describe a continuación es un método para determinar el número óptimo de mediciones a realizar en cada caso y el modo de determinar las incertidumbres asociadas al promedio. Esta teoría no es aplicable para reducir los errores de carácter sistemático o espurios.

Supongamos que se han hecho  $N$  mediciones de una misma magnitud con resultados  $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N$ . Estas  $N$  determinaciones pueden ser consideradas una *muestra* de todas las posibles mediciones que se podrían realizar (*población*). Bajo condiciones muy generales puede demostrarse que el *mejor estimador* de la magnitud  $x$  viene dado por el promedio,  $\bar{x} \equiv \langle x \rangle$ , de los valores:

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^N x_j}{N}. \quad (1.12)$$

Este resultado es llamado también el *mejor valor* o *estimador* de  $x$  o *valor más probable* del mesurando. Llamaremos a

$$\Delta x_j = x_j - \bar{x} \quad j = 1, 2, \dots, N$$

la desviación de cada medición respecto de  $\bar{x}$ . También definimos la desviación estándar o error cuadrático medio de cada medición,  $S_x$ . Esta cantidad es equivalente al concepto de desviación estándar de la población, más específicamente  $S_x$  es un estimador de la misma.  $S_x$  da una idea global acerca de la dispersión de los  $x_j$  alrededor del promedio  $\bar{x}$ . Si la distribución es ancha  $S_x$  será grande y si es afilada su valor será pequeño (ver figura 1.3. Este estimador muestral ( $S_x$ ) de la desviación estándar poblacional viene dado por:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2}{N-1}. \quad (1.13)$$

$S_x$  tiene las mismas dimensiones físicas que  $\bar{x}$ , pudiéndose comparar directamente con ésta. La calidad del proceso de medición será mayor cuanto menor sea el cociente  $S_x/\bar{x}$ , que en general es una constante del proceso de medición y no disminuye al aumentar  $N$ .

Como acabamos de discutir,  $S_x$  representa el error “promedio” de cada medición. Otra manera de explicar el significado de  $S_x$  es pensar que, cuando realizamos una serie de mediciones, los resultados obtenidos presentarán una distribución estadística, cuya desviación estándar viene dada por  $S_x$ .

Si suponemos ahora que realizamos varias series de mediciones de  $x$ , y para cada una de estas series calculamos el valor medio  $\bar{x}$ , es de esperar que estos valores tendrán una distribución (puesto que variarán entre sí) pero con una menor dispersión que las mediciones individuales. Se puede probar<sup>[1,3]</sup> que a medida que el número  $N$  de mediciones aumenta, la distribución de  $\bar{x}$  será normal con una desviación estándar dada por:

$$\sigma_{est} = \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2}{N(N-1)}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}. \quad (1.14)$$

$\sigma_x$  se llama el *error estándar del promedio* y es el *estimador del error* asociado a  $\bar{x}$ .

Recordemos que  $S_x$  es la dispersión de cada medición y que no depende de  $N$  sino de la calidad de las mediciones, mientras que  $\sigma_x$  sí depende de  $N$  y es menor cuanto más grande es  $N$ . Si, por ejemplo, estamos midiendo una longitud con una regla graduada en milímetros, resulta claro que si aumentamos el número de mediciones podremos disminuir el error estadístico, pero *nunca* con este instrumento podremos dar con certeza cifras del orden de los micrones, por más que realicemos muchas mediciones. Al aumentar  $N$ ,  $\sigma_x$  ciertamente disminuye, pero, desde un punto de vista físico, el error en  $\bar{x}$  solo puede disminuir hasta hacerse igual o del orden de  $S_{nom}$ . La Ec. (1.2) indica que no es razonable esforzarse en disminuir  $\sigma_x$  mucho más que  $S_{nom}$ . El balance óptimo se logra cuando  $\sigma_x \gg S_{nom}$ . Esto nos da un criterio para decidir cual es el número óptimo de mediciones a realizar de un mesurando. Como suponemos que  $S_x$  es constante con  $N$ , la idea es hacer un número pequeño de mediciones  $N_{prel}$ , digamos unas 5 a 10, luego calcular  $S_x$ , de donde se obtiene:

$$N_{op} \gg \frac{\mathbf{s}_x \bar{\mathbf{o}}^2}{\mathbf{s}_{nom}}, \quad (1.15)$$

que resulta de imponer la condición:  $\mathbf{s}_{est} \gg \mathbf{s}_{nom}$ . Si  $N_{op} > N_{prel}$ , se completan las mediciones para lograr  $N_{op}$  valores. Si  $N_{op} < N_{prel}$ , no se realizan más mediciones que las preliminares y se usan todas ellas. En todos los casos, según la Ec. (1.2), el error combinado o efectivo vendrá dado por:

$$\Delta x^2 = \mathbf{s}_{ef}^2 = \mathbf{s}_{nom}^2 + \mathbf{s}_x^2 \quad (1.16)$$

Para la mayoría de los casos de interés práctico, si medimos 100 veces una magnitud  $x$ , aproximadamente 68 de ellas caerán en el intervalo  $(\bar{x} - \mathbf{s}_x, \bar{x} + \mathbf{s}_x)$ , 96 de ellas en el intervalo  $(\bar{x} - 2\mathbf{s}_x, \bar{x} + 2\mathbf{s}_x)$ , y 99 de ellas en el intervalo  $(\bar{x} - 3\mathbf{s}_x, \bar{x} + 3\mathbf{s}_x)$ . Estos resultados valen estrictamente para el caso en que los errores se distribuyan "normalmente", es decir, si el histograma formado con los resultados de las mediciones adopta la forma de una campana de Gauss <sup>[6]</sup>.

Resumiendo, los pasos a seguir para medir una magnitud física  $X$  son:

1. Se realizan unas 5 a 10 mediciones preliminares y se determina el error promedio de cada medición  $\mathbf{S}_x$ .
2. Se determina  $N_{op}$ .
3. Se completan las  $N_{op}$  mediciones de  $X$ .
4. Se calcula el promedio  $\bar{X}$  y su incertidumbre estadística  $\sigma_x$ .
5. Se calcula el valor del error efectivo  $\Delta X = \sqrt{\mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_{nom}^2}$ , ecuación (1.2).
6. Se escribe el resultado de la forma  $X = \bar{X} \pm \Delta X$ .
7. Se calcula el error relativo porcentual  $\epsilon_x = 100 * \Delta X / \bar{x}$ .
8. Si se desea verificar que la distribución de valores es normal, se compara el histograma de distribución de datos con la curva normal correspondiente, es decir con una distribución normal de media  $\bar{x}$  y desviación estándar  $\mathbf{S}_x$ .
9. Se analizan posibles fuentes de errores sistemáticos y se corrige el valor medido.
10. Se evalúa la incertidumbre absoluta de la medición combinando las incertidumbres estadísticas y sistemáticas (Ec. 1.2).

## 1.8 – Combinación de $N$ mediciones independientes

Una situación frecuente en ciencia es la determinación del mejor valor de una dada magnitud usando  $N$  valores que resultan de mediciones independientes (obtenidos por diferentes autores, con diferentes técnicas e instrumentos). Cada una de estas mediciones independientes puede tener asociada distintos errores. Es decir, tenemos un conjunto de  $N$  mediciones, cada una caracterizada por un par  $(x_k, \mathbf{s}_k)$ , con  $k = 1, 2, \dots, N$ . Nuestro objetivo es obtener el mejor valor para la magnitud en discusión. Es claro que al combinar los distintos resultados para obtener el mejor valor,  $\langle x \rangle$ , es preciso tener en cuenta los errores de cada determinación, de tal modo que aquellos valores que tengan menos error “pesen” más en el resultado final. Es posible demostrar en este caso que el mejor valor  $\langle x \rangle$  viene dado por<sup>[1,8]</sup>:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{x_k}{\mathbf{s}_k^2}}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{\mathbf{s}_k^2}} \quad (1.17)$$

Con un error dado por  $\mathbf{s}_{\langle x \rangle}$ :

$$\frac{1}{\mathbf{s}_{\langle x \rangle}^2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\mathbf{s}_k^2} \quad (1.18)$$

---

📖 Un caso especial de interés, es cuando tenemos  $N$  determinaciones del mesurado todos con el mismo error  $\sigma$ . Como puede deducirse fácilmente de la Ec. (1.17) el promedio será:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N x_k}{N},$$

que, como es de esperar, coincide con la expresión (1.12). La incertidumbre asociada a este valor será, según la Ec. (1.18):

$$\mathbf{s}_{\langle x \rangle} = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{N}},$$

que coincide con la expresión (1.14). Además queda ilustrado el significado de  $\mathbf{s}$  como el error asociado a cada medición individual y  $\mathbf{s}_{\langle x \rangle}$  como la incertidumbre asociada al mejor valor.

---

## 1.9 – Discrepancia

Si una magnitud física se mide con dos (o más) métodos o por distintos observadores, es posible (y muy probable) que los resultados no coincidan. En este caso decimos que existe una discrepancia en los resultados. Sin embargo, lo importante es saber si la discrepancia es significativa o no. Un criterio que se aplica en el caso especial pero frecuente, en el que las mediciones se puedan suponer que siguen una distribución normal, es el siguiente. Si los resultados de las dos observaciones que se comparan son independientes (caso usual) y dieron como resultados:

$$\text{Medición 1:} \quad X_1 = \bar{X}_1 \pm \Delta X_1$$

$$\text{Medición 2:} \quad X_2 = \bar{X}_2 \pm \Delta X_2$$

definimos:

$$\Delta X^2 = \Delta X_1^2 + \Delta X_2^2$$

Decimos que con un límite de confianza del 68% las mediciones son distintas si:

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \geq \Delta X,$$

y que con un límite de confianza del 96% las mediciones son distintas si:

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| \geq 2 \cdot \Delta X$$

Estos criterios pueden generalizarse para intervalos de confianza mayores en forma similar. También se aplican cuando se comparan valores obtenidos en el laboratorio con valores tabulados o publicados. Nótese la diferencia entre *discrepancia* y *error*, que en algunos textos poco cuidadosos se confunde. El error está relacionado con la incertidumbre en la determinación del valor de una magnitud. La discrepancia está asociada a la falta de coincidencia o superposición de dos intervalos de dos resultados

## 1.10 – Propagación de incertidumbres

Hay magnitudes que no se miden directamente, sino que se derivan de otras que sí son medidas en forma directa. Por ejemplo, para conocer el área de un rectángulo se miden las longitudes de sus lados, o para determinar el volumen de una esfera se tiene que medir el diámetro. La pregunta que queremos responder aquí es cómo los errores en las magnitudes que se miden directamente se propagarán para obtener el error en la magnitud derivada. Sólo

daremos los resultados, para mayor detalle se recomienda consultar la bibliografía citada. Supongamos, para fijar ideas, que la magnitud  $V$ , es una función de los parámetros,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , etc., o sea:

$$V = V(x, y, z, \dots), \quad (1.19)$$

y que  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , etc., sí se midieron directamente y que conocemos sus errores, a los que designamos en el modo usual como  $\mathbf{D}x$ ,  $\mathbf{D}y$ ,  $\mathbf{D}z$ , etc. Entonces se puede demostrar<sup>[1,3]</sup> que el error en  $V$  vendrá dado por:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \cdot \Delta z^2 + \dots} \quad (1.20)$$

En rigor las derivadas involucradas en esta ecuación son derivadas parciales respecto de las variables independientes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , etc. En el caso especial que la función  $V(x, y, z, \dots)$  sea factorizable como potencias de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , etc., la expresión anterior puede ponerse en un modo muy simple. Supongamos que la función en cuestión sea:

$$V(x, y, z) = a \cdot \frac{x^n \cdot y^m}{z^l} \quad (1.21)$$

Entonces:

$$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{n^2 \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + m^2 \cdot \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + l^2 \cdot \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \dots} \quad (1.22)$$

Para cálculos preliminares, esta expresión puede aproximarse por:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx n \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + m \cdot \left|\frac{\Delta y}{y}\right| + l \cdot \left|\frac{\Delta z}{z}\right|. \quad (1.23)$$

Esta última expresión para la propagación de los errores se conoce con el nombre de aproximación de primer orden, mientras que la expresión (1.22) se la denomina usualmente aproximación de segundo orden.

Otro caso particular de interés es  $Z = x \pm y$ . Usando la Ec. (I.10) obtenemos:

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad (1.24)$$

 **Truncación de números:** Se desea determinar la densidad de un cuerpo y para ello se procedió a medir su volumen, que dio como resultado  $V = 3.5 \pm 0.2 \text{ cm}^3$  ( $\epsilon_v\% = 6\%$ ) y su masa  $m = 22.7 \pm 0.1 \text{ g}$ . ( $\epsilon_m\% = 0.4\%$ ). Para calcular la densidad,  $\rho$ ; debemos realizar el cociente de  $\rho = m / V$ . Si realizamos este cociente con la calculadora obtenemos:

$$\rho = 22.7/3.5 = 6.485714286 \text{ g/cm}^3.$$

Claramente, la mayoría de estas cifras no son significativas y debemos truncar el resultado. Para saber dónde hacerlo, debemos propagar los errores del numerador y denominador, y ver a qué cifra afecta el error de  $\rho$ : Usando (1.22) obtenemos para  $\Delta\rho/\rho \approx 0.06$  y por tanto  $\Delta\rho \approx 0.4 \text{ g/cm}^3$ , con lo que en el valor de  $\rho$  sólo una cifra decimal es significativa. Sin embargo, al truncar el número 6.4857, debemos tener en cuenta que el número más cercano a él y con una sola cifra decimal es 6.5 y no 6.4 que resultaría de una truncación automática. Finalmente, el valor que obtenemos para  $\rho$  es:

$$\rho = 6.5 \pm 0.4 \text{ g/cm}^3 \quad \text{y} \quad \epsilon_\rho\% = 6\%.$$

Es importante tener en cuenta este criterio de truncación toda vez que realizamos una operación usando una calculadora o computadora.

☺ **Midiendo  $\pi$ :** Sabemos que el perímetro ( $p$ ) de un círculo está relacionado con su diámetro ( $d$ ) por la expresión  $p = \pi d$ , por lo tanto midiendo el diámetro y perímetro, es posible “medir  $\pi$ ”. Diseñe un experimento que le permita realizar esta medición. Obtenga  $\pi$  con este método. Dé su incertidumbre. Compare los valores tabulados de esta constante. Consulte en la bibliografía otros métodos de obtener  $\pi$  experimentalmente. En particular discuta si con el experimento de [Buffon](http://www.angelfire.com/wa/hurben/code5.html) se puede obtener mayor precisión (consulte la página de Internet: <http://www.angelfire.com/wa/hurben/code5.html> y <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/1719/>).

## 1.11 – Elección de los instrumentos

Un aspecto importante a tener en cuenta antes de proceder a realizar una medición, es la elección de los instrumentos más apropiados para medir con la tolerancia o error requerido. Ignorar este paso puede acarrear importantes pérdidas de tiempo y dinero. Si se excede la tolerancia requerida, seguramente se dilapidó esfuerzo y recursos innecesariamente; por el

contrario, si se realizó la medición con más error del requerido, la medición podría ser inútil para los fines perseguidos.

---

 Supongamos que nuestro problema es determinar el volumen de un alambre (cuyo diámetro es  $d \approx 3$  mm) y su longitud ( $L \approx 50$  cm) con un error del 1%. ¿Qué instrumentos debemos usar para lograr nuestro objetivo con el menor costo? Lo que debemos lograr es  $\Delta V/V \ll 0.01$ . Como  $V = \pi d^2 L/4$ , tenemos que:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2 \cdot \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L}$$

$$0.01 \approx 0.001 + 0.006 + 0.002$$

La primera expresión es una aplicación de (1.23), esta aproximación de primer orden es útil y suficiente para este análisis preliminar. La asignación de la segunda línea es en cierto modo arbitraria, pero hemos respetado que el error total no supere el 1% requerido. A  $\pi$ , que es un número irracional, le asignamos un error relativo pequeño, para que nos permita saber cuantas cifras debemos usar en  $\pi$  de modo que el error de la truncación de  $\pi$  no afecte nuestra medición. No medimos  $\pi$ !. Nótese que el error en el diámetro tiene mayor incidencia (su error relativo está multiplicado por 2) que la longitud  $L$ , y se debe a que el volumen es proporcional a  $d^2$  y proporcional a  $L$ . Un pequeño error en  $d$  tiene mayor incidencia en el error del volumen que lo que tiene el mismo error relativo en  $L$ . Por esta razón hemos asignado mayor tolerancia (error relativo) a  $d$  que a  $L$ . Con esta asignación preliminar podemos decidir cuáles instrumentos son más adecuados para realizar el experimento (los más adecuados son los que hacen la medición más fácil, en menor tiempo, con el menor costo y que cumplan los requisitos exigidos). Como

$$\frac{\Delta d}{d} \approx 0.003 \Rightarrow \Delta d \approx 0.003 \cdot d = 0.003 \cdot 3\text{mm} \approx 0.009\text{mm} \approx 0.01\text{mm},$$

debemos usar un tornillo micrométrico para medir  $d$ . Similarmente, para  $L$  tenemos:

$$\frac{\Delta L}{L} \approx 0.002 \Rightarrow \Delta L \approx 0.002 \cdot L = 0.002 \cdot 50\text{cm} \approx 1\text{mm},$$

por lo tanto podemos usar una regla común graduada en milímetros para medir  $L$ . Para  $\pi$  tenemos:

$$\frac{\Delta \pi}{\pi} \approx 0.001 \Rightarrow \Delta \pi \approx 0.001 \cdot \pi = 0.001 \cdot 3 \approx 0.003,$$

que indica que debemos usar  $\pi$  con 3 cifras decimales para que el error en su truncamiento tenga una incidencia despreciable. Nótese que hasta ahora todo es preliminar y solo hemos elegido los instrumentos a medir. Luego de la elección llevamos adelante la medición usando estos instrumentos y procedemos para la medición de  $d$  y  $L$ . Nótese también que para elegir los instrumentos a usar debemos conocer el valor aproximado de los valores a medir, lo que parecería una paradoja. No obstante, para este análisis preliminar sólo es necesario tener una idea de los órdenes de magnitud y no un valor muy exacto. Este orden de magnitud se puede obtener por una inspección visual o una medición rápida. Finalmente, una vez que realicemos las mediciones de  $d$  y  $L$  debemos usar la expresión (1.22) para calcular los errores  $\Delta V$  y  $\Delta e$ .

---

## Bibliografía

1. *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, 2<sup>nd</sup> ed., P. Bevington and D. K. Robinson, McGraw Hill, New York (1993).
2. *Numerical recipes in Fortran*, 2<sup>nd</sup> ed., W.,H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flanner, Cambridge University Press, N.Y. (1992). ISBN 0-521-43064x.
3. *Data analysis for scientists and engineers*, Stuart L. Meyer, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (1975). ISBN 0-471-59995-6.
4. *Trabajos prácticos de física*, J. Fernández y E. Galloni, Centro de Estudiantes de Ing. UBA , Buenos Aires (1963).
5. *Curso superior de física práctica*, B. L. Worsnop y H. T. Flint, Eudeba, Buenos Aires (1964).
6. *Mecánica elemental*, J. G. Roederer, 8<sup>a</sup>. ed., Buenos Aires, Eudeba (1963). ISBN: 950-23-0290-7.
7. *Guide to the expression of uncertainty in measurement*, 1<sup>st</sup> ed., International Organization of Standardization (ISO), Suiza (1993). En Internet: <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html>.
8. *Statistics: Vocabulary and symbols*, International Organization of Standardization (ISO), Suiza. En Internet: <http://www.iso.ch/info/sitemap.htm>.
9. *Radiation detection and measurement*, Knoll Glenn F., 2<sup>a</sup>. ed., John Wiley & Sons, New York (1989). ISBN 0-471-81504-7.

10. *Estadística*, Spiegel y Murray, 2<sup>da</sup> ed., McGraw Hill, Schaum, Madrid (1995). ISBN 84-7615-562-X.
11. *Uncertainty in the linear regression slope*, J. Higbie, Am. J. Phys. **59**, 184 (1991); *Least squares when both variables have uncertainties*, J. Orear, *ibid.*, **50**, 912 (1982).
12. *Probability, statistics and Montecarlo*, Review of Particle Properties, Phys. Rev. D **45**, III.32, Part II, June (1992).
13. *Teoría de probabilidades y aplicaciones*, H. Cramér, Aguilar, Madrid (1968); *Mathematical method of statistics*, H. Cramér, Princeton Univ. Press, New Jersey (1958).