

# Actividad III.xx – Medición de pequeñas señales en presencia de ruidos

## Introducción a la técnica de lock-in

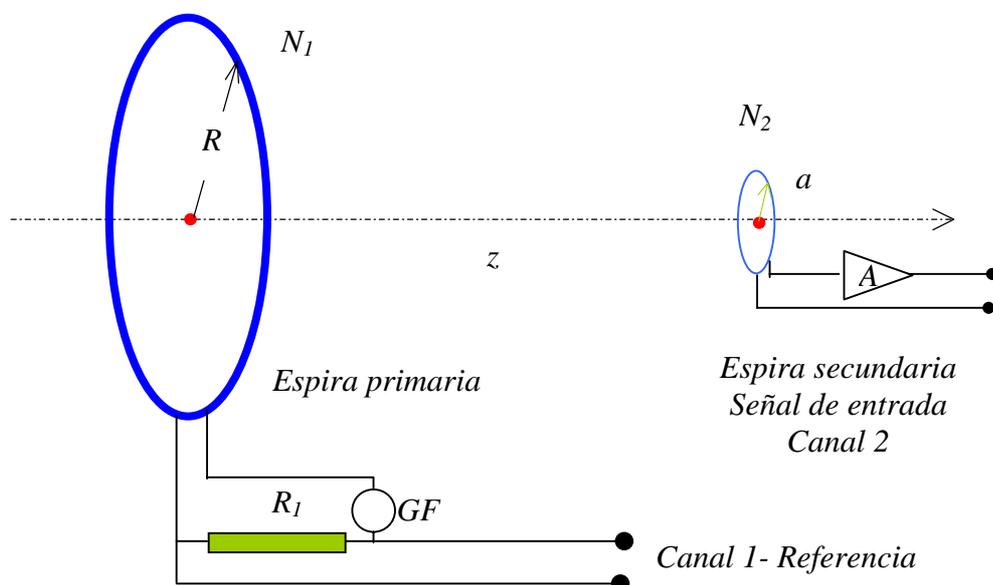
### Objetivo

La medición de pequeñas señales en presencia de alto ruido es un desafío permanente en muchos campos de la ciencia y la tecnología, el objetivo principal de este experimento es ilustrar la utilización de técnica muy poderosa y útil para logra medir pequeñas señales teniendo una frecuencia conocida<sup>1</sup>, pueden ser mucho menor que el ruido existente. Esta técnica se usa habitualmente los “Lock-in Amplifier” (LIA) que son instrumentos de mucha utilidad en los laboratorios modernos. En particular en este experimento se utilizará una tarjeta de adquisición de datos conectada a una computadora o bien un osciloscopio digital para detectar las señales de entrada y la señal de referencia para estudiar la variación del campo magnético de una espira a lo largo de su eje. Los algoritmos de extracción de la señal de interés se realizaran off-line, usando la técnica de los LIA.

### Introducción

#### Campos magnéticos de una espira

Utilizando la ley de Biot-Savart<sup>1-3</sup> es posible calcular el campo magnético de una espira circular a lo largo de su eje (eje  $z$ ), en el sistema SI tenemos:



**Figura 1.** Arreglo experimental para generar un campo magnético conocido en a posición de la espira exploradora (secundaria) de radio  $a \ll R$ .  $GF$  = generador de funciones que produce una señal de frecuencia conocida. La señal obtenida de la resistencia  $R_1$  se usa como referencia es adquirida en el canal 1, la salida del secundario, que contiene la salida de interés y posiblemente el ruido se mide en el canal 2. El amplificador lineal  $A$  es opcional pero se recomienda su uso.

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{N_1 \cdot R^2 \cdot i}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Aquí,  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío,  $R$  el radio de la espira,  $N_1$  el número de vueltas arrolladas y  $z$  la distancia a lo largo del eje, desde el centro de la espira (primaria) y el punto de observación de campo, posición de la bobina secundaria.

La bobina (o espira) primaria se alimenta con una fuente de tensión alterna, de frecuencia  $f$  conocida. Colocamos una segunda bobina, de tamaño mucho menor ( $a \ll R$ ) que la espira primaria, a una distancia  $z$  del centro de la primaria y con su eje coincidiendo con la primaria. Por la ley de inducción de Faraday esperamos una tensión inducida en la bobina secundaria. Si la corriente en el primario viene dada por

$$i(t) = I_0 \cdot \sin \omega \cdot t, \quad (2)$$

con  $\omega = 2\pi f$ , el valor de pico (máxima) de la *fem* inducida en la bobina secundaria será:

$$V_2^0(z) = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot R^2 \cdot I_0}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \omega. \quad (3)$$

Vemos así que la tensión medida en la bobina secundaria como función de  $z$  nos brinda un valor que es directamente proporcional a la variación de  $B_z(z)$ .

## Proyecto 1.- Campo magnético de una espira a lo largo de su eje

**Equipamiento recomendado:** Dos bobinas concéntricas de 50 a 500 vueltas cada una de modo de formar una especie de transformador con un primario exterior y un secundario interior. También se requiere de una barra de madera o plástico a lo largo del cual se puede variar y medir la distancia  $z$  entre las bobinas. Un sistema de adquisición de datos conectado a una computadora o bien un osciloscopio digital de dos canales de 20Mhz o más rápido. Un generador de funciones.

### Experimento:

- ✓ Usando el circuito descrito en la Figura 1, estudie experimentalmente la variación  $V_2^0$  (tensión de pico en el secundario) en función de la distancia  $z$  para una frecuencia aplicada  $f$  constante. La frecuencia debe ser de unos 60 a 75 Hz si usa un sistema de adquisición conectado a una PC. Lo importante es que la tasa de adquisición del sistema sea al menos 10 veces más rápido que la señal de entrada. ¿Por qué? Si usa un osciloscopio digital, la frecuencia aplicada  $f$  puede ser mayor, pero no conviene exceder de unos pocos KHz. Evite usar una frecuencia múltiplo de 50 Hz, ¿Por qué?
- ✓ Para este experimento evite la presencia de materiales ferromagnéticos en la adyacencia del su sistema. ¿Por qué?

- ✓ En cada medición (cada valor de  $z$ ) compare el valor de la señal obtenida usando la técnica de Lock-in con el valor de pico de la señal sin procesar del secundario. ¿Qué ventajas y desventajas puede señalar a la técnica de Lock-In? Realice un gráfico de la señal  $V_2^0$  procesada usando la técnica de LIA y la señal de pico bruta del secundario como función de la distancia  $z$ . ¿Qué puede concluir de este gráfico?
- ✓ Usando la técnica descrita en el apéndice A. Obtenga el valor de  $V_2^0$  para cada valor de  $z$  usado. Para ello realice las operaciones de multiplicación ( $PSD$ ) y de filtrado por software usando una planilla de cálculo o bien un programa ad hoc. Grafique  $V_2^0$  como función de  $z$ . Compare la dependencia obtenida con la expectativa teórica dada por (1). ¿Se cumplen las expectativas teóricas?

## Bibliografía

1. R. P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sand, *The Feynmann Lectures on Physics* – Vol.1 Chap. 49 –Addison-Wesley, Reading Ma 1970.
2. E. M. Purcell, *Berkeley physics course, volumen 2, Electricidad y Magnetismo* (Reverté, Barcelona, 1969).
3. J.D.Jackson, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, (1975).
4. J.H.Scofield, Frequency-domain description of a lock-in amplifier, *Am. J. Phys.* 62 129 (1994).
5. PC-Based Digital Lock-In Detection of Small Signals in the Presence of Noise, Philip Kromer, Ralph Robinett, Roger Bengtson, Charles Hays. Department of Physics, University of Texas at Austin. <http://mrflip.com/papers/LIA/AAPTpaper/aaptpaper.html>

## Apéndices

### Apéndice A: Como funciona el Lock-in Amplifier<sup>4,5</sup>

El lock-in amplifier, es un instrumento muy útil en los laboratorios y en la industria. Es particularmente adecuado cuando lo que se pretende medir son señales muy pequeñas en presencia de grandes ruidos. Un requerimiento básico para poder usar un lock-in es que la señal de entrada este modulada o tenga una frecuencia  $\omega_0$  bien conocida.

Para fijar ideas, supongamos que la señal de entrada consiste en una señal senoidal de frecuencia  $\omega_0$  en presencia de un ruido  $V_{noise}(t)$  de la forma:

$$V_{in}(t) = V_0 \cos \omega_0 t + V_{noise}(t) = V_0 \cos \omega_0 t + \int_0^{\infty} V_n(\omega) \cos \omega t \cdot d\omega . \quad (A1)$$

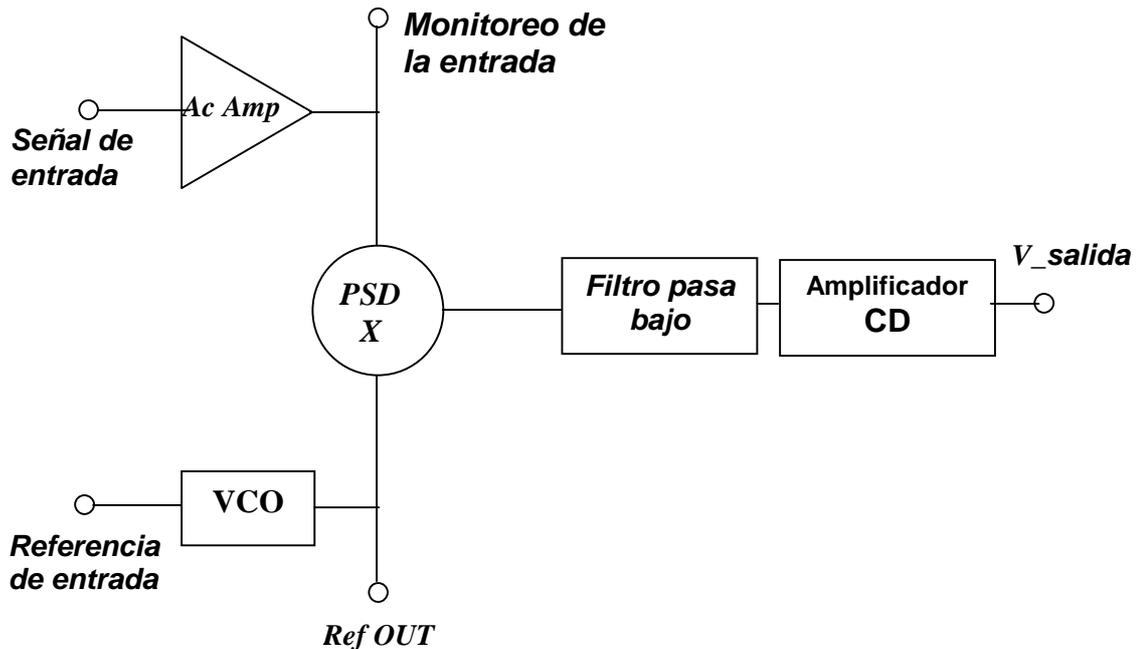
Suponemos además que el valor cuadrático medio o efectivo del ruido es mucho más grande que la señal de interés,  $V_0$ , es decir:

$$\langle |V_{noise}(t)|^2 \rangle = \int_0^{\infty} |V_n(\omega)|^2 \cdot d\omega \gg V_0^2 . \quad (A2)$$

El símbolo  $\langle f(t) \rangle$ , denota promedio temporal. También supondremos que podemos generar una señal de referencia que puede ser senoidal, cuadrada o triangular, pero que tiene la misma frecuencia que las señales de interés, es decir:

$$V_{ref}(t) = V_{VCO}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (A3)$$

Un componente clave en el lock-in es el módulo Phase Sensitive Detector (PSD) que en esencia lo que hace es multiplicar las señales que recibe, o sea lo que genera el PSD es una señal producto de las señales de entrada y la de referencia. Si suponemos que el amplificador de entrada del lock-in tiene una ganancia  $G$ , la señal a la salida del PSD será:



**Diagrama esquemático de un Lock in amplifier (LIA)**

- ✓ **VCO**= Voltage Control Oscillator
- ✓ **PSD** = Phase Sensitive Detector
- ✓ **Ac Amp**= Amplificador lineal de ac, usualmente con un filtro para amplificar selectivamente la señal de frecuencia  $\omega_0$ .
- ✓ **Ref. OUT**= Salida para monitorear la señal de referencia
- ✓ **Monitoreo de la entrada** Salida que nos permite monitorear la señal de entrada amplificada y filtrada por el Ac Amp.
- ✓ **Filtro para bajo** = Filtro pasa bajo, cuyos controles (constante de tiempos) se pueden variar desde el panel de control
- ✓ **Amplificador DC** = Amplificador de la salida de DC proporcional a la señal  $V_0$ .
- ✓  **$V_{salida}(X)$** = Salida DC proporcional a la señal  $V_0$ .
- ✓  **$V_{salida}(Y)$** = Salida DC proporcional a la señal  $V_0$  y desfasada respecto de  $V_{salida}(X)$  en  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ). Esta señal esta presente sólo en los Lock in de dos canales.

$$V_{PSD}(t) = G \cdot V_{in}(t) \cdot V_{VCO}(t) = G \cdot V_0 \cos \omega_0 t + G \cdot V_{noise}(t) = G \cdot V_0 \cdot E_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) + GE_0 \int_0^\infty V_n(\omega) \cos \omega t \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \cdot d\omega \quad (A4)$$

recordando la relación:

$$\cos \omega_0 t \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \{ \cos \varphi + \cos(2\omega_0 t + \varphi) \}, \quad (A5)$$

Como la señal a la salida del PSD pasa por un filtro pasa bajo, que en primera aproximación podemos suponer, da una señal que es el promedio temporal de la salida del PSD, podemos escribir:

$$\langle V_{PSD}(t) \rangle = \langle V_{in}(t) \cdot V_{VCO}(t) \rangle = \frac{GV_0}{2} \cdot E_0 \cos \varphi + GE_0 \int_0^{\infty} V_n(\omega) \delta(\omega - \omega_0) \cdot d\omega, \quad (A6)$$

o bien:

$$V_{out}(X) = \langle V_{PSD}(t) \rangle = \frac{GV_0}{2} \cdot E_0 \cos \varphi + GE_0 \cdot V_n(\omega_0). \quad (A7)$$

Los lock-in de *dos canales*, ofrecen además la salida  $V_{out}(Y)$  que es similar  $V_{out}(X)$  a pero desfasada respecto de esta en  $90^\circ$ . De este modo los lock-in de dos canales permiten medir simultáneamente las componentes en fase y fuera de fase (desfasada  $90^\circ$ ) de la señal de referencia. En otras palabras, en estos dispositivos se puede medir en forma simultánea las partes reales y complejas de la admitancia (impedancia) del sistema en estudio.

Nótese que la única componente del ruido presente en la señal de salida del Lock-in ( $V_{out}$ ) es la componente del ruido que tiene exactamente la misma frecuencia que la señal de entrada, es decir de todo el espectro infinito de frecuencias presentes en el ruido, Ecuación (A2), ha sido filtrado todas menos la de frecuencia  $\omega_0$ . Como en general esta componente, es solo una señal dentro del continuo de ruidos, es de esperar que la misma será menor, o mucho menor, que la señal de interés  $V_0$ , ya que

$$|V_n(\omega_0)|^2 \ll \int_0^{\infty} |V_n(\omega)|^2 \cdot d\omega. \text{ En general la diferencia de fase entre la señal de entrada y la referencia,}$$

$\varphi$  es variable; en la practica se elige dicha fase de modo de maximizar la señal de interés. Una discusión más detallada del funcionamiento de un lock-in puede encontrarse en la ref.(17).

Un aspecto interesante y útil de tener en cuenta, es que el algoritmo descripto más arriba puede aplicarse a situaciones similares. Por ejemplo, imaginamos que usamos un sistema de adquisición de datos por computadora o bien un osciloscopio digital. Por ejemplo el problema en cuestión podría ser determinar la tensión inducida en un secundario o bobina exploradora, a una cierta distancia de otra primaria, que suponemos se excita con una frecuencia conocida  $\omega_0$ . Más específicamente, esta señal de referencia:

$$V_{ref}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (A8)$$

se almacena o guarda en un canal, digamos el canal A. La señal de salida, contaminada con ruido, similar a las señal indicada en la expresión (A1) se almacena en el canal 2. Por software podemos hacer el producto de estas dos señales ( $V_{in}(t)$  y  $V_{ref}(t)$ ) y seguidamente, también por software realizamos el promedio temporal. Claramente es resultado sería el descripto por la expresión (7). Además, si promediamos la señal de entrada con una nueva señal de referencia artificial, de frecuencia ligeramente distinta de  $\omega_0$ , digamos  $\omega = \omega_0 + d\omega$ , según Eq., (A7) podríamos obtener una estimación del ruido:

$$V_{out} = GE_0 \cdot V_n(\omega). \quad (A9)$$

Si el ruido tiene un espectro suave sin cambios bruscos, la expresión (A9) se podría sustraer de la señal de salida (A9) para la frecuencia de excitación  $\omega_0$  o sea:

$$V_{out} = \frac{GV_0}{2} \cdot E_0 \cos \varphi + GE_0 \cdot V_n(\omega_0) - GE_0 \cdot V_n(\omega) \approx \frac{GV_0}{2} \cdot E_0 \cos \varphi. \quad (A10)$$

De este modo podemos medir el valor de la tensión inducida en el secundarios, aun en presencia de mucho ruido. Aquí suponemos que le señal del primario se mide en el canal B. Si en particular, la señal de entrada esta relacionada con la de referencia por una admitancia compleja, es decir:

$$V_0 = \chi(\omega) \cdot E_0 = [\chi_1(\omega) + j\chi_2(\omega)] \cdot E_0. \quad (A11)$$

Por lo tanto

$$V_{in} = \chi(\omega) \cdot E_0 = [\chi_1(\omega) \cdot \cos \omega_0 t + j\chi_2(\omega) \cdot \sin \omega_0 t] \cdot E_0 . \quad (A12)$$

Si ajustamos la fase  $\phi$  para que la señal en fase con la referencia sea máxima, podemos determinar la variación de  $\chi_1(\omega)$  como función de la frecuencia. Moviendo el swicht de fase a  $90^\circ$ , podemos estudiar la variación de  $\chi_2(\omega)$  como función de la frecuencia. De este modo podemos determinar una admitancia compleja  $\chi(\omega) = \chi_1(\omega) + j\chi_2(\omega)$ , usando el lock-in amplifier o bien la técnica correspondiente para analizar los datos, usando como instrumento de medición un osciloscopio digital o un sistema de adquisición de datos por computadora. En los lock-in de dos canales se puede medir simultáneamente las componentes en fase y fuera de fase (desfasada  $90^\circ$ ) de la señal de referencia. En otras palabras, en estos dispositivos se puede medir las partes reales ( $\chi_1(\omega)$ ) y complejas de la admitancia (impedancia) ( $\chi_2(\omega)$ ) en forma simultanea del sistema en estudio.