

# Actividad III.39 - Oscilaciones Libre y forzadas circuito RLC

## Principio de superposición y oscilaciones acopladas

---

### Objetivo

En los siguientes proyectos experimentales nos proponemos estudiar las características de circuitos **RCL** en serie y paralelo. También nos proponemos estudiar el principio de superposición y oscilaciones acopladas con una combinación de circuitos oscilantes. En la primera parte se estudia la respuesta de un circuito RLC serie libre, es decir sin la aplicación de un voltaje externo. En la segunda parte estudiaremos la respuesta de un circuito RLC en serie y en paralelo conectados a una tensión senoidal, focalizando la atención en la respuesta del sistema a la variación de amplitud de la tensión perturbadora y la frecuencia de la misma. Este modelo experimental nos permitirá introducir los conceptos de admitancia e impedancia y estudiar el fenómeno de resonancia de circuitos. Seguidamente se propone analizar la respuesta del circuito RLC para tensiones cuadradas y triangulares y explorar la validez del principio de superposición en estos sistemas. Por último deseamos estudiar el comportamiento de dos o más circuitos RLC acoplados, estos dispositivos constituyen un interesante e instructivo ejemplo de sistemas oscilantes acoplados, los cuales tienen análogos clásicos y cuánticos en diversas áreas de la física.

### Introducción

#### Oscilaciones libres

Cuando estudiamos circuitos que contiene una autoinductancia  $L$ , debemos recordar que la misma esta casi siempre hecha de alambres enrollados, los cuales tiene una cierta resistencia eléctrica, que denominamos  $R_L$ . Su valor es fácil de encontrar con un simple multímetro en el modo óhmetro. Por lo tanto la resistencia total o equivalente del circuito como el ilustrado en la figura 1 será  $R=R_I+R_L$ .

Si  $q(t)$  represente la carga en el capacitor en el instante  $t$ , usando la ley de las mallas de Kirchhoff tenemos:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (1)$$

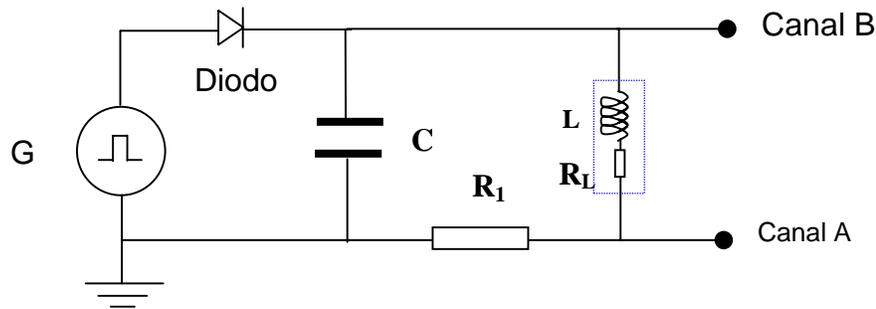
Si definimos:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad (2)$$

y

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad (3)$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \quad (4)$$



**Figura 1.** Circuito RLC serie, RL representa la resistencia interna de la inductancia, El diodo evita que el capacitor se descargue a través del generador de funciones (GF)

Es fácil comprobar que la solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea, representada por (1) viene dada por:

✓ **Caso subamortiguado**, si  $R < R_{crit} = 2\sqrt{L/C}$ ,

$$q(t) = q_0 \cdot \text{Exp}(-\gamma \cdot t) \cdot \text{Sin}(\omega_1 \cdot t + \phi) \quad (5)$$

donde  $q_0$  y  $\phi$  son dos constantes cuyos valores dependen de las condiciones iniciales o de borde. Por ejemplo de los valores de  $q(t)$  e  $i(t)$  para  $t=0$ . En este caso el sistema oscila con amplitudes decrecientes en el tiempo.

✓ **Caso sobreamortiguado**, si  $R > R_{crit}$ ,

$$q(t) = q_{10} \cdot \text{Exp}(-\lambda_1 \cdot t) + q_{20} \cdot \text{Exp}(-\lambda_2 \cdot t) \quad (6)$$

donde  $q_{10}$  y  $q_{20}$  son dos cantantes cuyos valores dependen de las condiciones iniciales y los valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las soluciones de:

$$\lambda^2 + 2\gamma \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (7)$$

✓ **Caso de amortiguamiento crítico**, si  $R = R_{crit}$

$$q(t) = q_{10} \cdot \text{Exp}(-\lambda \cdot t)(1 + B \cdot t) \quad (8)$$

donde  $q_{10}$  y  $B$  son dos cantantes cuyos valores dependen de las condiciones iniciales y  $\lambda$  es la solución degenerada de (7).

**Oscilaciones forzadas.** Si el circuito en estudio tiene incluida una fuente de tensión alterna o un generador de funciones (GF), sabemos que dicha fuente se puede modelar como un fuente de tensión (GF) ideal  $\varepsilon(t)$  y una cierta resistencia interna en serie  $r_{int}$  (Teorema de Thévenin). En la en la Figura 2 se ilustra este circuito. Si designamos con  $R$  resistencia total o equivalente del circuito es decir  $R=R_I+R_L+r_{int}$  ; aplicando la ley de las mallas de Kirchoff tenemos:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon(t) \quad (9)$$

Sin perdida de generalidad podemos suponer que las función  $\varepsilon(t)=(V_0 \text{ Sin}(\omega t))$  es senoidal, ya que por el teorema de Fourier cualquier función puede expresarse como una combinación lineal de funciones senoidales. Una solución particular de la ecuación diferencial inhomogénea (9) es:

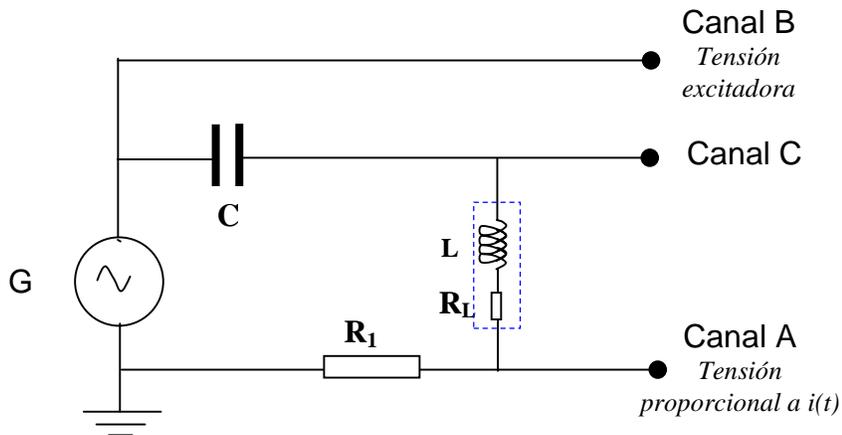
$$q(t) = -Q_0 \cdot \text{Cos}(\omega \cdot t + \beta) \quad (10)$$

con

$$Q_0 = \frac{V_0}{\omega \cdot \sqrt{R^2 + (L \cdot \omega - 1/C \cdot \omega)^2}} \quad (11)$$

y

$$\text{Tan} \beta = -\frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \quad (12)$$



**Figura 2.** Circuito RLC serie forzado,  $R_L$  representa la resistencia interna de la inductancia. La tensión medida en el canal A es proporcional a la corriente en circuito, mientras que la tensión de entrada se mide en el canal B.

Derivando (10) tenemos:

$$i(t) = I_0 \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t - \varphi) \quad (13)$$

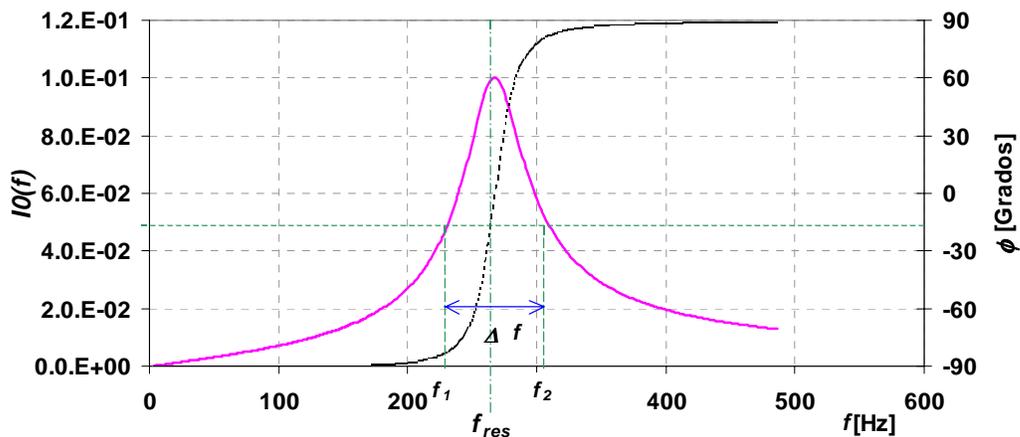
donde

$$I_0 = \frac{V_0}{Z(\omega)} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L \cdot \omega - 1/C \cdot \omega)^2}} \quad (14)$$

y

$$\text{Tan} \varphi = -\text{Tan} \beta = \frac{L\omega - 1/C\omega}{R} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (15)$$

El parámetro  $Z(\omega)$  se conoce con el nombre de impedancia del circuito a la frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$  y es una generalización del concepto de resistencia para circuitos de corriente continua. Las soluciones particulares (10) y (13) de la ecuación diferencial del circuito (9) constituyen físicamente la *respuesta permanente o estacionaria* del sistema. Si se desea obtener la respuesta completa (solución completa de la ec. (9)), debemos agregar a la soluciones particulares (10) y (13) las soluciones generales de la ecuación diferencial homogénea. Esto significa que la solución completa de (9) se obtiene sumando a la expresión (10) las soluciones (6), o (7) o (10), según sea el valor de  $R$  respecto de  $R_{crit}$ , y eligiendo las constantes arbitrarias de modo de satisfacer las condiciones iniciales, o sea los valores de  $q(0)$  e  $i(0)$ .



**Figura 3.** Respuesta en frecuencia de un circuito RLC serie forzado. La curva gruesa representa el valor de la amplitud de corriente  $I_0(f)$ . La curva de trazos fina, referida a la escala izquierda representa la diferencia de fase entre la tensión aplicada y la corriente.

En la Figura 3 se muestra la dependencia de la corriente máxima  $I_0 = V_0 / |Z(\omega)|$  y la fase de un circuito RLC en serie como función de la frecuencia. Nótese que  $I_0(\omega)$  tiene un máximo para  $f = f_{res} = \omega / 2\pi$ . Asimismo vemos que la fase  $\phi$  para por su mínimo para

dicha frecuencia. También, es interesante notar que esta no es la frecuencia a la cual  $Q_0(\omega)$  alcanza su máximo. La frecuencia para la cual la diferencia de fase entre la corriente y la tensión aplicada es nula, se denomina la frecuencia de resonancia. En algunos sistemas pueden haber varias frecuencias de resonancias. En el caso del circuito RLC en serie para la frecuencia de resonancia la corriente es máxima.

**Reactancias complejas:** Si trabajamos con notación compleja, con  $j \equiv \sqrt{-1}$ , la tensión de entrada se puede considerar la parte compleja de  $V_0 \cdot \text{Exp}(j\omega t)$ . Definimos la reactancia capacitiva como  $X_C = 1/(jC\omega)$  y la reactancia inductiva  $X_L = jL\omega$ . La reactancia óhmica  $X_R = R$ . Con esta notación (compleja), combinamos las reactancias como si fuesen resistencias, pero preservando su carácter complejo. Aplicando este formalismo al circuito RLC serie de la Figura 2, obtenemos para la impedancia total o equivalente:

$$Z(\omega) = R + j(L\omega - 1/C\omega) \quad (16)$$

con esta notación podemos escribir:

$$i(t) = \frac{V_0 \cdot \text{Exp}(j\omega t)}{Z(\omega)} = \frac{V_0}{|Z(\omega)|} \cdot \text{Exp}(j\omega t - \varphi) \quad (17)$$

Estas dos últimas expresiones, son completamente equivalentes a las Ecs.(13), (14) y (15); con la diferencia que el método que usa reactancias e impedancias complejas puede aplicarse a cualquier combinación (serie, paralelo o combinación de los mismos) de elementos.

El factor de mérito o calidad  $Q_M$  se define como la razón del de la frecuencia de resonancia y la diferencia de las frecuencias que determinan el semiancho de la curva de resonancia (Fig. 3), es decir

$$Q_M = \frac{\omega_{res}}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{f_{res}}{\Delta f} \quad (18)$$

Si para  $\omega_{res}$ , la corriente alcanza su valor máximo  $I_{max}$ , para las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  tenemos que:  $i(\omega_{1,2}) = I_{max}/2$ . Para un circuito RLC serie es fácil probar que:

$$Q_M = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} \quad (19)$$

A menudo es útil usar la admitancia compleja de un circuito  $Y(\omega) = 1/Z(\omega)$ .

## Proyecto 1.- Respuesta del circuito RLC libre

**Equipamiento recomendado:** Bobinas (autoinductancias de algunas centenas de mH) dos o más capacitores entre 10 nF y 500 nF y resistencias de 50, 100, 500Ω y de 1 y 10KΩ. Un sistema de adquisición de datos conectado a una computadora. Un generador de funciones. Es conveniente que la velocidad de adquisición sea de al menos unas 10 veces mayor que las frecuencias características a medir. Si no se dispone de un sistema de adquisición de datos por computadoras, también se puede usar un osciloscopio de dos canales y de 20 MHz o más rápido.

Mida los valores de  $L$  y  $R_L$ . Elija un capacitor  $C$  de modo que la frecuencia natural (ec.(2))  $f_0 = \omega_0 / 2\pi$  sea menor que unos 3 o 4 khz. Asegúrese que el sistema de adquisición tenga una velocidad de adquisición de una 10 veces esta frecuencia o más. Calcule el valor de  $R_{crit}$  para su circuito y asegúrese que  $R_{crit} > R_L$ .

Usando el circuito de la figura 1, conecte los terminales de su sistema de adquisición a los puntos indicados como canal A y B. de utilizando en el GF una forma de onda cuadrada, estudiar experimentalmente la variación de la tensión en  $R$ ,  $L$  y  $C$ , cuando se descarga el capacitor.

- ✓ Grafique sus resultados experimentales de  $i(t)$  y  $q(t)$  como función de tiempo.
- ✓ A partir de un ajuste con la expresión (5), evalúe cuán adecuada es esta expresión para explicar sus datos. A partir del ajuste de la curva teórica a los datos, obtenga los valores de  $f$  y  $\gamma$  experimentales. De ser posible estime los errores en la obtención de dichos parámetros.
- ✓ Compare los valores de  $f$  y  $\gamma$  obtenidos de la variación de  $i(t)$  como función de tiempo, con los valores predicho por la teoría, Ec.(2), (3) y (4) usando los valores medidos de  $L$ ,  $C$ ,  $R_L$  y  $R_I$ . ¿Qué puede concluir a cerca del modelo propuesto para explicar sus datos de este estudio?
- ✓ Varíe la frecuencia y la amplitud del GF usado e indique si se nota alguna variación en la firma de la señal de  $i(t)$ . ¿Qué puede concluir de esta análisis?
- ✓ Varíe el valor de  $R_I$  de modo que  $R > R_{crit}$ . Estudie la variación de  $i$  en función de tiempo y compare con los resultados predichos por el modelo. ¿Qué puede concluir de esta comparación?

**Nota:** Recuerde que por lo regular, la tierra (GND = Cable negro) de los osciloscopios o los sistemas de adquisición para los dos canales son lo mismo, es decir la mayoría de los sistemas de medición simples operan en “modo común”.

**Diagrama de fase y diagrama de Bode:** Un gráfico muy instructivo en muchos sistemas físicos, es el diagrama de fases, en el caso de sistemas mecánicos de un solo grado de libertad, por ejemplo uno en que la única coordenada que especifica el estado de sistema es la coordenada  $x(t)$ , el diagrama de fases se construye representando  $v=dx/dt$  y  $x(t)$  como función de  $t$ . En otras palabras, en cada instante de tiempo el sistema viene representado por un punto en el espacio de las fases  $(x,v)$ . Al evolucionar el sistema en el tiempo, el punto representativo del estado del sistema en el espacio de las fases describe una trayectoria. En los sistemas eléctricos como el circuito RLC estudiado aquí, la coordenada generalizada que especifica el estado del sistema podría ser la variable carga en el capacitor  $q(t)$ . Por lo tanto el diagrama de fases en este caso se construye graficando  $i=dq/dt$  como función de  $q(t)$ , el tiempo en este diagrama juega el papel de parámetro. En el caso de circuitos eléctricos o electrónicos, estos gráficos se conocen como diagramas de Bode.

- ✓ Demuestre que tanto para un oscilador armónico unidimensional y sin roce como para un circuito ideal  $LC$  ( $R=0$ ), el diagrama de fases es una elipse.
- ✓ Para el circuito RLC, en el caso subamortiguado ( $R < R_{crit}$ ), grafique sus resultados experimentales de  $i(t)$  en función de  $q(t)$  (diagrama de Bode). Interprete los resultados obtenidos teóricamente.

## Proyecto 2.- Respuesta del circuito RLC Forzado

**Equipamiento recomendado:** Bobinas (autoinductancias de algunas centenas de mH) dos o más capacitores entre 10 nF y 500 nF y resistencias de 50, 100, 500 $\Omega$  y de 1 y 10K $\Omega$ . Un sistema de adquisición de datos conectado a una computadora y/o un osciloscopio de dos canales, de 20 MHz o más rápido. Un generador de funciones. Es conveniente que la velocidad de adquisición del sistema conectado la computadora sea de al menos unas 10 veces mayor que las frecuencias características a medir. En este caso es tal vez más conveniente usar un osciloscopio de dos canales de 20 MHz o más rápido.

Mida los valores de  $L$  y  $R_L$ . Elija un capacitor  $C$  de modo que la frecuencia natural (ec.(2))  $f_0 = \omega/2\pi$  sea menor que unos 3 o 4 khz. Si realizo el proyecto 1, puede usar los mismos elementos ya utilizados, pero esta vez en un arreglo como el que se muestra en la figura 2. Asegúrese que el sistema de adquisición tenga una velocidad de adquisición de una 10 veces esta frecuencia o más. Conecte los terminales de su sistema de adquisición u osciloscopio a los puntos indicados como canal A y B, de ese modo la

señal del canal A es proporcional a  $i(t)$  y la señal del canal B nos mide la tensión excitadora o tensión de entrada.

**Cálculos preliminares:** para el circuito de la figura 2, suponiendo una entrada senoidal, determine la impedancia compleja  $Z(\omega)$  del circuito. Realice un gráfico del módulo de  $Z(\omega)$  como función de la frecuencia. En el mismo gráfico, usando un eje vertical secundario, grafique la variación de la fase de  $Z(\omega)$  como función de la frecuencia.

- ✓ Usando el circuito de la figura 2 con una fuente de tensión senoidal, estudiar la forma de las funciones  $i(t)$  y  $V(t)$  como función del tiempo. ¿Qué formas tienen estas señales?
- ✓ Determine la diferencia de fases entre  $i(t)$  y  $V(t)$ , para ello, use el procedimiento descrito en el apéndice G de física re-Creativa<sup>7</sup> para medir dicha diferencia de fase.
- ✓ Si denotamos con  $I_0(f)$  y  $V_0(f)$  los valores máximos de la corriente y la tensión aplicada y si  $\phi(f)$  denota la diferencia de fases entre la tensión aplicada y la corriente, cuando excitamos en circuito con una dada frecuencia  $f$ . Determine la frecuencia  $f_{res}$  para la cual la relación  $I_0(f)/V_0(f)$  es máxima.
- ✓ Para frecuencias en el entorno de  $f_{res}$  determine la diferencia de fases  $\phi(f)$  como función de la frecuencia aplicada  $f$ . Para ello es útil graficar en el osciloscopio o en la computadora,  $i(t)$  (canal A) en función de  $v(t)$  (canal B), en el modo  $xy$ . Este método se discute con más detalle en el apéndice G del libro Física re-Creativa<sup>[7]</sup>.
- ✓ Compare el valor obtenido experimentalmente para la frecuencia  $f_{res}$ , con el valor calculado usando las expresiones (14) y (15).
- ✓ Varíe la frecuencia alrededor de  $f_{res}$  y obtenga un gráfico experimental de  $I_0(f)/V_0(f)$  y  $\phi(f)$  en función de  $f$ . En el mismo gráfico dibuje la expectativa teórica que se obtiene a partir de los valores medidos de  $R$ ,  $L$  y  $C$  usando las expresiones (14) y (15). ¿Qué puede concluir de esta comparación?
- ✓ A partir de su gráfico experimental, obtenga el factor de mérito  $Q_M$  del circuito usando la expresión (18) y compare con el valor teórico (19).
- ✓ Analice como varía el diagrama de Bode para este circuito cuando varía la amplitud de tensión aplicada. ¿Qué concluye?

## Proyecto 3.- Respuesta del circuito RLC en paralelo – Resonancia

**Equipamiento recomendado:** Bobinas (autoinductancias de algunas centenas de mH), si se desea lograr una bobina de alto factor de mérito, se puede emplear y una bobina de pocas vueltas con un núcleo de ferrita. Un capacitor entre 10 nF y 500 nF y resistencia  $R_0$  de 1 a 10K $\Omega$ . Un generador de funciones. Un osciloscopio de dos canales de 20 MHz o más rápido.

Muchas veces resulta útil definir la función transferencia  $T(\omega)$ . Para un circuito lineal con excitación senoidal  $T(\omega)$  se define como el cociente entre la tensión (compleja) de la salida  $V_B(t)$  y la tensión compleja senoidal de la entrada,  $V_A(t)$ , esto es:

$$V_{salida}(t) = T(\omega) \cdot V_{Entrada}^0 \cdot \text{Exp}(j \cdot \omega t) \quad (20)$$

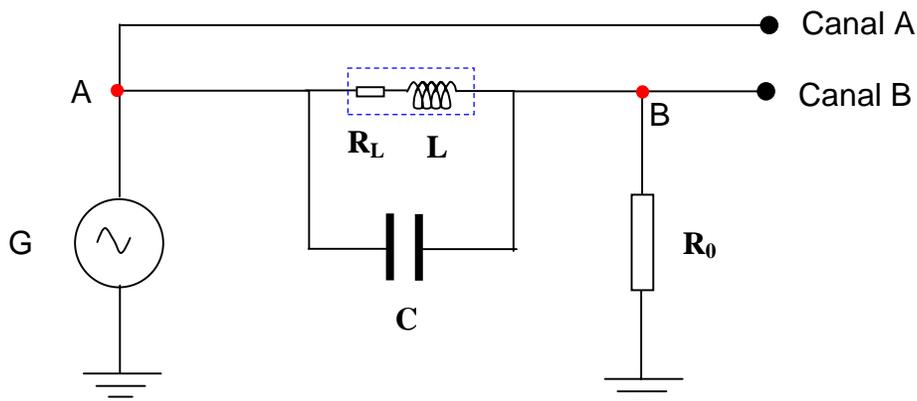
Nótese que en general la función transferencia es una función compleja de  $\omega$ . Si las entradas no son senoidales, la función de transferencia se define como la relación entre la transformada de Laplace de la señal de salida a la transformada de Laplace de la entrada.<sup>9</sup>

Mida los valores de  $L$  y  $R_L$ . Elija un capacitor  $C$  de modo que la frecuencia natural (ec.(2))  $f_0 = \omega/2\pi$  sea del orden de 10 khz. Construya un circuito similar al indicado en la Figura 3. Conecte las puntas de prueba de osciloscopio a los puntos indicados como canal A y B

**Cálculos preliminares:** para el circuito de la figura 3 suponiendo una entrada senoidal, determine la impedancia compleja  $Z(\omega)$  de la parte del circuito entre los puntos A y B. Calcule asimismo la función de transferencia  $T(\omega)$  entre la salida ( $V_B$ ) y la entrada ( $V_A$ ). Realice un gráfico de los módulos de  $Z(\omega)$  y  $T(\omega)$  como función de la frecuencia. En el mismo grafico, usando un eje vertical secundario, grafique la variación de la fase de  $T(\omega)$  como función de la frecuencia.

- ✓ Usando la técnica de reactancias complejas, estudie teóricamente las características física del circuito de la Figura 3.
- ✓ Usando una fuente de tensión senoidal, estudiar la forma y la relación entre  $i(t)$  a partir de la medición del canal B y  $V(t)$  (canal B) como función del tiempo. ¿Qué formas tienen estas señales?.

- ✓ Determine la diferencia de fases entre  $i(t)$  y  $V(t)$ , para ello, use el procedimiento descrito en el apéndice de este libro para medir dicha diferencia de fase.
- ✓ Si denotamos con  $I_0(f)$  y  $V_0(f)$  los valores máximos de la corriente y la tensión aplicada y si  $\phi(f)$  denota la diferencia de fases entre la tensión aplicada y la corriente, cuando excitamos en circuito con una dada frecuencia  $f$ . Determine la frecuencia  $f_{res}$  para la cual la relación  $I_0(f)/V_0(f)$  es máxima. Para esta frecuencia determine la diferencia de fases  $\phi(f_{res})$ . Compare el valor obtenido experimentalmente para la frecuencia  $f_{res}$ , con el valor teórico.



**Figura 3.** Circuito LC paralelo,  $R_L$  representa la resistencia interna de la inductancia y  $R_0$  es una resistencia auxiliar que nos permite medir la corriente midiendo la tensión en el canal B.

- ✓ Varíe la frecuencia alrededor de  $f_{res}$  y obtenga un gráfico experimental de  $I_0(f)/V_0(f)$  y  $\phi(f)$  en función de  $f$ . En el mismo gráfico dibuje la expectativa teórica que se obtiene a partir de los valores medidos de  $R_0$ ,  $R_L$ ,  $L$  y  $C$ . ¿Qué puede concluir de esta comparación?
- ✓ A partir de su gráfico experimental, obtenga el factor de mérito del circuito usando y compare con el valor teórico.

## Proyecto 4- Respuesta del circuito RLC forzado a una excitación cuadrada y triangular.

**Equipamiento recomendado:** Bobinas (autoinductancias de algunas centenas de mH) dos o más capacitores entre 10 nF y 500 nF y resistencias de 50, 100 y 500Ω. Un sistema de adquisición de datos conectado a una computadora. Un generador de funciones. Es conveniente que la velocidad de adquisición del sistema conectado a la computadora sea de al menos unas 10 veces mayor que las frecuencias características a medir.

Una de las propiedades más notables e interesantes de los sistemas lineales es que obedecen el principio de superposición. Si a un sistema lineal, regido por una ecuación diferencial lineal, que simbólicamente la denotamos con  $\hat{L}^{\Xi}$  tiene una respuesta  $i_1(t)$  para una excitación  $v_1(t)$ , es decir:

$$\hat{L}\{i_1(t)\} = v_1(t) \quad (20)$$

similarmente, si el sistema tiene la respuesta  $i_2(t)$  para una excitación  $v_2(t)$ .

$$\hat{L}\{i_2(t)\} = v_2(t) \quad (21)$$

la respuesta del sistema lineal para una excitación combinada ( $a \cdot v_1(t) + b \cdot v_2(t)$ ) será ( $a \cdot i_1(t) + b \cdot i_2(t)$ ), o sea para un sistema lineal vale la condición:

$$\hat{L}\{a \cdot i_1(t) + b \cdot i_2(t)\} = a \cdot v_1(t) + b \cdot v_2(t) \quad (22)$$

Donde,  $a$  y  $b$  dos constantes reales cualesquiera. Esta relación es muy importante en los sistemas lineales y constituye una condición necesaria y suficiente para que un sistema sea considerado lineal. Ella implica que si en estado estacionario, duplicamos la señal de entrada  $v(t)$ , la señal de salida  $i(t)$  también se duplica de su valor original y sin modificar su forma.

Por el teorema de Fourier sabemos que cualquier función periódica  $f(t)$ , de periodo  $T$ , se puede expresar como una combinación lineal de funciones senoidales, es decir:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + a_n \cdot \sin\left(n \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \quad (23)$$

Si llamamos  $\omega_0 = 2\pi/T$ , en notación compleja el teorema de Fourier se puede escribir como:

---

<sup>Ξ</sup> Referido a la ecuación (1), si  $\hat{L} = L d^2/dt^2 + R d/dt + 1/C$ , la ecuación diferencial (1) se escribiría  $\hat{L}\{q(t)\} = 0$ .

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( c_n \cdot \text{Exp}(j \cdot n \frac{2\pi}{T} \cdot t) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n \cdot \text{Exp}(j \cdot \omega_0 \cdot t)). \quad (24)$$

donde las constantes  $c_n$  se determinan a partir de la forma de la función  $f(t)$  a lo largo de un período  $T$ , más explícitamente:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \text{Cos}(n \cdot \omega_0 t) \cdot dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \text{Sin}(n \cdot \omega_0 t) \cdot dt \quad (25)$$

y

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \text{Exp}(-j \cdot n \cdot \omega_0 t) \cdot dt \quad (26)$$

donde  $t_1$  es un tiempo arbitrario que indica en inicio de un período de  $f(t)$ . Por lo tanto si conocemos que la respuesta del sistema lineal para una excitación senoidal  $v(t)=V_0 \text{Exp}(j \cdot \omega \cdot t)$  es  $i(t)=V_0 \text{Exp}(j \cdot \omega \cdot t)/Z(\omega)$ , es decir:

$$\hat{L}\{i(t)\} = \hat{L}\left\{\frac{V_0}{Z(\omega)} \cdot \text{exp}(j \cdot \omega \cdot t)\right\} = V_0 \cdot \text{exp}(j \cdot \omega \cdot t), \quad (27)$$

entonces, podemos calcular la respuesta,  $i(t)$  para cualquier excitación periódica por medio del teorema de superposición. En particular si la excitación de entrada  $v(t)=f(t)$  viene descrita por (24), según el teorema de superposición tenemos:

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{c_n}{Z(n\omega_0)} \cdot \text{Exp}(j \cdot n\omega_0 \cdot t) \right), \quad (28)$$

donde  $Z(n\omega_0)$  es la impedancia compleja del sistema a la frecuencia  $\omega=n\omega_0$ .

En particular si:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \text{Sin}(n\omega_0 \cdot t)). \quad (29)$$

Entonces:

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{|Z(n\omega_0)|} \cdot \text{Sin}(j \cdot n\omega_0 \cdot t + \varphi(n\omega_0)) \right), \quad (30)$$

El objeto de este proyecto es falsear la aplicación del teorema de Fourier para un circuito RLC serie, para el caso de señales cuadradas y triangulares. Para este proyecto, puede usar el mismo circuito usado en proyecto 2, usando el esquema de la figura 2.

Frecuentemente es útil presentar en forma de histograma las constantes  $c_n$  de la expresión (24) o las constantes  $a_n$  de la expresión (29) como función de las frecuencias  $\omega_n=n\omega_0$ . Este diagrama se conoce como espectro de Fourier de la función (24) o (29). Hay muchos programas que realizan análisis de Fourier y permiten obtener el correspondiente espectro de una dada función  $f(t)$ , esta función en muchos programas se designa con la sigla *FFT* (Fast Fourier Transform). Tanto Origin, Excel, Mathematica, MatLab, etc. disponen de esta herramienta. Es fácil ver de (28) y (30) que el espectro de Fourier de la corriente  $i(t)$  para una excitación  $f(t)$ , es el producto del

espectro de Fourier de la excitación  $f(t)$  multiplicada por la correspondiente admitancia  $Y(\omega)$ . Por consiguiente vemos que es posible analizar un sistema en el dominio del tiempo. Es decir para cada función de excitación  $f(t)$  encontrar su correspondiente respuesta  $i(t)$ . También es frecuentemente útil analizar el sistema en el dominio de las frecuencias, haciendo una transformación de Fourier.

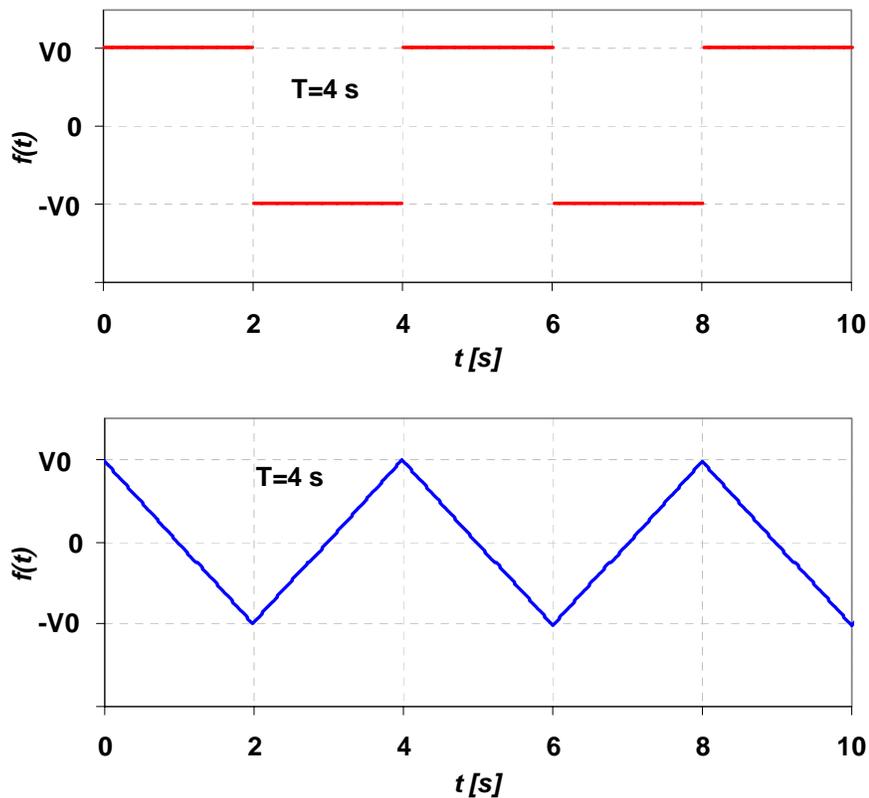
- ✓ Usando una señal de entrada cuadrada, de frecuencia  $f(=1/T)$  de aproximadamente  $f_{res}/10$ , determine experimentalmente la forma de la señales de entrada  $v(t)=f(t)$  y la forma de la señal de salida  $i(t)$ . Seguidamente, duplique la señal de entrada o disminúyala en un factor 2, y determine nuevamente la señal de salida. Verifique si las condición (22) se verifica para sus sistema. Discuta sus conclusiones relativo a la valides de la condición de linealidad (22).
- ✓ Adquiera los datos para la entrada y la salida para varios periodos, tratando que en cada periodo, tanga por lo menos 100 datos de cada señal. Usando algún programa apropiado, realice una análisis de Fourier (FFT) de ambas señales y verifique si las mismas contiene o no las mismas frecuencias. Si sus sistema es lineal, ¿sería posible encontrar en la salida alguna frecuencia que no esté presente en la entrada?. Discuta sus resultados
- ✓ Usando el teorema de Fourier, determine los coeficientes de la expansión ( $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$ ) de la señal de entrada. Usando la expresión (25) o la correspondiente real (26), calcule la forma de  $i(t)$  teórica y compare la forma de la misma con la experimental gráficamente. Use un valor de n máximo tal que haga que el error en la señal de entrada sea del orden de 1%.
- ✓ Analice y grafique la entrada ( $v(t)$ ) y la salida ( $i(t)$ ) del circuito tanto en el dominio del tiempo, es decir tomando al tiempo como variable independiente, como en el dominio de las frecuencias, es decir como varían los coeficientes de Fourier de la entrada y salida en función de las frecuencias. ¿Cómo se comparan los resultados experimentales con las expectativas teóricas?
- ✓ Usando una señal de entrada triangular, de frecuencia  $f(=1/T)$  de aproximadamente  $f_{res}/10$ , realice el mismo estudio experimental.
- ✓ ¿qué puede concluir de sus estudios respecto del teorema de superposición para su sistema?

**NOTA:** Expansión de Fourier par una señal cuadrada de amplitud  $V_0$  y período  $T(=\pi/\omega_0)$  como la que se muestra en la Figura 6 a, tenemos:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \text{Sin}(n\omega_0 \cdot t)) = -\frac{4 \cdot V_0}{\pi} \cdot \left[ \frac{\text{Sin}(\omega_0 t)}{1} + \frac{\text{Sin}(3\omega_0 t)}{3} + \frac{\text{Sin}(5\omega_0 t)}{5} + \frac{\text{Sin}(7\omega_0 t)}{7} + \dots \right] \quad (31)$$

y para una señal triangular, similar al de la que se muestra en la Figura 6 b, tenemos:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \text{Sin}(n\omega_0 \cdot t)) = +\frac{4 \cdot V_0}{\pi} \cdot \left[ \frac{\text{Sin}(\omega_0 t)}{1^2} + \frac{\text{Sin}(3\omega_0 t)}{3^2} + \frac{\text{Sin}(5\omega_0 t)}{5^2} + \frac{\text{Sin}(7\omega_0 t)}{7^2} + \dots \right] \quad (32)$$



**Figura 4.** Señales cuadradas y triangulares de amplitud  $V_0$  y período  $T$ .

## Proyecto 5.- Respuesta del circuito RLC no lineal

**Equipamiento recomendado:** Bobinas con núcleo de ferrita (autoinductancias de algunas centenas de mH), de pocas vueltas y baja resistencia  $R_L < 100\Omega$ . Un varicap de capacidad entre 10 nF y 200 nF aproximadamente y resistencia  $R_0$  de 10 a  $1K\Omega$ . Un generador de funciones. Un osciloscopio de dos canales de 20 MHz o más rápido, preferentemente digital.

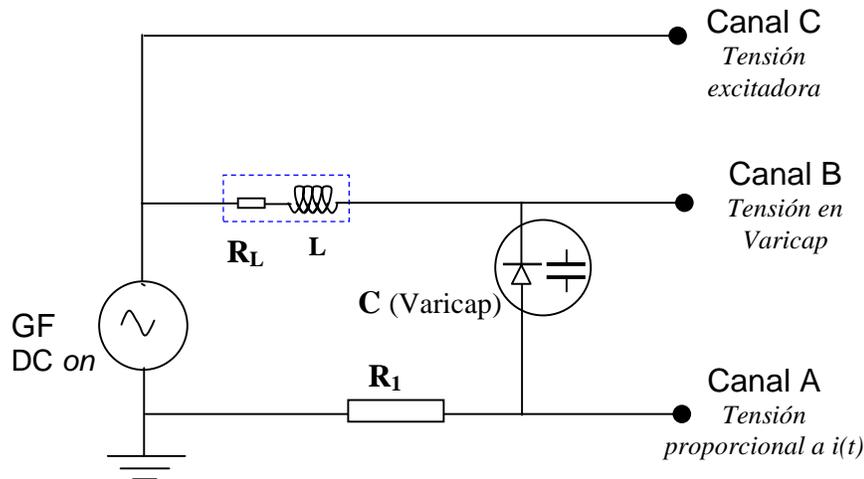
Algunos diodos, operados con voltajes revertidos (en modo de no conducción) pueden ser usados como capacitores, cuya capacidad varía con la tensión aplicada. Estos tipos de dispositivos se conocen como varicap o varactores o también como epicap. Por lo general sus capacidades varían entre algunas centenas de pF a baja tensión ( $V < 0.1$  V) hasta unos pocos pF a voltajes de alguna decenas de voltios.<sup>9</sup>

Para estos dispositivos es posible modelar la capacidad por medio de la siguiente relación:<sup>11,12,13,14</sup>

$$C(V) = C_0 \cdot (1 + \alpha \cdot V)^{-\gamma}, \quad (33)$$

donde  $V$  es el voltaje (reverso) aplicado al varicap,  $\alpha$  y  $\gamma$  son dos constantes del dispositivo ( $\gamma \approx 0.44$ ). Para este experimento conviene que la frecuencia de resonancia

nominal, esto es la frecuencia de resonancia correspondiente al valor medio de C (en la zona de trabajo) sea en lo posible de unos pocos Khz. ( El al Figura 5 se muestra un circuito posible para este experimento. Los parámetros a monitorear son principalmente son la tensión de entrada, las tensiones en la resistencia (canal A) y en el varicap (Canal B –Canal A)



**Figura 5.** Circuito RLC no lineal forzado,  $R_L$  representa la resistencia interna de la inductancia. La tensión medida en el canal A es proporcional a la corriente en circuito, mientras que la caída de tensión en el varicap es la diferencia entre al canal B y canal A. La de entrada se mide en el canal C. Conviene usar un offset o tensión de polarización DC en el GF de modo de lograr que el varicap siempre este polarizado inverso.

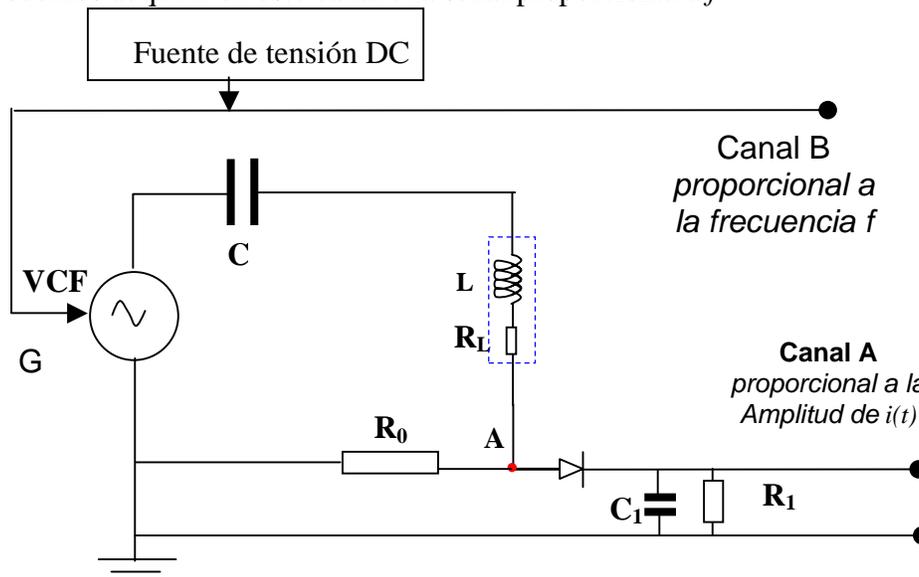
- ✓ Usando una señal de entrada senoidal, de unos pocos khz, compare la forma de la señales de entrada  $v(t)=f(t)$  con la forma de la señal de salida  $i(t)$ . Seguidamente, duplique la amplitud de la señal de entrada, o disminúyala en un factor 2, y determine nuevamente la señal de salida. En todos los casos asegúrese que la tensión de polarización sobre el varicap sea siempre inversa.
- ✓ Verifique si las condición (22) se verifica para sus sistema. Discuta sus conclusiones relativo a la valides de la condición de linealidad (22).
- ✓ Si dispone de un osciloscopio digital o un sistema de adquisición de datos por computadoras suficientemente rápido, adquiera los datos para la entrada y la salida para varios periodos. Usando algún programa apropiado, realice una análisis de Fourier (FFT) de ambas señales y verifique si las mismas contiene o no las mismas frecuencias. Discuta sus resultados
- ✓ Usando una señal de entrada cuadrada, de unos pocos kHz, repita el análisis anterior. Es decir determine experimentalmente la forma de la señales de entrada  $v(t)=f(t)$  y la forma de la señal de salida  $i(t)$ . Seguidamente, duplique la señal de entrada o disminúyala en un factor 2, y determine nuevamente la señal de salida. Verifique si las condición (22) se verifica para sus sistema. Discuta sus conclusiones relativo a la valides de la condición de linealidad (22).

- ✓ Adquiera los datos para la entrada y la salida para varios periodos. Realice un análisis de Fourier (FFT) de ambas señales y verifique si las mismas contiene o no las mismas frecuencias. Si sus sistema es lineal. Discuta sus resultados
- ✓ Analice como varia el diagrama de Bode para este circuito cuando varia la amplitud de tensión aplicada. ¿Qué concluye?

## Proyecto 6- Caracterización de la curva de resonancia usando un sistema de adquisición de datos

**Equipamiento recomendado:** Bobinas (autoinductancias de algunas centenas de mH) dos o más capacitares entre 10 nF y 500 nF y resistencias de 50, 100, 500Ω y de 1 KΩ. Un sistema de adquisición de datos conectado a una computadora. Un generador de funciones con entra VCF para controlar la frecuencia con una señal de DC variable, fuente de tensión CD variable.

Un esquema muy útil en muchos experimentos es poder determinar o caracterizar la curva de resonancia de un determinado circuito, en nuestro caso analizaremos un circuito RLC en serie como el que se presenta en la figura 6. El circuito presentado en la Fig.6 es un RLC serie, la técnica discutida aquí vale para una amplia variedad de circuitos resonantes. La idea es usar la entrada *VCF* del generador de funciones, que permite en general usando una señal DC entre  $-10$  a  $10$  Volt, generar con el GF una señal constante en amplitud, pero con una frecuencia proporcional de la tensión  $V_{in}$  de a través de la entrada *VCF*. En cada caso, es conveniente revisar los manuales de los GF para emplear esta técnica. Por lo tanto monitoreando la tensión en el canal B, podemos adquirir en este canal una señal proporcional a  $f$ .



**Figura 6.** Circuito RLC serie forzado,  $R_L$  representa la resistencia interna de la inductancia. La fuente de tensión variable DC, controla la frecuencia del GF, la medición de DC en el canal B es proporcional a la frecuencia. El circuito rectificador, empleando un diodo, permite convertir en una señal DC medible en el canal A, proporcional a la amplitud de la corriente.

El rectificador, empleando un diodo y una capacitor  $C_1$  y una resistencia  $R_1$ , podemos lograr una señal DC (canal A) proporcional a la amplitud. La constante de tiempo  $\tau_1 = C_1 R_1$ , debe ser mucho mayor que el período ( $1/f$ ) de la señal de entrada, pero menor que el tiempo de barrido o cambio de una frecuencia a otra. De este modo, la señal medida en el canal A es proporcional al máximo de la señal senoidal en el punto A (canal A). Un valor de  $\tau_1 \approx 0.05$  s es en general adecuado si las frecuencias estudiadas son mayores a 300hz (f.  $\tau_1 \gg 1$ ).

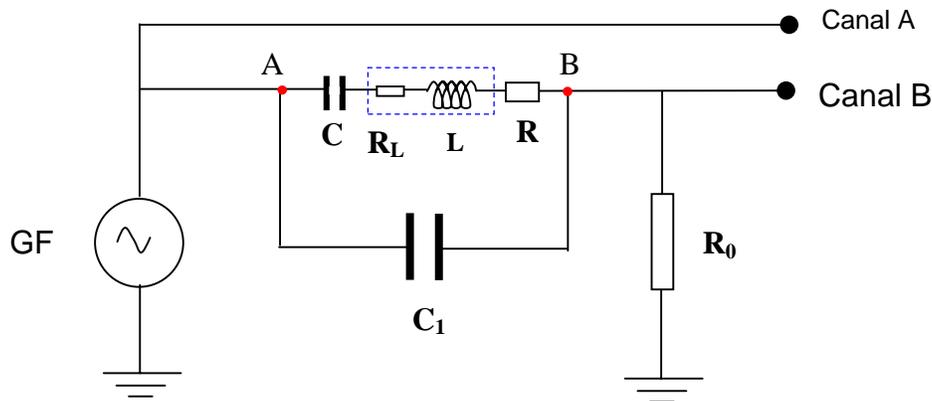
- ✓ Calibración en frecuencia: varíe la frecuencia del GF variando la tensión de DC aplicada a la entrada VCF del GF. Mida simultáneamente el valor de dicha tensión y la correspondiente frecuencia del GF usando su sistema de adquisición. Si la frecuencia es muy alta para su sistema de adquisición, puede emplear un osciloscopio o un frecuencímetro para este fin. Genera un gráfico de la frecuencia en función de la tensión aplicada a la entrada VCF.
- ✓ Usando el esquema presentado en Fig.6, genere un gráfico de amplitud de corriente  $I_0$  en función de la frecuencia  $f$  del GF. Determine la frecuencia  $f_{res}$  para la cual la relación  $I_0(f)/V_0(f)$ , es máxima. Compare el valor obtenido experimentalmente para la frecuencia  $f_{res}$ , con el valor teórico usando la expresión (2).
- ✓ Repita en análisis usando una bobina, de ser posible la misma del estudio anterior, con un núcleo de ferrita. Compare sus resultados con los realizado más arriba, usando la técnica convencional de obtener la curva de resonancia, o sea midiendo la amplitud de la corriente para cada frecuencia.
- ✓ Si dispone de un osciloscopio, compare la curva obtenida usando el sistema de adquisición con el obtenido con el osciloscopio. Discuta las ventajas y desventajas de cada método. ¿Puede presentar otros esquemas que le permitan caracterizar la curva de resonancia usando un sistema de adquisición de datos?

**NOTA:** En la actualidad existen muchos modelos de generadores de funciones que permiten ser programados de modo de obtener un barrido de frecuencias entre dos límites prefijados por el operador en un dado intervalo de tiempo. En este caso, la frecuencia que el GF produce es proporcional al tiempo, de modo que midiendo la amplitud de corriente como se indica en la Fig. 6, es posible determinar la porción de la curva de resonancia comprendida entre los límites de frecuencias prefijados. En este caso no es necesario usar la entrada VCF del GF. Midiendo la señal proporcional a la amplitud (Canal A en la Fig. 6) como función del tiempo, se puede obtener la curva de resonancia.

Finalmente, es importante destacar que si se dispone de un GF conectado a una PC, usando programas como LabView® es posible generar un programa que permita realizar estas mediciones de un modo muy simple y automático.

## Proyecto 7.- Respuesta del circuito RLCC<sub>1</sub> en serie

**Equipamiento recomendado:** Bobinas (autoinductancias de algunas centenas de mH), si se desea lograr una bobina de alto factor de mérito, se puede emplear y una bobina de pocas vueltas con un núcleo de ferrita. Un capacitor entre 10 nF y 500 nF y resistencia  $R_0$  de 1 a 10KΩ. Un generador de funciones. Un osciloscopio de dos canales de 20 MHz o más rápido.



**Figura 7.** Circuito LC paralelo,  $R_L$  representa la resistencia interna de la inductancia y  $R_0$  es una resistencia auxiliar que nos permite medir la corriente midiendo la tensión en el canal B.

- ✓ Usando la técnica de reactancias complejas, estudie teóricamente las características física del circuito de la Figura 7. Demuestre que la impedancia efectiva de la parte del circuito comprendido entre los puntos A y B es:

$$Z^{-1}(\omega) = \frac{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} + j\omega C_1, \quad (34)$$

con  $R=R_1+R_2$ . De (22) puede obtenerse tanto el módulo de la impedancia y la diferencia de fase entre la tensión aplicada (canal A) y la corriente (proporcional a la tensión en el canal B) en función de  $f$ . Demuestre asimismo que:

$$|Z(\omega)|^2 = \frac{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{C_1^2 \omega^2 R^2 + \left(1 - \omega C_1 \cdot \left[L\omega - \frac{1}{C\omega}\right]\right)^2} \quad (35)$$

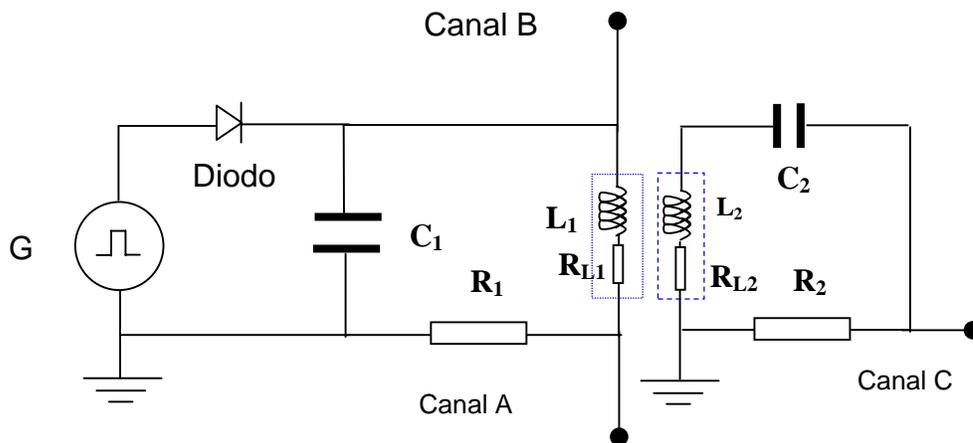
- ✓ Usando en el generador de funciones una señal senoidal, si denotamos con  $I_o(f)$  y  $V_o(f)$  los valores máximos de la corriente y la tensión aplicada y si  $\phi(f)$  denota la diferencia de fases entre la tensión aplicada y la corriente, cuando excitamos en circuito con una dada frecuencia  $f$ . Determine la frecuencia  $f_{res}$  para la cual la relación  $I_o(f)/V_o(f)$  es máxima. Para esta frecuencia determine la diferencia de fases  $\phi(f_{res})$ . Compare el valor obtenido experimentalmente para la frecuencia  $f_{res}$ , con el valor teórico.
- ✓ Varíe la frecuencia alrededor de  $f_{res}$  y obtenga un gráfico experimental de  $I_o(f)/V_o(f)$  y  $\phi(f)$  en función de  $f$ . En el mismo gráfico dibuje la expectativa teórica que se obtiene a partir de los valores medidos de  $R_0$ ,  $R_L$ ,  $L$  y  $C$  y las expresiones (34) y (35). ¿Qué puede concluir de esta comparación?
- ✓ A partir de su gráfico experimental, obtenga el factor de mérito del circuito usando y compare con el valor teórico.

## Proyecto 8- Circuitos RLC acoplados - Resonancia e interferencia

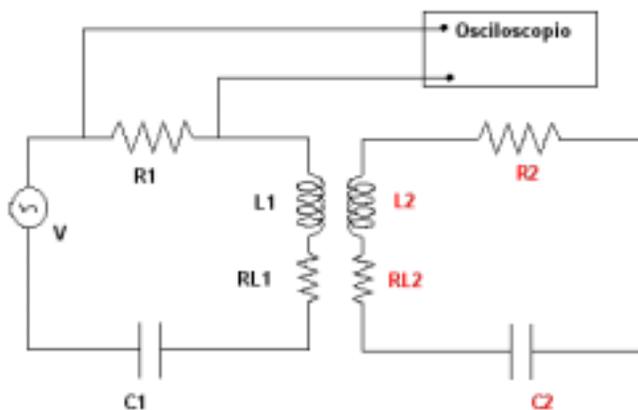
**Equipamiento recomendado:** Bobinas (autoinductancias de algunas centenas de mH) dos o más capacitores entre 10 nF y 500 nF y resistencias de 50, 100, 500Ω y de 1 KΩ. Un sistema de adquisición de datos conectado a una computadora. Un generador de funciones. Es conveniente que la velocidad de adquisición sea de al menos unas 10 veces mayor que las frecuencias características a medir. En este caso es tal vez más conveniente usar un osciloscopio de dos canales de 20 MHz o más rápido.

En este proyecto, se propone estudiar la respuesta, de dos o más sistemas oscilantes acoplados. Un ejemplo de este tipo de sistemas podría ser el sistema mostrado en la figura 6, que consiste en dos circuitos RLC, próximos. Acoplados a través de la inductancia mutua  $M(x)$  que depende de la separación  $x$  entre los centros de sus autoinductancias. Suponemos que a separación de la inductancia se hace preservando sus orientaciones relativas.

- ✓ **Caracterización de la inductancia mutua:** conecte GF directamente a una de las bobinas (primario), con una resistencia limitadora de corriente, esta resistencia  $R_1$  sirve asimismo para determinar la corriente en el primario  $i_1(t)$ . Mida la tensión inducida en la segunda (secundario)  $\varepsilon_2$ . Determine la inductancia mutua  $M(x)$  ( $= -\varepsilon_2/d i_1(t)/dt$ ) de las inductancias a usar como función de la separación entre ellas  $x$ . Un modo de mantener la orientación entre ellas fijas, mientras se varía su distancia, consiste en usar dos bobinas montadas sobre un eje común con una escala adosada para medir la separación entre ellas. Construya un gráfico de  $M(x)$  como función de  $x$ . Elabore un modelo teórico simple, que le permita explicar sus resultados. Un modelo posible consistiría calcular el campo magnético de una de la bobinas en el centro de la otra y suponer que el mismo es representativo de el campo en todo su interior.
- ✓ Usando el método que le resulte más accesible, mida los valores de L, R y C para los dos circuitos a usar.
- ✓ Usando el método experimental propuesto en la Figura 8, determine las frecuencias de oscilación libre de cada uno de los circuitos como función de la separación  $x$  entre los mismos.
- ✓ Grafique las frecuencias naturales de oscilación de ambos circuitos como función de la separación  $x$  de los mismos.
- ✓ Elabore un modelo<sup>[1,5,6]</sup> que le permita entender teóricamente sus resultados experimentales, Ver apéndice A.
- ✓ Construya un gráfico experimental de la variación de las frecuencias de resonancia de ambos circuitos como función de  $x$  y compare sus resultados con las expectativas teóricas.
- ✓ Usando el método experimental propuesto en la Figura 9, determine las curvas de resonancias de los dos circuito. En particular estudie como se modifican estas frecuencias de resonancias con las distintas separaciones  $x$  entre ambos circuito.
- ✓ Grafique las frecuencias de resonancias de ambos circuitos como función de la separación  $x$  de los mismos.
- ✓ Elabore un modelo<sup>[1,5,6]</sup> que le permita entender teóricamente sus resultados experimentales.
- ✓ Construya un gráfico experimental de la variación de las frecuencias de resonancia de ambos circuitos como función de  $x$  y compare sus resultados con las expectativas teóricas.



**Figura 8.** Circuitos RLC serie acoplados, el acople se produce a través de la inductancia mutua  $M(x)$  entre las dos bobinas, cuyos centros suponemos separados por una distancia  $x$ . Este esquema permite determinar las respuesta libre de ambos, midiendo la variación en el tiempo de las señales de los canales A y C.



**Figura 9.** Circuitos RLC serie acoplados, el acople se produce a través de la inductancia mutua  $M(x)$  entre las dos bobinas, cuyos centros se suponen separados por una distancia  $x$ . Este esquema permite determinar la respuesta forzada de ambos circuitos, midiendo las frecuencias de resonancias en cada circuito monitoreando las tensiones en las resistencias respectivas.

## Bibliografía

1. E. M. Purcell, *Berkeley physics course, volumen 2, Electricidad y Magnetismo* (Reverté, Barcelona, 1969).
2. *The Feynmann Lecture on Physics – Vol.1 Chap. 49* – R. P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sand Addison-Wesley, Reading Ma 1970.

3. M. Alonso y E. J. Finn, *Física, vol.II, Campos y Ondas* (Fondo Educativo Interamericano, Mexico, 1970); ed. inglesa de Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967).
4. N.I. Koshkin y M.G. Shirkevich, *Manual de Física* (MIR, Moscú, 1975).
5. *Laboratory Exercises in Classical Electromagnetic Field Theory* – H.A. Attawer – Am. J. Phys. **36**,672 (1968).
6. *Classical Analogy to Quantum mechanical level repulsion*- W. Frank and P. Von Brentano- Am. J. Phys. 62 706 (1994).
7. *Física re-Creativa – Experimentos de Física usando nuevas tecnología* - S. Gil y E. Rodríguez - Prentice Hall- Buenos Aires - Marzo de 2001. ISBN 987-9460-18-9
8. P.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures, Quantum Mechanics*, Addison-Wesley , Reading, MA 10970 Vol.3 Chap.9-11.
9. P. Horowitz y W. Hill, *The art of electronics*, 2<sup>nd</sup> ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
10. D. E. Gray, *American Institute of Physics Handbook*, 2<sup>nd</sup>. Ed. McGraw Hill NY 1957
11. F. C. Moon -Chaotic Vibrations – An Introduction for Applied Scientists and Engineers – John Wiley & Sons – NY 1987.
12. P.A. Linsay- Phys. Rev. Lett. **47** (19) 1347-1352 (1981)
13. AR.W. Rollins and E.R. Hunt- Phys. Rev. Lett. **49** (18) 1295-1298 (1982)
14. J.Testa, J. Perez and C. Jeffries- Phys. Rev. Lett. **48** 714 (1982)

## Apéndice

### Circuitos LC acoplados

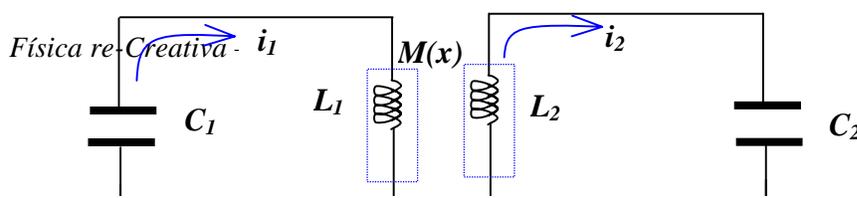
Los sistemas oscilantes acoplados son de gran interés en la física, ya que muchas propiedades interesantes de los mismos son aplicables a una gran variedad de fenómenos y existen analogías entre ellos que se extienden desde la física clásica a la cuántica. Por lo tanto, podemos decir que los sistemas de osciladores acoplados constituyen un interesante e instructivo paradigma de la física. En esta sección analizáramos la respuesta libre (no forzada) de dos circuitos LC acoplados a través de su inductancia mutua,  $M$ , que suponemos dependerá de la separación  $x$  entre los mismos, por lo tanto supondremos que  $M(x)$ .

Las ecuaciones de Kirchhoff para este circuito son:

$$\frac{q_1}{C_1} + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} \pm M \cdot \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (\text{a-1})$$

y

$$\frac{q_2}{C_2} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \pm M \cdot \frac{di_1}{dt} = 0. \quad (\text{a-2})$$



**Figura A1.** Circuitos LC acoplados, el acople se produce a través de la inductancia mutua  $M(x)$  entre las dos bobinas, cuyos centros suponemos separados por una distancia  $x$ .

En estas ecuaciones  $q_k(t)$  e  $i_k(t)=dq_k(t)/dt$  se refieren al las cargas y las corrientes el los circuitos  $k=1$  y  $2$ . Estas son un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas a través de  $M$ . El signo en  $M$  refleja las dos posibles orientaciones relativas de las autoinductancias  $L_1$  y  $L_2$ . Además tenemos la condición  $M^2 \leq L_1 \cdot L_2$ . Si realizamos la suposición que:

$$q_k(t) = A_k \cdot \text{Exp}(j\omega \cdot t). \quad (\text{a-3})$$

reemplazando en (a-1) y (a2) tenemos:

$$\frac{A_1}{C_1} - L_1 \cdot A_1 \cdot \omega^2 \mp M \cdot A_2 \cdot \omega^2 = 0 \quad (\text{a-4})$$

y

$$\frac{A_2}{C_2} - L_2 \cdot A_2 \cdot \omega^2 \mp M \cdot A_1 \cdot \omega^2 = 0 \quad (\text{a-5})$$

Definiendo:

$$\omega_{10}^2 = \frac{1}{L_1 \cdot C_1} \quad \text{y} \quad \omega_{20}^2 = \frac{1}{L_2 \cdot C_2} \quad (\text{a-6})$$

El sistema de ecuaciones algebraicas (a-4) y (a-5) se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} (\omega_{10}^2 - \omega^2) & \mp \frac{M}{L_1} \cdot \omega^2 \\ \mp \frac{M}{L_2} \cdot \omega^2 & (\omega_{20}^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{a.6})$$

Este sistema de ecuaciones tendrá una solución distinta de la trivial ( $A_1=A_2=0$ ) solo si el determinante de la matriz es igual a cero, o sea:

$$\begin{vmatrix} (\omega_{10}^2 - \omega^2) & \mp \frac{M}{L_1} \cdot \omega^2 \\ \mp \frac{M}{L_2} \cdot \omega^2 & (\omega_{20}^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = (\omega_{10}^2 - \omega^2) \cdot (\omega_{20}^2 - \omega^2) - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} \cdot \omega^4 = 0 \quad (\text{a.7})$$

Definiendo:

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2}} \geq 1 \quad (\text{a.8})$$

la solución de la ecuación (a.7) se puede escribir como:

$$\omega^2 = \frac{\mu}{2} (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2) \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} \cdot (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)^2 - \mu \cdot (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)}. \quad (\text{a.9})$$

Esta ecuación permite calcular las nuevas frecuencias naturales en presencia de acoplamiento ( $\mu > 1$ ) como función de las frecuencias naturales no perturbadas ( $\omega_{10}$  y  $\omega_{20}$ ) el acoplamiento  $\mu$ . De (a.9) es fácil demostrar que:

$$|\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2| \geq |\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2| \quad (\text{a.10})$$

Que indica que al incrementares el acoplamiento ( $M(x) > 0$ ), la distancia o diferencia entre las frecuencias de los dos circuitos se incrementa. Este efecto también se observa en sistemas cuánticos, cuando se produce un acoplamiento entre dos niveles de energía, el acoplamiento siempre genera una separación o rechazo entre los niveles de energía.<sup>[6,8]</sup>

Para estudiar la aplicación de (a.9) al caso de circuitos LC acoplados, es conveniente estudiar experimentalmente la variación de  $M$  como función de  $x$ . Para ello, si se dispone de dos bobinas cilíndricas, puede ser útil colocarlas sobre un eje común que le permita variar su distancia sin cambiar sus orientaciones y simultáneamente medir la distancia entre ellas.

## Apéndice B

### Estimación del valor de la autoinductancia de una bobina

En muchas situaciones prácticas es útil disponer de expresiones aproximadas para estimar el valor de la autoinductancia de una bobina. La autoinducción  $L$  de un solenoide lineal de longitud  $h$ , sección transversal  $S$  y diámetro  $d$ , que tiene  $N$  vueltas se puede calcular como<sup>[41]</sup>:

$$L = k \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot S \cdot N^2}{h} \quad (\text{N-1})$$

donde  $k$  es una constante que depende de la relación  $h/d$  del particular solenoide según la Tabla N-1.  $\mu$  es la permitividad relativa del núcleo de la bobina y  $\mu_0$  es la permitividad del vacío. En unidades usuales la Ec. (N-1) se puede escribir como:

$$L[\mu H] = 1.257 \cdot k \cdot \frac{\mu \cdot N^2}{h[cm]} \cdot S[cm^2] \quad (\text{N-2})$$

**Tabla N-1**

Relación $h/d$	0.1	0.5	1	5	10
$k$	0.2	0.5	0.6	0.9	1.0

Autoinductancia de una bobina cilíndrica, con núcleo de aire también se puede estimar usando la expresión semiempírica

$$L(mH) = \frac{N^2 \cdot d^2}{18d^2 + 40\ell} \quad (\text{N-3})$$

$d = 2R$  = diámetro del bobinado,  $\ell$  longitud total de la bobina, ambas en pulgadas,  $N$  es el número de vueltas totales de la misma.

**Estimación del valor de la autoinductancia de una espira circular**

Es útil disponer de una expresión para calcular la autoinductancia  $L$  de una espira de radio  $a$ , de  $N$  vueltas de un alambre de radio  $r$  cuya permitividad relativa es  $K_m$ . Según Gray<sup>10</sup>, tenemos:

$$L(H) \approx \mu_0 \cdot N^2 \cdot a \cdot \left[ \left( 1 + \frac{r^2}{8a^2} \right) \cdot \ln \frac{8a}{r} + \frac{r^2}{24a^2} - 1.75 \right] + O((r/a)^4), \quad (\text{N-4})$$

si  $a \gg r$ , tenemos:

$$L(H) \approx \mu_0 \cdot N^2 \cdot a \cdot \left[ \ln \left( \frac{8a}{r} \right) - 1.75 \right]. \quad (\text{N-5})$$