

# Estudio y aplicación de medios granulares - Oscilador de Masa Variable

L. Ferreyra ([basilisco@hotmail.com](mailto:basilisco@hotmail.com)) - J. Flores ([jose\\_uba@yahoo.com](mailto:jose_uba@yahoo.com)) y  
G. Solovey ([gsolovey@arnet.com.ar](mailto:gsolovey@arnet.com.ar))

Laboratorio 5, Departamento de Física - FCEyN, UBA - Diciembre 2000

Los materiales granulares como la arena presentan comportamiento que los diferencian de los fluidos y los sólidos. En esta práctica se estudiaron algunas propiedades de estos materiales, como ángulo máximo y de reposo, presión en la base de una columna de material granular y flujo de arena a través de un orificio; se comprobó que este flujo es constante con el tiempo. Se diseñaron dos experimentos de aplicación de estas propiedades, un oscilador armónico de masa variable y un péndulo físico de masa variable. Para el oscilador armónico se observaron comportamientos marcadamente distintos para una variación lenta y una variación rápida de la masa. Para el caso del péndulo se observó que el período de oscilación aumentaba mientras se vaciaba durante un tiempo para luego regresar al período original cuando quedaba vacío.

Los médanos junto al mar, el azúcar en un tazón o el aserrín en una carpintería son todos ejemplos de materiales granulares con los cum.ar" gsolovey@arnet.com.ar )  
Laboratorio 5, FCEyN, UBA

Los materiales granulares como la arena presentan comportamiento que los diferencian de los fluidos y los sólidos. En esta práctica se estudiaron algunas propiedades de estos materiales, como ángulo máximo y de reposo, presión en la base de una columna de material granular y flujo de arena a través de un orificio; se comprobó que este flujo es constante con el tiempo. Se diseñaron dos experimentos de aplicación de estas propiedades, un oscilador armónico de masa variable y un péndulo físico de masa variable. Para el oscilador armónico se observaron comportamientos marcadamente distintos para una variación lenta y una variación rápida de la masa. Para el caso del péndulo se observó que el período de o el caso de un material granular la presión en la parte inferior es independiente de la altura de una columna lo suficientemente alta. Esto se debe a que la fricción de las partículas con las paredes es suficiente para soportar el peso de la masa que se le carga encima<sup>[1][3]</sup> (figura 1).

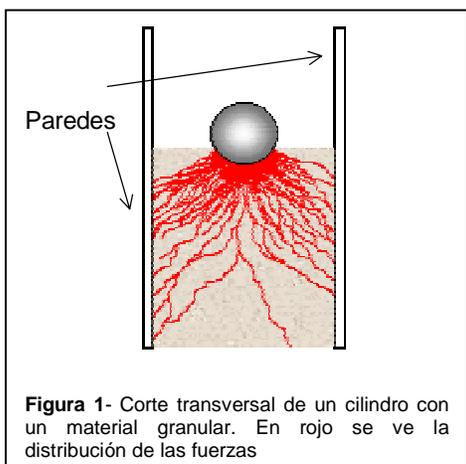


Figura 1- Corte transversal de un cilindro con un material granular. En rojo se ve la distribución de las fuerzas

En esta práctica se desarrollaron dos puntos principales: *i*) Dos experiencias que reflejan el comportamiento peculiar de estos materiales (ángulo de reposo y presión en la base de la columna) y *ii*) el estudio de la linealidad del flujo de una columna de material granular y aplicaciones.

**Ángulo de Reposo y Máximo.** Para la medición del ángulo de reposo y el ángulo máximo se diseñó y utilizó un dispositivo como el ilustrado en la figura 2. Consiste de un cilindro hueco lleno hasta la mitad con arena. En uno de los extremos del cilindro se montó un transportador giratorio para determinar los dos ángulos del movimiento.

Estos dos ángulos encierran el movimiento de la arena a medida que se aumenta la pendiente. Una vez alcanzado el ángulo máximo,  $\theta_{max}$ , se produce una avalancha que se detiene cuando la pendiente

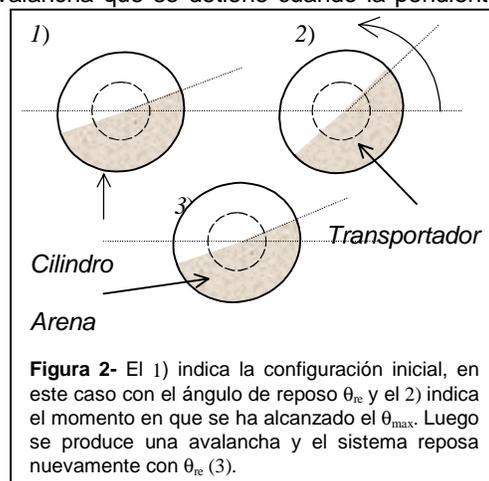


Figura 2- El 1) indica la configuración inicial, en este caso con el ángulo de reposo  $\theta_{re}$  y el 2) indica el momento en que se ha alcanzado el  $\theta_{max}$ . Luego se produce una avalancha y el sistema reposa nuevamente con  $\theta_{re}$  (3).

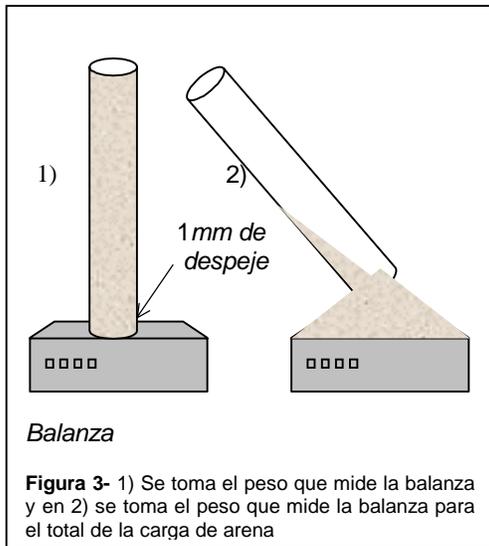
subtiende un ángulo con la horizontal llamado ángulo de reposo  $\theta_{re}$ .

	$\theta_{max}$	$\theta_{re}$
Medias	$34 \pm 1$	$30.6 \pm 0.9$

Tabla 1: Resultados para los ángulos máximo y de reposo para la arena

**Presión.** Para esta medición se montó un doble pie rígido como el de la figura 3. Debajo de la columna se colocó una balanza distanciada a un milímetro del borde inferior del cilindro. A medida que se carga arena en el cilindro hueco, esta tapa la salida permitiendo que se acumule arena dentro del recipiente. Una vez lleno el cilindro, se tomó nota del valor que medía la balanza en ese instante. Luego se levantó el cilindro dejando descargar la totalidad de la arena en la balanza. El peso medido para la columna era de 2 a 10 veces menor que la carga total (ver Tabla 2).

Se hicieron varias mediciones de esta manera, y luego se hicieron algunas series de mediciones cargando al cilindro con cantidades predeterminadas de arena y viendo cómo variaba la carga que medía la balanza a medida que se iba aumentando la altura (Apéndice). Cabe aclarar que, debido a los acomodamientos que sufre el material granular, los datos no tienen más que carácter cualitativo.



Peso Columna	Peso Arena s/ recipiente
85 g	405 g
400 g	3850 g

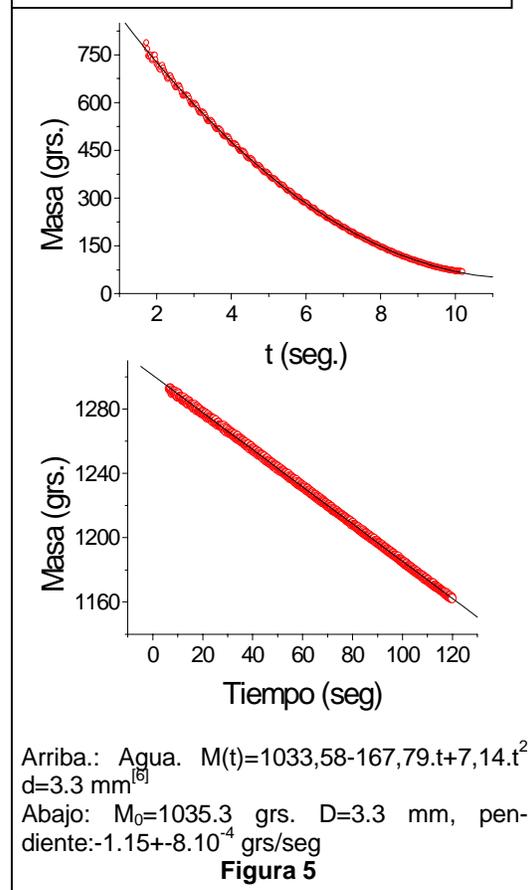
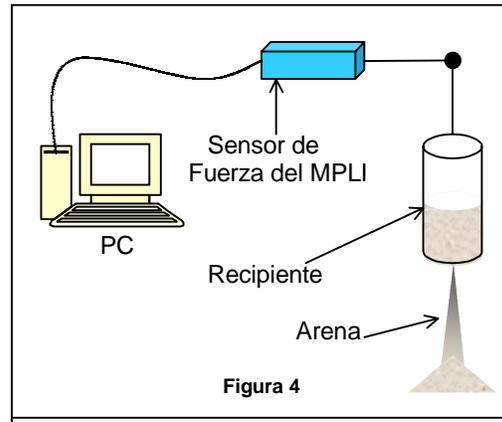
Tabla 2-Peso de la columna vs. carga total

### Parte ii): Estudio del flujo de arena y aplicaciones.

Esta fue la parte principal de la experiencia. Se comenzó midiendo el flujo en función del tiempo; para esto se utilizaron recipientes cilíndricos de igual sección y se varió el diámetro de la abertura en la base de

los mismos, así como también la altura de la columna del material granular.

Para determinar el flujo se colgó el recipiente de un sensor de fuerza (figura 4) que recolectaba los datos en función del tiempo en la computadora. A medida que transcurría el tiempo el recipiente se vaciaba y el peso que medía el sensor iba disminuyendo. La pendiente de ese gráfico indica el flujo (figura 5).

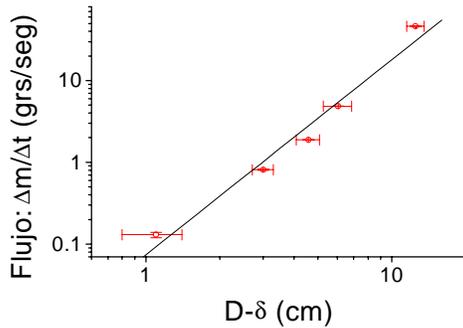


Mediante un análisis dimensional<sup>[2]</sup> se puede llegar a una expresión para la dependencia del flujo en función del diámetro

del orificio  $D$ , de la densidad de la arena  $\rho$  y la gravedad  $g$ , de la forma:

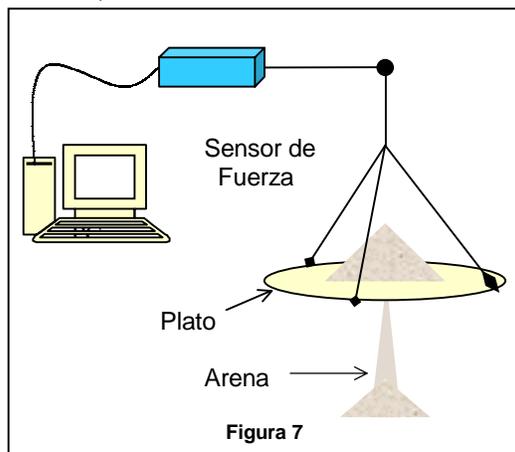
$$\Delta m / \Delta t = C \cdot \rho \cdot g^{1/2} \cdot (D - \delta)^{5/2} \quad (\text{ec. 1})$$

donde  $C$  es una constante a determinar y  $\delta$  es una corrección al diámetro por el tamaño de los granos de arena en el borde ( $\delta = 0.36 \pm 0.04 \text{ mm}$ ).



**Figura 6:** Flujo de Arena en función del diámetro del orificio.

Antes de concluir con esta parte del experimento se estudió si el comportamiento del material es distinto cuando no hay un efecto de borde debido al recipiente cilíndrico. Para esto se colgó del sensor de fuerza un plato con un agujero central de diámetro similar al del recipiente cilíndrico. Sobre el plato se hizo una pila de arena y una vez destapado el agujero se midió el flujo. Nuevamente, dio lineal, y de pendiente casi idéntica a la del recipiente cilíndrico para una abertura del mismo diámetro ( $5 \pm 0.2 \text{ mm}$ ) (la diferencia entre las pendientes estaba dentro del error en la determinación del diámetro de la abertura).



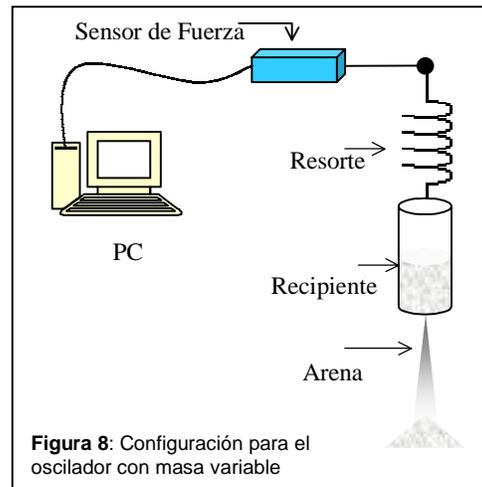
**Figura 7**

Una vez determinado el flujo en función del diámetro se pensó en posibles aplicaciones ya que se podía variar la masa de manera controlada. Dos ideas simples

surgieron entonces: a) Un oscilador armónico de masa variable y b) un péndulo físico de masa variable.

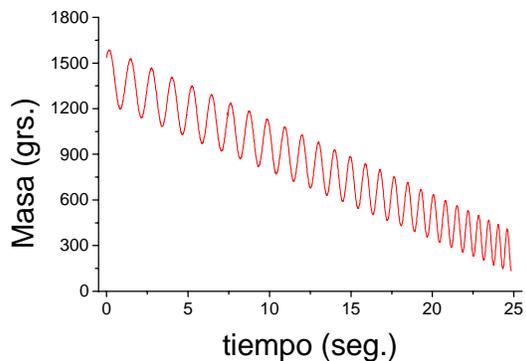
### Oscilador armónico de masa variable.

El trabajo consistió en estudiar el comportamiento de un oscilador armónico de masa variable en comparación con uno de masa fija. Se colocó un resorte (de constante  $k=28.13 \text{ N/m}$ ) entre el sensor de fuerza y el recipiente cilíndrico lleno con arena (ver fig. 8).

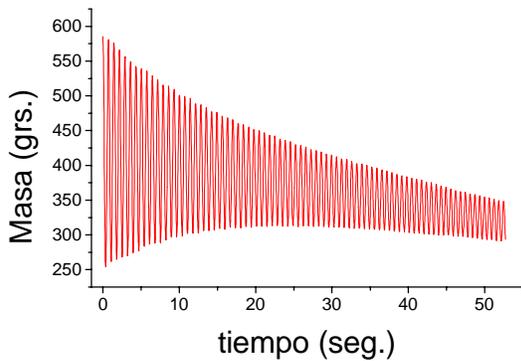


**Figura 8:** Configuración para el oscilador con masa variable

Se utilizaron recipientes con diferentes diámetros de orificio de salida ( $d_1=12,8 \text{ mm}$  y  $d_2=6,35 \text{ mm}$ ). En cada caso, se los llenó de arena, y se los estiró entre 5 y 10 cm hacia abajo. Al soltarlos, el recipiente en cuestión oscilaba mientras perdía masa. Dos resultados significativos se muestran en la figura 9.

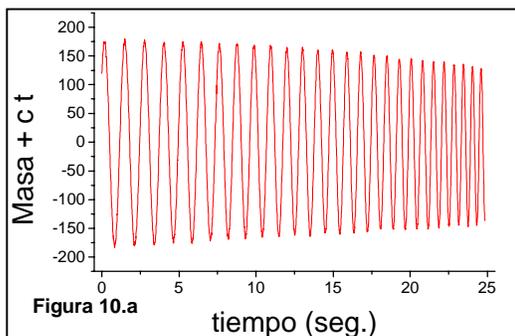


**Figura 9.a-** masa inicial:  $m_0=1.388 \text{ Kg}$ ; flujo:  $c=46 \text{ gr/seg}$ ; diámetro:  $d_1=12,8 \text{ mm}$

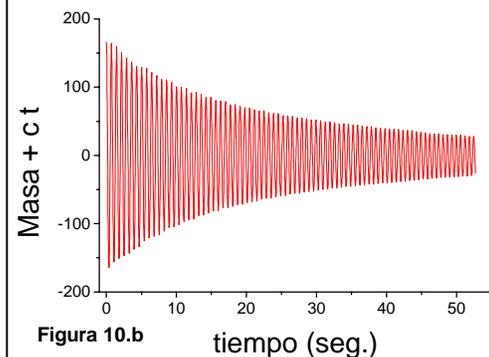


**Figura 9.b-**  $m_0=0.35$  Kg; flujo:  $c=1.89$  gr/seg; diámetro:  $d_2=6,35$  mm

Se observa en la figura 9 que la posición de equilibrio disminuye con el tiempo. Esto se debe a la pérdida de masa del oscilador. Para contrarrestar este efecto, se midió el flujo de arena para los dos recipientes (figura 4). A continuación se le sumó a los datos de la figura 9 la función  $c.t$  (donde  $c$  es la constante de flujo) (figura 10).



**Figura 10.a**



**Figura 10.b**

A las mediciones originales se les sumó  $c.t$ . Es decir, se mide las oscilaciones desde un origen que se mueve linealmente respondiendo a la pérdida de masa del recipiente. A pesar de que el recipiente oscila, el flujo de arena es constante. En la fig. 10.a se ve un significativo cambio en el periodo con el tiempo

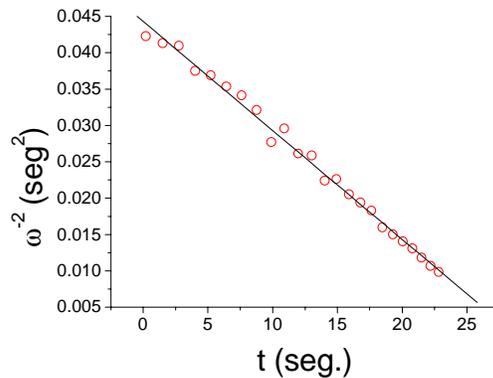
Se observó que si la pérdida de masa es pequeña (fig. 10.b), entonces el movimiento resulta cualitativamente similar al de un oscilador amortiguado. En cambio, si la pérdida es grande (fig 10.a), el comportamiento es cualitativamente diferente (se observa en la forma de la envolvente).

En los dos casos, debido a la pérdida de masa, se observa un cambio en el período de la oscilación: disminuye con el tiempo y, a mayor flujo, mayor es la tasa de cambio. Un primer intento para entender esto es pensar que para un oscilador con masa constante:

$$\omega = (k/m)^{1/2}$$

En este caso, como  $m=m_0-c.t$ , resulta:

$$\omega^{-2} = \frac{m_0}{k} - \frac{c}{k}t \quad (2)$$

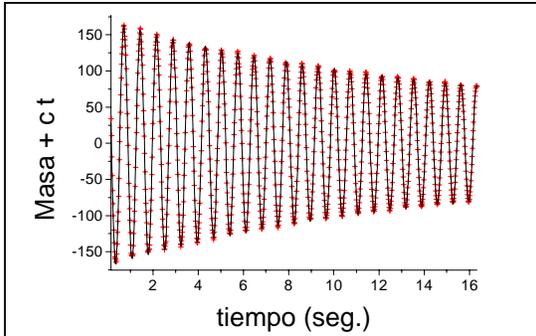


**Figura 11-**  $\omega^{-2}$  en función del tiempo para el caso de la fig. 10.a. Considerando fricción, la expresión para  $\omega^{-2}$  cambia. Sin embargo, el ajuste de los datos se logró sin tener en cuenta esa corrección. La fricción no juega un papel importante en el cambio del periodo de este oscilador

Es interesante notar que de las mediciones del flujo ( $c$ ) (para el caso de la figura 10.a) y la constante del resorte ( $k$ ), resulta que  $c/k=1,6 \cdot 10^{-3}$  seg., que es justamente la pendiente que debería tener el gráfico de la figura 11 según la ecuación 2. Esto muestra un acuerdo entre mediciones hechas de forma independiente.

Por otro lado, como la medición mostrada en la figura 10.b tiene la forma de una oscilación amortiguada con una pequeña variación en la frecuencia, se buscó una función que ajuste esos datos (fig. 12). El mejor ajuste se logró con una función de la forma:

$$\exp(a+b.t+c.t^2+d.t^3) \cdot \sin((\omega_0+\alpha.t).t+\beta)$$

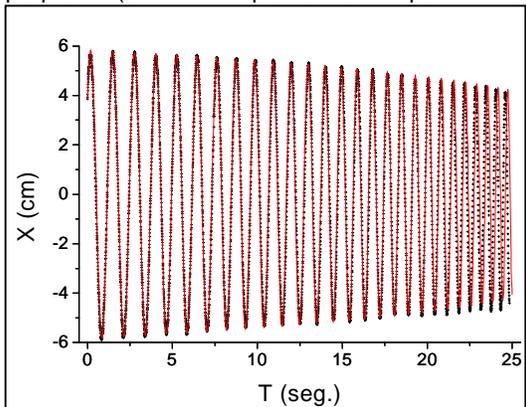


**Figura 12:** Fragmento de los datos de la fig. 10.b (rojo) y el ajuste (negro). Los parámetros del ajuste son:  $a=5,135$ ;  $b=-0,0582$ ;  $c=0,00085$ ;  $d=7,6 \cdot 10^{-6}$ ;  $\alpha=0,0134$ ;  $\omega_0=8,62355$ ;  $\beta=1,75$ . Como la variación de la masa es pequeña, se pudo ajustar la frecuencia angular por una función lineal.

Por último: ¿Cómo se podría modelar este oscilador de masa variable? Se presentaron dos casos límite, con variación de masa significativamente diferente. Como se dijo, si la variación es pequeña, se observa un cambio ligero del período con el tiempo, pero en líneas generales, el comportamiento del sistema es semejante al de un oscilador amortiguado. En cambio, si la variación de masa es mucho mayor, el comportamiento del sistema es diferente, evidenciado por la forma de la envolvente. Se plantea, entonces, la ley de Newton para el problema (suponiendo la fricción proporcional a la velocidad):

$$(m_0 - ct)x'' = -kx - (\gamma - c)x' \quad (3)$$

, donde  $k$  es la constante del resorte,  $\gamma$  un coeficiente de fricción,  $c$  el flujo constante,  $x'$  la velocidad y  $x''$  la aceleración. Si  $c$  es pequeño (de modo que en cada periodo la

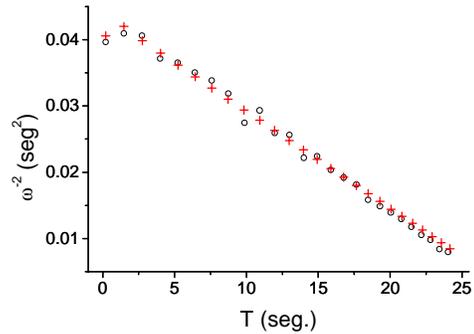


**Figura 13:** Resolución numérica de la ecuación (rojo) y datos experimentales (negro) para los siguientes parámetros:  $k=31$  N/cm;  $m_0=1388.2$  grs;  $\gamma=0.04$  Kg/seg;  $c=0.046$  Kg/seg

masa se puede considerar constante), se puede considerar a la variación de masa como una pequeña perturbación y resolver la ecuación de Newton para  $c=0$  (masa constante) y, en la solución, colocar la dependencia de la masa con el tiempo. Esto daría soluciones del tipo de las observadas en la figura 10.b. En cambio, si el flujo de arena es mayor, debe tenerse en cuenta la variación de masa en la resolución de la ecuación.

No se hallaron soluciones analíticas para la ecuación 3, pero se la ha resuelto numéricamente. Los resultados (fig. 13) muestran una coincidencia entre el modelo y las mediciones (figura 10.b).

La variación de la frecuencia en función del tiempo se refleja en la figura 14. Se observa un acuerdo entre el modelo y el experimento aunque en los últimos 5 seg. aparece una ligera diferencia.



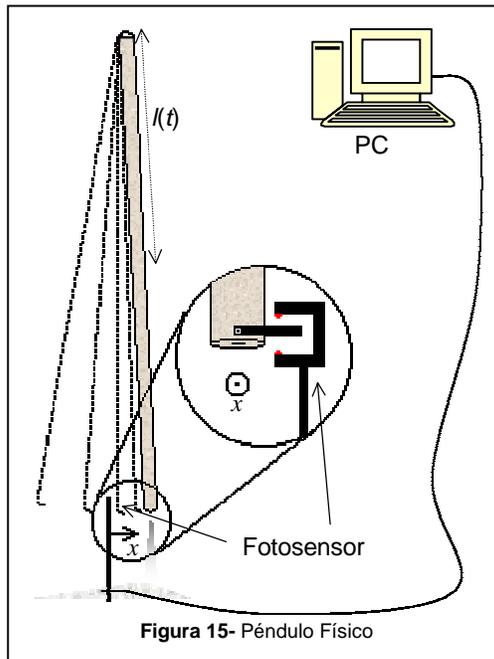
**Figura 14:** Comparación de la variación de la frecuencia en función del tiempo, para la simulación (rojo) y las mediciones (negro) para el caso de mayor flujo.

### Péndulo de masa variable.

En esta sección del trabajo se utiliza una de las características de los medios granulares: la linealidad del flujo a través de un orificio, para el estudio de la dependencia temporal del período de un péndulo físico de masa variable.

A tal fin se montó el dispositivo que se muestra en la figura 15, que consta de un tubo de acrílico de 1,4 m de largo y 2 mm de diámetro montado sobre un soporte que puede girar libremente por medio de un rulemán. El período del péndulo se midió con un fotosensor, por lo que se colocó en la parte inferior del tubo un elemento que bloquease la puerta del sensor cada vez que el péndulo pasara por la posición de equilibrio.

El péndulo se llenó con una masa inicial de arena de 700 gramos, que fluía a través de un orificio de 5,6 mm en la base del péndulo; la altura de la columna de arena correspondiente a esta masa es 1,4 metros. En la figura 16 se grafican los datos de la medición, mientras que en la figura 17 se muestra una curva calculada teóricamente para los valores de los



parámetros utilizados en la experiencia. La expresión utilizada para levantar este perfil teórico es la que se menciona en [7], con la diferencia de que en nuestro caso la variable independiente es el tiempo y no la altura de la columna de arena. Aquí es donde se utiliza la propiedad de linealidad de flujo del medio granular: se realiza una medición de este flujo con la cual se puede trazar la relación lineal

entre la altura de la columna de arena y el tiempo; con esto se obtiene entonces la expresión del período en función del tiempo.

Para este cálculo teórico utilizamos los siguientes parámetros:

$I_0 \equiv$  momento de inercia del péndulo vacío  $\equiv 0,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

$M_A \equiv$  masa de arena cuando el péndulo está lleno  $= 0,7 \text{ kg}$ .

$M_V \equiv$  masa del péndulo vacío  $\equiv 0,35 \text{ kg}$ .

$L \equiv$  longitud del péndulo  $= 1,4 \text{ m}$ .

$m \equiv$  pendiente de la variación de masa en función del tiempo (resultado de la segunda medición mencionada en los párrafos anteriores)  $= -0,0093 \text{ m/seg}$ .

$g \equiv$  aceleración de la gravedad  $= 9,793 \text{ m/seg}^2$ .

$L_{CM} \equiv$  posición del centro de masa del péndulo vacío  $\equiv 0,6 \text{ m}$ .

Aquellos parámetros que no poseen una igualdad con su valor numérico han sido medidos con una precisión lo suficientemente baja como para que puedan ser señalados como las fuentes de error o diferencia entre la curva teórica y la experimental; estas ideas se discuten con mayor detalle en el párrafo final de este apartado.

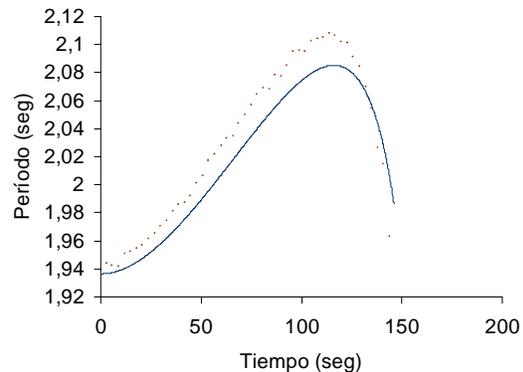


Figura 16- Comparación entre valores del período experimentales (puntos) y teóricos (línea llena).

Se puede apreciar que los resultados experimentales presentan una similitud cualitativa con los que fueron calculados teóricamente; asumimos que esta similitud implica que la hipótesis relativa a la linealidad del flujo del medio granular para el estudio de este problema mecánico es adecuada, en tanto que ciertas otras propiedades de los medios granulares asociadas a su comportamiento no lineal (formación de arcos, ángulo límite, etc) no tienen incidencia en los resultados de la experiencia -es lógico suponer que si la hubiesen tenido, los perfiles teóricos y experimentales habrían sido diferentes entre sí. Las diferencias

cuantitativas (posición y valor de los máximos de período) podrían ser resueltas considerando que esta experiencia fue planificada como una aplicación de la propiedad mencionada de un medio granular; por lo tanto, y como se menciona en párrafos anteriores, algunos de los parámetros utilizados en el cálculo de las curvas teóricas no fueron medidos con la precisión adecuada para un estudio cuantitativo; asimismo, el diseño del dispositivo tampoco reunía las características necesarias para un trabajo de precisión.

### Referencias y Bibliografía:

- [1] *The physics of granular materials*, Jaeger, Nagel, Behringer, Physics Today (Abril 1996)
- [2] *The flow of sand*, Martin Yersel, The Physics Teacher, **28** (Mayo 2000)
- [3] *Force distribution in a Granular Medium*, Mueht, Jaeger, Nagel, arXiv:cond-mat/9902282 22 Feb 1999
- [5] *Physics of granular state*, Jaeger, Nagel, Science, **255**, 1523 (20 de Marzo 1992)
- [6] El ajuste de los datos para el flujo de agua se logró con una función cuadrática. Se puede ver que esto es lo esperado si se considera que el caudal es proporcional a  $\sqrt{\Delta P}$  (régimen turbulento).
- [7] *Motion of a leaky pendulum*, Am. J. Phys. **62** (Febrero 1994).
- [8] *Métodos generales de resolución de ecuaciones diferenciales*, E. Kamke.