

## **Laboratorio 5 - UBA**

### **Primer Cuatrimestre de 1999**

#### **LA NATURALEZA ESTADISTICA DEL DECAIMIENTO RADIOACTIVO.**

**Autores:** M.A. Agadakis. R.R. Yáñez.

Por medio de la detección de las emisiones gamma de una fuente de sodio 22 ( $^{22}\text{Na}$ ) se estudió la naturaleza estadística del decaimiento radiactivo. Se testearon dos hipótesis con significado físico acerca de este proceso, con implicancias en la forma de la distribución; resultando la distribución de Poisson la que ajusta correctamente los datos experimentales.

#### **INTRODUCCION.**

El proceso por el cual se producen los decaimientos de los núcleos en una fuente radiactiva es un proceso netamente estocástico. El número de decaimientos es independiente del número de núcleos radiactivos presentes en la fuente y tanto el tiempo al cual ocurre como la dirección de la radiación emitida no puede ser predichos microscópicamente. Al contar con un numero grande de átomos ( $\sim 10^{12}$ ) se puede determinar el numero promedio de decaimientos en una dada dirección, siendo esta, en el presente trabajo, la dirección en la cual esta ubicado el detector.

El numero de emisiones por parte de la fuente en un intervalo de tiempo dado no dará siempre el mismo resultado. Repitiendo la observación una gran cantidad de veces (aproximadamente 8000 en nuestro trabajo) se obtendrá un valor promedio de cuentas.

La variación estadística que mencionamos se debe exclusivamente a la fuente y no al sistema detector y por lo tanto no conocemos a priori su distribución. El objetivo del presente trabajo es determinar esa distribución repitiendo el contaje de rayos gamma provenientes de la fuente.

#### **DESARROLLO TEORICO.**

La probabilidad de tener  $n$  cuentas en el detector a tiempo  $t + \Delta t$  está dada por la ecuación (1).

$$P(n, t + \Delta t) = P(n, t)[1 - \gamma(n, \Delta t)] + P(n - 1, t)\gamma(n - 1, \Delta t) \quad (1)$$

Esta ecuación expresa el hecho de que las cuentas son acumulativas, es decir, pueden contabilizarse  $n$  cuentas o bien porque a tiempo  $t$  ya se tenían  $n$  cuentas y la fuente no decayó en  $\Delta t$ , o bien porque se tenían  $n-1$  cuentas y la fuente decayó en  $\Delta t$ . Esta ecuación es de primer

orden ya que se asume que  $\Delta t$  es suficientemente pequeño como para que a lo sumo se detecte un solo decaimiento.

La probabilidad de que la fuente emita una partícula en  $\Delta t$  está simbolizada por  $\gamma$ , que en principio podría o no depender del estado pasado de la fuente. En este caso, ese estado está determinado por la variable  $n$  (cuentas totales detectadas).

Esta libertad en la elección de  $\gamma$  permite contrastar dos hipótesis acerca de la probabilidad de emisión por parte la fuente.

- 1) La probabilidad depende del número de núcleos radiactivos remanentes en la muestra,
- 2) La probabilidad no depende de la historia pasada del sistema.

Recordemos que en ambos casos se cumple:

$$N = N_0 - n \quad (2)$$

El número de núcleos remanentes en la muestra ( $N$ ) es la diferencia entre el número inicial de núcleos ( $N_0$ ) y el número de decaimientos ( $n$ ).

Describiremos brevemente las consecuencias de ambas hipótesis.

### **Hipótesis Numero 1:**

Cada uno de los  $N$  átomos inestables remanentes en la fuente tiene una probabilidad de emisión de  $\rho \Delta t$ . Todos los núcleos suman una probabilidad conjunta de emisión de  $N\rho\Delta t$ , por lo que se reemplaza  $\gamma(n, \Delta t) = N\rho\Delta t$ .

El término  $\gamma(n-1, \Delta t)$  puede obtenerse de la ecuación (2) quedando:  $\gamma(n-1, \Delta t) = (N+1)\rho\Delta t$   
Reemplazando estas expresiones en (1) se obtiene :

$$P(n, t + \Delta t) = P(n, t)[1 - N\rho\Delta t] + P(n-1, t)[(N+1)\rho\Delta t] \quad (3)$$

Suponiendo  $\Delta t$  pequeño se obtiene una ecuación diferencial para  $P(n, t)$ :

$$\frac{dP(n, t)}{dt} = -N\rho P(n, t) + (N+1)\rho P(n-1, t) \quad (4)$$

Se puede demostrar que la solución para (4) viene dada por :

$$P(n, t) = N_0 C_n [1 - e^{-\rho t}]^n [e^{-\rho t}]^{N_0 - n} \quad (5)$$

[ $P(n, t)$  es una distribución gaussiana]

Si la distribución de los datos fuera normal los histogramas experimentales tendrían forma Gaussiana, es decir, cumplirían una ecuación de la forma :

$$C(n) = Ae^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{b}} \quad (6)$$

[Forma supuesta de los histogramas]

Tomando logaritmos en ambos miembros tenemos :

$$\text{Ln}(C) = \text{Ln}(A) - \frac{(n-\bar{n})^2}{b} \quad (7)$$

Lo cual es simplemente un cambio de escalas que permite obtener una relación lineal entre las cantidades de interés.

### **Hipótesis Numero 2:**

La probabilidad de emisión por la muestra de N átomos es  $\lambda \Delta t$  .

Aquí la probabilidad de transición es independiente de la historia pasada del sistema.

$$\gamma(n, \Delta t) = \lambda \Delta t$$

$$P(n, t + \Delta t) = P(n, t)[1 - \lambda \Delta t] + P(n-1, t)\lambda \Delta t \quad (8)$$

Procediendo de la misma manera que en el caso anterior :

$$\frac{dP(n, t)}{dt} = -\lambda P(n, t) + P(n-1, t)\lambda \quad (9)$$

$$P(n, t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \quad (10)$$

[P(n, t) es una distribución de Poisson]

Una de las propiedades de esta distribución es que tanto la varianza como el tercer momento de la distribución son iguales al promedio de ésta.

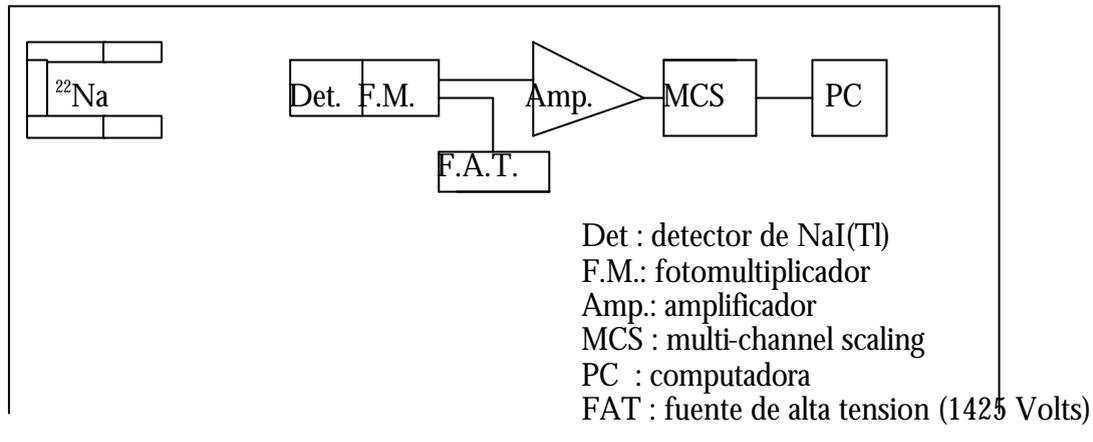
$$\sigma^2 = \bar{n} \quad (11)$$

$$m_3 \text{ (Tercer momento)} = \bar{n}$$

$$\text{con } m_3 = \frac{\sum (N_i)^3}{N} - \frac{3\bar{N} \sum (N_i)^2}{N} + 2\bar{N}^3 \quad (12)$$

## DESARROLLO EXPERIMENTAL.

En la figura 1 se observa el dispositivo utilizado para llevar a cabo el experimento.



**Figural:** *Dispositivo experimental y diagrama de bloque del circuito electrónico utilizado.*

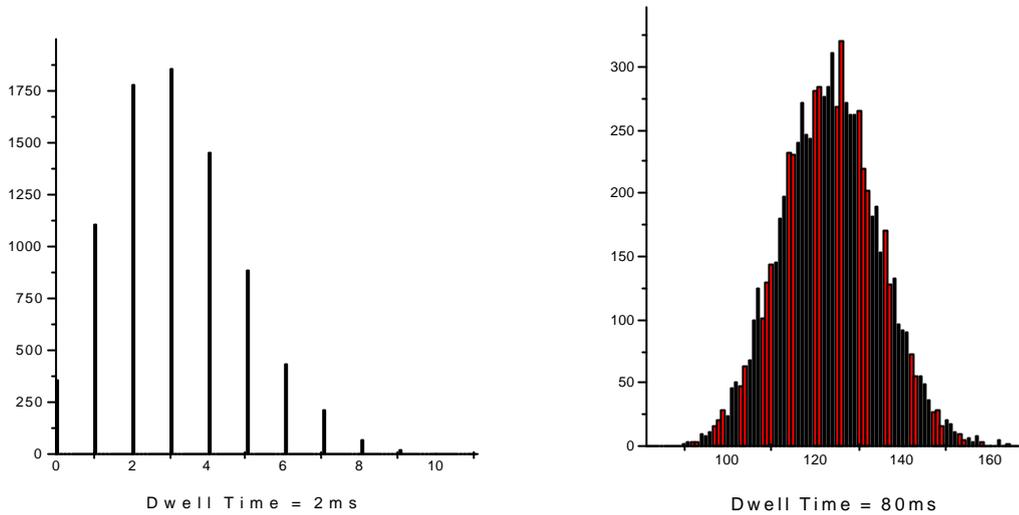
Se utilizó un detector de centelleo de yoduro de sodio dopado con talio. Se colocó una fuente radiactiva de sodio 22 cerca del detector a una distancia tal que el conteo no excediera de unas 100 cuentas por minuto de modo que el tiempo muerto del detector no afectara las mediciones. La distancia fuente-detector fue de 15 cm.

El detector se conectó a una fuente de alta tensión y a un amplificador; este a su vez fue conectado a la placa MCS, que adquiere y envía los datos a la computadora. Usando el programa PCA se cuenta la llegada de rayos gamma al detector. Entonces, con este programa se determinó el tiempo que duraría cada conteo (dwell time) y se determinó el número de canales a utilizar. En este caso, cada canal equivale a una repetición del experimento (una repetición del conteo para el dwell time elegido).

Se realizaron mediciones para trece distintos tiempos de duración de los conteos, variando entre 1ms y 1s.

## RESULTADOS Y ANALISIS.

Con los datos obtenidos de las trece mediciones practicadas, se graficaron los correspondientes histogramas. En la figura 2 se aprecian los histogramas de dos de las mediciones, que ejemplifican los casos típicos



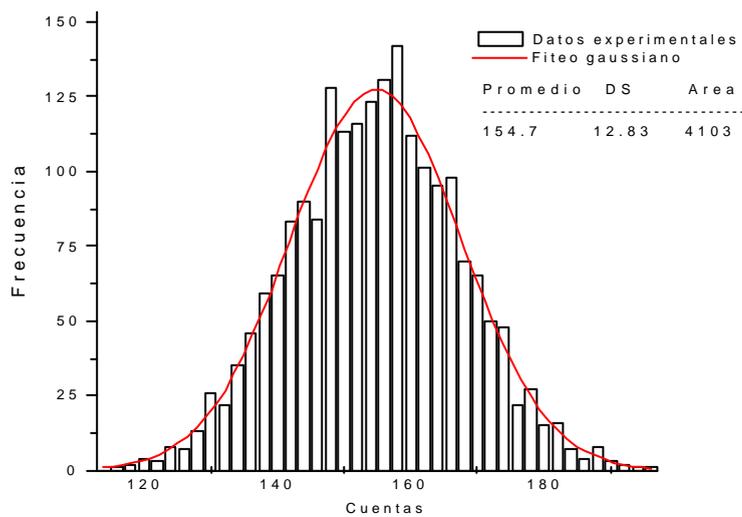
de resultados obtenidos.

**Figura 2:** Histogramas típicos no normalizados para dos de los tiempos utilizados para adquirir datos.

Son dos tandas de 8192 datos cada una.

E

practicaron ajustes gaussianos. En la figura 3 se aprecia un ejemplo de los ajustes mencionados en la figura 4 una regresión lineal tomando en cuenta la primera de las hipótesis mencionadas en el desarrollo teórico (ecuación 7).



**Figura 3.** Histograma experimental y ajuste gaussiano de los datos para Dwell Time = 100ms.

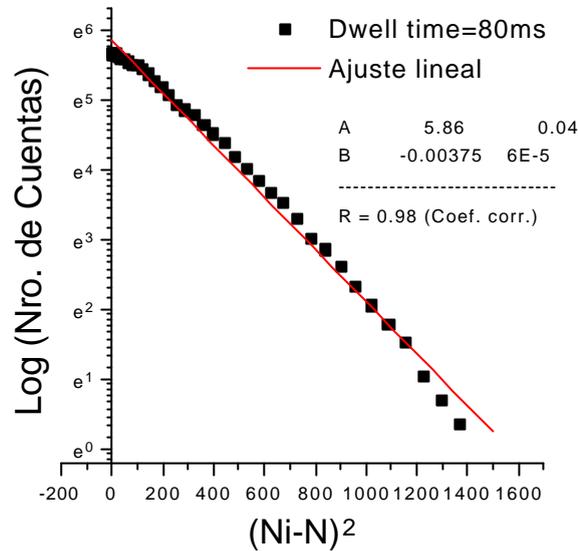


Figura 4. Gráfico del histograma obtenido para la medición de Dwell Time = 80ms, con una elección particular de escalas. Se aprecia el buen ajuste por una distribución Gaussiana.

A favor de la segunda hipótesis y en discordancia con la primera, podemos observar el análisis realizado en las figuras 5 y 6. En estas se aprecia las regresiones lineales efectuadas para varianza vs. promedio y varianza y tercer momento vs. promedio, respectivamente. Se observa la tendencia lineal en ambos casos, resultado que no necesariamente debiera darse en la distribución normal, pero sí en la de Poisson. La variación lineal de la varianza respecto del promedio con pendiente uno se aprecia en la figura 5, con un coeficiente de correlación cercano a uno. Si se tratara del caso Poissoniano se tendría esta misma variación, como indica la ecuación 11.

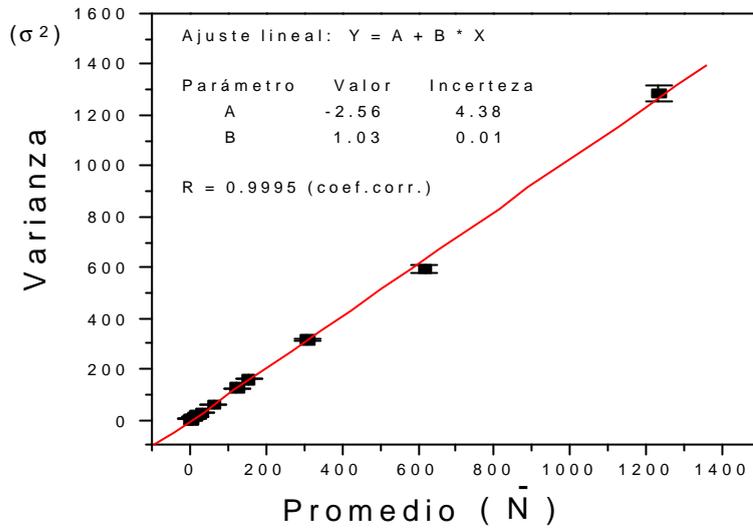


Figura 5. Variancia versus promedio para los datos experimentales de la figura 1. El ajuste lineal con pendiente muy próxima a uno apoya la elección de la distribución de Poisson.

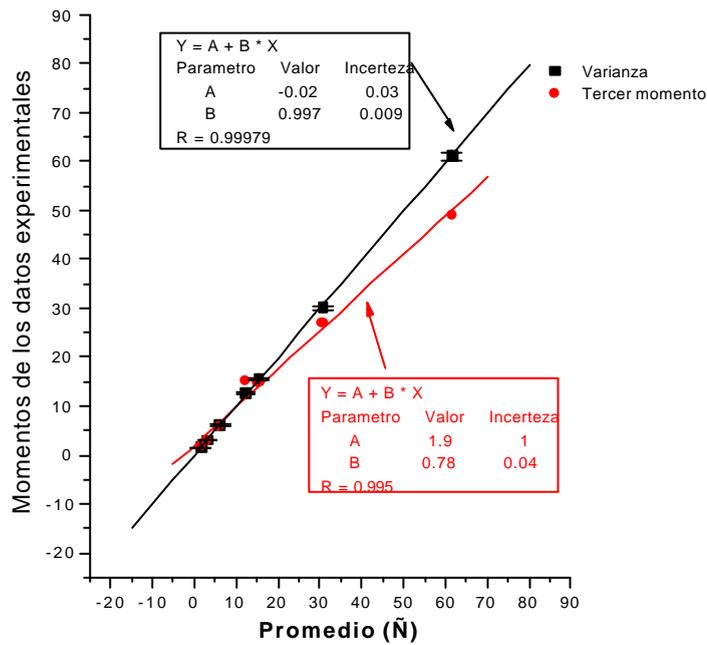


Figura 6. Variancia y tercer momento versus promedio para los datos experimentales. El tercer momento de la distribución tiene dependencia lineal con el promedio, lo cual apoya la elección de la distribución de Poisson para el ajuste.

## CONCLUSIONES.

Si bien al ensayar las hipótesis sobre los resultados obtenidos ambas parecen adecuarse bien a las observaciones, es para la segunda hipótesis que se obtiene un mejor ajuste. Entonces la probabilidad de obtener un número determinado de cuentas en el detector viene dada por la distribución de Poisson. Esta afirmación está sustentada por el análisis de los resultados.

Analizando la primera hipótesis se ve debería existir una relación lineal entre la frecuencia a la que se da un resultado particular (cuentas) y  $(n_i - n)^2$  (ecuación 7). Además, los histogramas deberían ajustarse bien por una distribución gaussiana. En la mayoría de nuestros resultados (de las trece mediciones) esto se cumple, dando en general un coeficiente de correlación de alrededor de 0.98. Ambos ajustes se puede apreciar en las figuras 3 y 4. Sin embargo, también se obtuvieron histogramas como el primero de la figura 2, que muestra asimetría.

Para ensayar los resultados con la segunda hipótesis, se realizaron las regresiones que se ven graficadas junto a los resultados de las mediciones en las figuras 5 y 6. Estas regresiones deberían tener pendiente igual a uno, ya que como indica la ecuación 11, para la distribución de Poisson la varianza es igual al promedio. Se observa en los gráficos que efectivamente esto se cumple satisfactoriamente, con coeficientes de correlación de 0.9995 y 0.9998 respectivamente. En el caso del tercer momento  $R = 0.995$ , pero para estos no se contó con la incerteza correspondiente.

El argumento más importante para descartar la primera hipótesis es el resultado que se observa en la figura 6. En esta se ve que efectivamente la pendiente es igual a uno, o sea que la varianza es igual al promedio. En la distribución Gaussiana este es un resultado que no tiene porque darse, mientras que se trata de una propiedad intrínseca a la distribución de Poisson. El hecho de que un ajuste gaussiano haya sido en alguna medida satisfactorio tiene que ver con otra de las propiedades de la distribución de Poisson. Cuando el tamaño de la muestra se hace suficientemente grande, la distribución de Poisson tiende a una distribución normal particular.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1]-"Mathematical Statistics", J.E. Freund, 2nd edition. Prentice-Hall, 1971.
- [2]-"Statistical Treatment of Experimental Data", S.D. Young
- [3]-"Stochastic Models of Radioactive Decay", I.A. Kinsella, A. Dunne.  
Am.J.Phys. 48(2), Feb. 1980.
- [4]- "Resolving time effect on counting statistics", Granvil C. Kyker,  
Am.J.Phys. 49(6), Jun. 1981.