

# Estadística del decaimiento radiactivo

C. Balpardo, N. Furman, y M. Ortega - nikielo@hotmail.com - Tel: (5411) 4624-5352/4839-1327  
Laboratorio 5, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, U.B.A.  
Marzo de 2001.

Se presenta un tratamiento estadístico para el decaimiento radiactivo del núcleo de  $^{137}\text{Cs}$ , mediante el empleo de un detector de NAI para fotones gama y de un analizador multicanal. El comportamiento estadístico de dicho proceso fue estudiado a fin de determinar las características de su distribución de probabilidades. Se compararon las distribuciones de Poisson y de Gauss, con los datos medidos mediante el análisis de chi-cuadrado.

## I. INTRODUCCION

El decaimiento radiactivo del núcleo es un proceso estocástico, es decir cada núcleo excitado puede decaer emitiendo un fotón gama en cualquier dirección, sin posibilidad de predicción alguna. El número de átomos de la muestra que decaen por unidad de tiempo y de área es aleatorio. Este trabajo pretende estudiar la distribución de probabilidades del proceso en cuestión.

Para ello, se estudió el comportamiento estadístico de dicho decaimiento utilizando como fuente al  $^{137}\text{Cs}$ .

Se realizó un análisis más detallado en comparación con la distribución de Poisson, mediante el estudio de chi-cuadrado.

## II. MODELO TEORICO.

Como primera hipótesis para nuestro estudio se resalta la suposición de que las probabilidades de emisión de fotones gama para dos átomos distintos cualesquiera de la muestra son independientes e iguales (la muestra es pura).

Además la probabilidad de emisión de un fotón gama durante el intervalo de medición se considera constante.

La probabilidad de que decaiga un solo átomo es,

$$P_1(dt) \cong a \cdot dt \quad (1)$$

Donde  $a$  es el número de átomos que decaen por unidad de tiempo.

La probabilidad de que dicho átomo no decaiga es

$$P_0(dt) = 1 - P_1(dt) \quad (2)$$

Si consideramos un intervalo de tiempo  $t+dt$  la probabilidad de observar  $n$  fotones gama es,

$$P_n(t+dt) = P_1(dt) \cdot P_{n-1}(t) + P_0(dt) \cdot P_n(t) \quad (3)$$

Al emplear el desarrollo de la cadena de Markov, estamos suponiendo que el proceso de decaimiento de los átomos no es influido por el pasado de la muestra.

Y la ecuación maestra para dicho proceso estocástico es,

$$\frac{dP_n}{dt} = a \cdot [P_{n-1}(t) - P_n(t)] \quad (4)$$

La solución para dicha ecuación es,

$$P_n(t) = \frac{(a \cdot t)^n}{n!} \cdot e^{-a \cdot t} \quad (5)$$

Tomando todos los intervalos de medición iguales tenemos que  $\Delta t = \bar{t}$ , donde  $\bar{t}$  es el valor medio de fotones gama. Con esto obtenemos la distribución de probabilidades de Poisson.

$$P_n = \frac{(I)^n}{n!} \cdot e^{-I} \quad (6)$$

El estudio de chi-cuadrado es un método cuantitativo para analizar la discrepancia entre una distribución de probabilidades teórica y una experimental. Chi-cuadrado se escribe como,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \quad (7)$$

Donde  $n_i$  es la frecuencia medida con la que se registra un determinado número de fotones y  $\hat{n}_i$  la frecuencia teórica, con lo cual el chi-cuadrado es nulo cuando ambas distribuciones coinciden.

La varianza de una distribución se define como

$$s^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n - \langle n \rangle)^2 \cdot P_n \quad (8)$$

Si reemplazamos la probabilidad por la forma que adopta en la distribución de Poisson, (ec. 6) tenemos que la varianza es igual al valor medio de la medición.

$$s^2 = \langle n \rangle \quad (9)$$

### III. ARREGLO EXPERIMENTAL.

El detector de los fotones gama está formado por dos partes. La primera un centellador inorgánico (NAI), es un cristal que transforma los fotones gama en fotones visibles. La segunda parte consta de un fotomultiplicador que alimentado por una fuente de alta tensión transforma cada fotón que recibe en un pulso de corriente dado. Su amplitud es proporcional a la energía del fotón incidente.

Dicho pulso es amplificado y posteriormente filtrado (SCA: single channel analyzer) en el rango de energías de interés.

La señal resultante es adquirida por un analizador multicanal controlado desde la computadora.

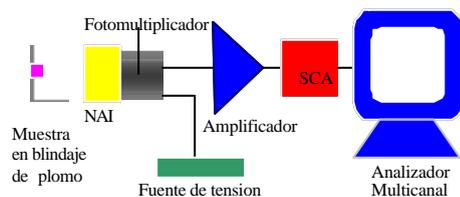


Fig. 1. Configuración del dispositivo experimental.

### IV. MEDICIONES Y RESULTADOS.

El analizador multicanal operando en el modo escalado multicanal (MCS: multichannel scaling) asigna un determinado intervalo de tiempo de adquisición de datos a cada uno de sus 512 canales disponibles.

Se registra así el número de decaimientos de átomos de la muestra en cada uno de los 512 intervalos de tiempo iguales.

Se trabajó con diferentes intervalos de tiempos, 1ms, 2ms, 3ms, 4ms, 8ms, 10ms, 20ms, 40ms, 100ms, 200ms, 400ms, 1s y 2s.

Durante todas las mediciones la fuente trabajó a una tensión constante de 1345 volts.

Para cada tiempo mencionado se obtiene un valor promedio de los fotones registrados.

Según la ecuación 9, podemos graficar

$\langle n \rangle$  vs  $s^2$  y si la distribución de probabilidades es la de Poisson el gráfico debe ser una recta de pendiente 1 y ordenada al origen cero.

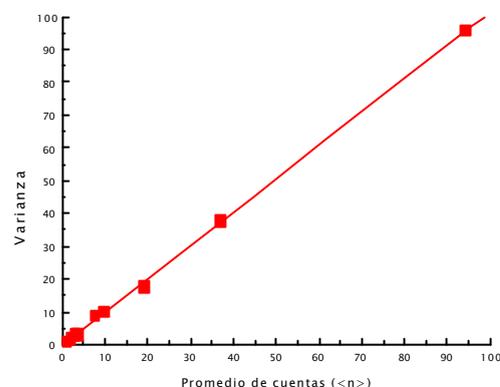


Fig. 2. Gráfico del número medio de fotones vs la varianza, para los primeros 9 tiempos de medición. El fiteo lineal realizado por el Origin 4.0 arroja un valor para la pendiente de  $1,016 \pm 0,009$  y un valor para la ordenada al origen de  $0,117 \pm 0,334$ .

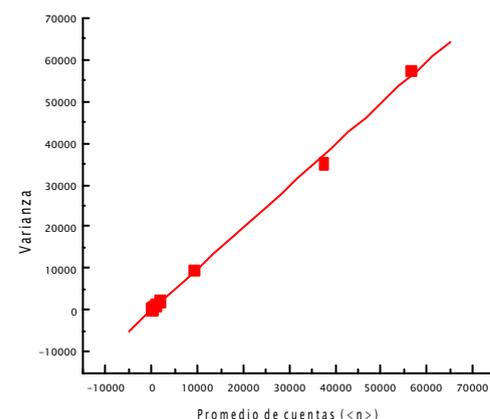


Fig. 3. Gráfico del número medio de fotones vs la varianza, para todos los tiempos de medición. El fiteo lineal realizado por el Origin 4.0 arroja un valor para la pendiente de  $0,991 \pm 0,001$  y un valor para la ordenada al origen de  $-34,231 \pm 178,738$ .

En ambas figuras puede apreciarse una similitud en las pendientes del fito lineal. Sin embargo la ordenada al origen de la figura 3 difiere ampliamente del valor nulo esperado.

Puede suponerse que al considerar tiempos de medición más largos se produce una mayor inestabilidad en los cálculos numéricos debido al mayor volumen de datos procesados.

También se estudió la comparación entre una distribución gaussiana y una de Poisson mediante chi-cuadrado.

En las siguientes figuras se muestran los resultados para los tiempos de medición más significativos.

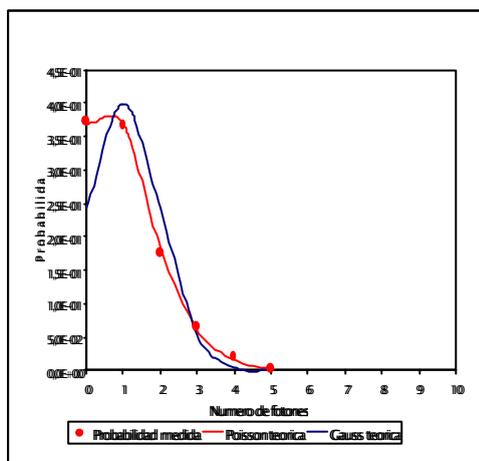


Fig. 4. Comparación entre la distribución de probabilidades de la medición y las teóricas de Poisson y Gauss para 1ms. Mediante el Excel se obtuvo un  $\chi^2$  de 0,01 para la distribución de Poisson y de 0,86 para la de Gauss.

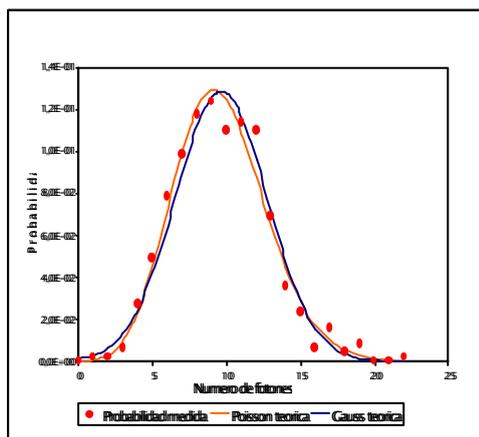


Fig. 5. Comparación entre la distribución de probabilidades de la medición y las teóricas de Poisson y Gauss para 10ms. Mediante el Excel se obtuvo un  $\chi^2$  de 1,15 para la distribución de Poisson y de 3,34 para la de Gauss.

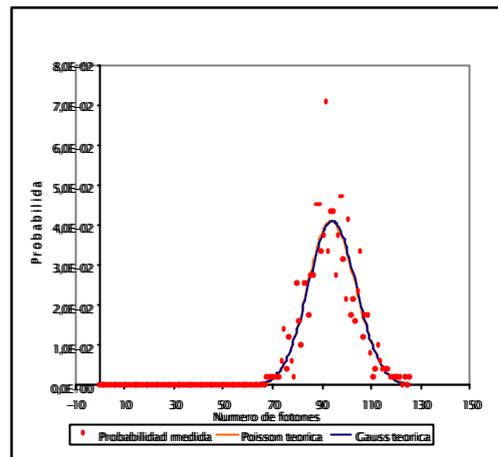


Fig. 6. Comparación entre la distribución de probabilidades de la medición y las teóricas de Poisson y Gauss para 100ms. Mediante el Excel se obtuvo un  $\chi^2$  de 18,23 para la distribución de Poisson y de 19,65 para la de Gauss.

Como puede apreciarse en las figuras anteriores la distribución de Poisson es la que mejor ajusta a la distribución de probabilidades para la emisión de fotones que se midió. Lo cual era de esperar según el resultado anterior.

## V. CONCLUSIONES.

El resultado fundamental que confirma que el decaimiento radiactivo del núcleo es un proceso estocástico cuya distribución de probabilidades es la distribución de probabilidades de Poisson se ve claramente en la fig. 2, pues al graficar varianza vs el valor medio del número de fotones emitidos, el comportamiento lineal con pendiente 1 y ordenada al origen cero es propio de dicha distribución.

En el estudio posterior que consistió en comparar las distribuciones de Poisson y de Gauss con la distribución experimental se confirma lo dicho anteriormente, pues el chi-cuadrado de la primera distribución es siempre menor.

## VI. REFERENCIAS.

- 1) Stochastic models of radioactive decay, Kinsella, I. A, Dunne, A., Am. J. Phys. 48(2), Feb. 1980.
- 2) Teoría de errores de mediciones, Cernuschi, F., editorial Eudeba.
- 3) S.Gil y E. Rodríguez - Física re-Creativa - Prentice Hall - Bs.As. 2001