# Dinámica relativista y Colisión Fotón – Electrón

Dina Tobia - Martín E. Saleta

Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Departamento de Física

En este trabajo se estudian, a partir de los espectros de fuentes radioactivas medidas con un centellador de NaI(TI), las interacciones fotón – electrón utilizando las predicciones clásicas y relativistas. Concluimos que el enfoque relativista es el que describe adecuadamente las interacciones Compton. Basándonos en esta descripción calculamos la energía en reposo del electrón. Se observa que a bajas energías los dos modelos coinciden.

#### **Introducción**

La interacción entre los rayos gama y la materia se produce básicamente a través de los siguientes mecanismos:

*Efecto fotoeléctrico*: ocurre cuando el fotón incidente entrega toda su energía a un electrón ligado a un átomo.

*Creación de pares*: en este caso la energía del fotón incidente se emplea en generara un par electrón – positrón, que se reparten entre sí la energía y el momento del fotón incidente. *Efecto Compton*: en este caso el fotón incidente interactúa con un electrón libre, por lo tanto, para que se conserven la energía y el momento del sistema, el estado final se compone de un electrón y un nuevo fotón entre los cuales se reparten la energía y el momento del fotón incidente.

Nosotros estudiaremos este último proceso. En nuestro caso las interacciones se producen entre la radiación gama incidente (de distintas fuentes) y el dispositivo de detección de dicha radiación, el cual describiremos más adelante.

# Desarrollo teórico<sup>(1), (2)</sup>

El efecto Compton puede modelarse como un choque elástico entre un fotón y un electrón, por lo tanto, la energía y el momento se conservan durante la interacción.

Denominaremos al momento y la energía cinética del electrón después de la interacción con p<sub>e</sub> y T respectivamente. Designaremos con E<sub>γ</sub> la energía del fotón incidente y con E'<sub>γ</sub>(θ) la energía del fotón después de la interacción, que suponemos sale en una dirección que forma un ángulo θ con la dirección del fotón incidente (Ver Figura 1).



Para el caso particular de una colisión unidimensional, es decir, para el caso  $\theta$ =180°, a partir de la conservación del momento y la energía, es fácil demostrar que

$$p_{e}c = 2E_{\gamma} - T$$
 (Ec. 1)

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Esta relación es válida tanto clásica como relativísticamente. (Si se desea estudiar este efecto para distintos ángulos luego de la colisión puede consultarse el trabajo de A. Bartlett et al<sup>(3)</sup>). Como un primer intento para determinar la masa del electrón podemos asumir la conexión no relativista entre la energía y el momento:

$$T = \frac{p_e^2}{2m_{nr}}$$
 (Ec. 2)

Aquí  $m_{nr}$  es la masa no relativista del electrón. Combinando las ecuaciones 1 y 2 llegamos a:

$$m_{nr}c^2 = \frac{(2E_{\gamma} - T)^2}{2T}$$
 (Ec. 3)

Esta expresión permite obtener la masa no relativista del electrón en la aproximación clásica en términos de  $E_{\gamma} \gamma T$ .

La correspondiente expresión relativista que relaciona el momento y la energía cinética del electrón es:

$$T = E_e - m_0 c^2 = \sqrt{p_e^2 c^4 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 \quad \text{(Ec. 4)}$$

donde  $m_0$  es la masa en reposo y  $E_e$  es la energía total del electrón.

Si combinamos las ecuaciones 1 y 4 obtenemos una expresión para la masa en reposo del electrón en términos de las variables medidas experimentalmente:

$$m_0 c^2 = \frac{2E_{\gamma}(E_{\gamma} - T)}{T}$$
 (Ec. 5)

Los parámetros relativistas  $\beta = v/c$ ,  $\gamma = 1/(1-\beta^2)^{1/2}$  y  $E_e = (p_e^2 + c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2}$  pueden escribirse en términos de los parámetros  $E_v$  y T como:

$$\beta = \frac{T(2E_{\gamma} - T)}{T^2 - 2E_{\gamma}T + 2E_{\gamma}^2}$$
 (Ec. 6)  
$$\gamma = 1 + \frac{T^2}{2E_{\gamma}(E_{\gamma} - T)}$$
 (Ec. 7)

Dinámica relativista y Colisión Fotón – Electrón -Dina Tobia – Martín E. Saleta

$$E_e = \frac{T^2 - 2E_{\gamma}T + 2E_{\gamma}^2}{T}$$
 (Ec. 8)

#### Arreglo experimental

Nuestro objetivo es obtener experimentalmente los valores de T y  $E_{\gamma}$ . Para ello utilizamos un dispositivo que se esquematiza en la Figura 2.



Este dispositivo consta de una fuente radioactiva y un detector compuesto por un centellador de ioduro de sodio dopado con talio (NaI(Tl)) acoplado a un fotomultiplicador (PMT). Este último se conecta a una PC que incluye un amplificador y una fuente de alta tensión. Cuando un fotón gama interactúa con el material del detector, su energía se degrada total o parcialmente (efecto fotoeléctrico o Compton, respectivamente) dentro del material, dando como resultado final que algunos de sus átomos queden en estados excitados. A su vez, cuando estos átomos decaen, emiten fotones visibles cuyo número es proporcional a la energía depositada en el cristal. En los centelladores, los fotones visibles inciden sobre el fotocátodo del tubo fotomultiplicador. Allí, cada fotón incidente visible produce la emisión de un electrón por efecto fotoeléctrico; estos electrones son acelerados y dirigidos hacia una serie de electrodos llamados dínodos, donde se producen electrones por emisión secundaria. El número de electrones expulsados por cada colisión varia según la tensión que se le aplica a los dínodos. Estos electrones son acelerados nuevamente y dirigidos hacia otros electrodos, logrando un efecto fotomultiplicador. De esta forma la salida del fotomultiplicador entrega un pulso de tensión de amplitud proporcional a la energía del fotón depositado en el cristal.

A la salida del detector se utiliza un amplificador espectroscópico, que amplifica y conforma los pulsos del detector, para ser analizados por el programa de adquisición de datos de la PC. En nuestro caso este programa es un analizador multicanal que realiza un histograma del número de cuentas en función del canal. Las principales características de un espectro típico de rayos gama son: el *fotopico*, el cual corresponde al caso en que toda la energía del fotón incidente queda en el detector; una *meseta Compton*, que corresponde a la máxima energía de los electrones en una colisión frontal con los fotones incidentes, y, en algunos casos también se observa un pico de *back – scattering*, que corresponde a la energía de los fotones que son retrodispersados en el medio circundante y reingresan al detector (Ver Figura 3).



La relación entre la importancia relativa de la meseta Compton y el fotopico depende, entre otros factores, del tamaño del centellador. Si éste es lo suficientemente grande los fotones secundarios seguirán interactuando hasta liberar toda su energía, por lo tanto se obtendrá un pico en la frecuencia del fotón incidente v la meseta Compton será despreciable frente a éste. Si el centellador es pequeño, los fotones secundarios escaparán y se obtendrá, además del fotopico correspondiente, una región continua que corresponde a la meseta Compton con un corte abrupto. El continuo de la meseta se debe a que la energía de los electrones eyectados varía según sea el ángulo con el que sale el fotón secundario. En particular, si éste escapa a 180° de la dirección incidente, el electrón eyectado tendrá la máxima energía posible en este tipo de interacción. Es decir, el valor máximo de energía de la meseta Compton, llamado borde Compton, está asociado a la energía máxima impartida a un electrón en una interacción Compton. La razón por la que el borde Compton no es abrupto está asociada en parte al hecho de que los electrones del detector no están libres y a las limitaciones de resolución del detector. Este borde corresponde entonces a la energía cinética T del electrón emitido cuando el rayo gama incidente es dispersado a 180º.

#### **Resultados**

Una vez adquiridos los espectros de cada muestra (<sup>60</sup>Co, <sup>137</sup>Sc, <sup>133</sup>Ba, <sup>207</sup>Bi, <sup>22</sup>Na), determinamos el canal correspondiente a cada fotopico. Para calibrar el multicanal usamos las energías conocidas de las líneas de los distintos elementos.<sup>(1), (4)</sup> Con estos datos construimos un gráfico de energía versus número de canal y, a partir de la regresión lineal, obtuvimos la curva de calibración (Figura 4).



Para determinar las energías correspondientes a los bordes Compton consideramos el promedio entre el máximo y el mínimo valor de la pendiente que queda determinada al no ser abrupto dicho borde. (Existen otros métodos para calcular este valor, por ejemplo, el descripto en un trabajo de P. L. Jolivette y N. Rouze<sup>(1)</sup>).

Los valores obtenidos se muestran en la tabla 1. Además, debido a que las muestras medidas no abarcaban rangos de energías bajas, recurrimos a datos experimentales medidos con un detector Si(Li) para muestras de <sup>241</sup>Am y <sup>57</sup>Co <sup>(1)</sup> (los demás parámetros de esta tabla fueron medidos con un detector de NaI(Tl)).

Muestra	E <sub>γ</sub> [keV]	E <sub>compton</sub> (T) [keV]
<sup>60</sup> Co	1173.2	$955 \pm 29$
<sup>60</sup> Co	1332.5	$1109 \pm 33$
<sup>137</sup> Cs	661.7	473 ± 14
<sup>22</sup> Na	511.0	336 ± 10
<sup>22</sup> Na	1247.5	$1058 \pm 32$
<sup>133</sup> Ba	356.0	$205\pm 6$
<sup>207</sup> Bi	569.8	$389 \pm 19$
<sup>207</sup> Bi	1063.8	$854\pm26$
<sup>57</sup> Co	122.1	$39.3\pm0.5$
<sup>241</sup> Am	59.5	$11.3 \pm 0.5$
Tabla 1: Valores medidos de las energías de los fotopicos y		
de los bordes Compton.		

Una vez determinadas las energías de los fotopicos y de los bordes Compton procedimos a un análisis de los datos con el fin de observar qué tipo de dinámica (clásica o relativista) se ajusta a las mediciones realizadas.



En la figura 5 se muestra el gráfico de las energías de los bordes Compton en función de las energías de los fotopicos correspondientes. Los puntos medidos se ajustan según la ecuación

$$T = \frac{2E_{\gamma}^2}{2E_{\gamma} + m_0 c^2}$$
 (Ec. 5')

la cual se obtiene a través de un despeje de la ecuación 5. A partir de este ajuste, se puede obtener la energía en reposo del electrón como parámetro del mismo, siendo en nuestro caso  $m_0c^2 = (529 \pm 2) \ keV.$ 

A continuación mostramos un gráfico de la energía en reposo calculada no relativísticamente (ecuación 3) en función de la energía cinética (Figura 6).



En este gráfico se observa que las pretensiones clásicas no se cumplen ya que la masa del electrón ( $m_{nr}$ ) no permanece constante sino que presenta una tendencia lineal como función de la

Dinámica relativista y Colisión Fotón – Electrón -Dina Tobia – Martín E. Saleta

energía cinética. Sin embargo, es interesante observar que para energías bajas la cantidad  $m_{ur.}c^2$  coincide, dentro del error experimental, con la energía en reposo del electrón (511 keV<sup>(1)</sup>), la cual es la que posee un electrón estacionario según predice la teoría especial de la relatividad (esto se aprecia en el valor de la ordenada al origen correspondiente a la regresión lineal calculada). Esto quiere decir que, para velocidades bajas (es decir velocidades mucho menores que las de la luz), ambas teorías coinciden.

Para completar este análisis presentamos en la figura 7 un gráfico donde se representa la energía en reposo del electrón (según la expresión relativista de la ecuación 5) en función de la energía cinética.



<u>Figura 7</u>: Masa en reposo por el cuadrado de la velocidad de la luz (con su correspondiente error) en función de la energía cinética a partir de consideraciones relativistas.

En el gráfico anterior se aprecia como, dentro del error experimental, la masa en reposo es independiente de la energía cinética, según predice la teoría de la relatividad especial. La línea azul representa el promedio de los valores de los puntos. Este valor es:  $m_0c^2 = (525 \pm 20) \text{ keV}.$ 

Para completar el análisis realizamos gráficos de *p.c* versus  $\beta$  y del parámetro  $\gamma$  versus  $\beta$  (Figuras 8 y 9 respectivamente).





En la figura 8 puede verse claramente el comportamiento asintótico esperado por la teoría especial de la relatividad a medida que beta se aproxima a la unidad.

Se observa en la figura 9 la excelente correlación entre los puntos medidos y la expectación teórica.

## **Conclusiones**

Debido a las altas velocidad que adquiere el electrón en la interacción, el efecto Compton es descripto adecuadamente por la dinámica relativista. Esto se aprecia en los ajustes relativista efectuados en las figuras 7 a 9, y en especial en la figura 6, donde se observa que la masa del electrón en reposo, tomada desde el punto de vista no relativista, no permanece constante, aumentando linealmente con la energía. Sin embargo vimos que para bajas velocidades es válida la teoría clásica ya que la masa no relativista coincide con el valor de la masa en reposo según la versión relativista (Ver ordenada al origen del ajuste de la figura 6) Utilizando las ecuaciones de la teoría de la relatividad especial obtuvimos el valor de la energía en reposo del electrón a partir del promedio de los puntos del gráfico de la figura 7  $(m_0 c^2 = (525 \pm 20) \text{ keV})$ , el cual se solapa, teniendo en cuenta su error, con el valor tabulado de 511 keV.

## **Referencias**

- (1) Am. J. Phys. 62, 266 271, 1994
- (2) S. Gil y E. Rodríguez, *Física re-Creativa*, (Prentice Hall, 2001), pág. 268 274.
- (3) Am. J. Phys. **32**, 135 142, 1964
- C. M. Lederer et al, *Table of Isotopes*, 7<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons, New York, 1978; Lederer, Hollander y Perlman, *Table of Radioisotopes*, 6<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons, New York, 1989.

Dinámica relativista y Colisión Fotón – Electrón -Dina Tobia – Martín E. Saleta