

Medición del Efecto Doppler con un Interferómetro de Michelson

Dina Tobia – Martín E. Saleta

En este trabajo estudiaremos el efecto Doppler relativista para una señal luminosa a partir de un interferómetro de Michelson con el espejo de uno de sus brazos adherido a un parlante alimentado por una señal triangular. Analizaremos la dependencia funcional del corrimiento Doppler en frecuencia con la velocidad de desplazamiento del parlante.

Introducción

El efecto Doppler describe la variación de la frecuencia de una onda percibida por un observador cuando la fuente que lo genera, el mismo observador o ambos están en movimiento. Este efecto fue analizado por Christian Doppler (1803 – 1853) para explicar la variación de la frecuencia de las ondas luminosas que provienen de cuerpos celestes.

En el caso del efecto Doppler para ondas sonoras, la variación de la frecuencia depende de que sea la fuente o el receptor el que se esté moviendo a una velocidad v . Dicha diferencia se debe a que existe un medio (en general, el aire) respecto al cual tiene lugar el movimiento; así es que puede distinguirse el movimiento de la fuente o el receptor respecto del aire en calma. Esta diferencia entre el movimiento de la fuente o el receptor no puede extenderse para analizar este efecto en el caso de la luz o de ondas electromagnéticas en el vacío. Debemos estudiar, entonces, el efecto Doppler relativista.

En este trabajo estudiaremos lo que comúnmente se conoce como “velocímetro por efecto Doppler con LASER”, LDV, por sus iniciales en inglés⁽¹⁾, utilizando un interferómetro de Michelson. El LDV se basa en la variación de la frecuencia por efecto Doppler de un haz que se hace incidir sobre uno de los espejos del interferómetro que oscila con una amplitud y frecuencia conocida.

Desarrollo teórico

Cuando los haces provenientes de los espejos del interferómetro se recombinan, puede medirse el patrón de interferencia que se produce debido a la diferencia de camino óptico de ambos haces⁽²⁾. Si, además, uno de los espejos oscila a una amplitud y frecuencia conocidas, se registran contribuciones en la interferencia debidas a la variación de la frecuencia del haz luminoso por efecto Doppler.

En la figura 1 mostramos esquemáticamente las trayectorias de los dos haces que se recombinan en el punto A, en el cual medimos la intensidad luminosa en función del tiempo.

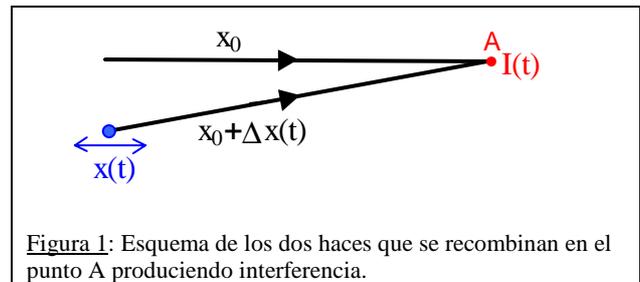


Figura 1: Esquema de los dos haces que se recombinan en el punto A produciendo interferencia.

Como puede apreciarse, la diferencia de camino recorrido por los haces que llegan a A depende también de las oscilaciones de uno de los espejos ($x(t)$).

A continuación presentamos esquemáticamente la relación entre las amplitudes de ambos haces luminosos.

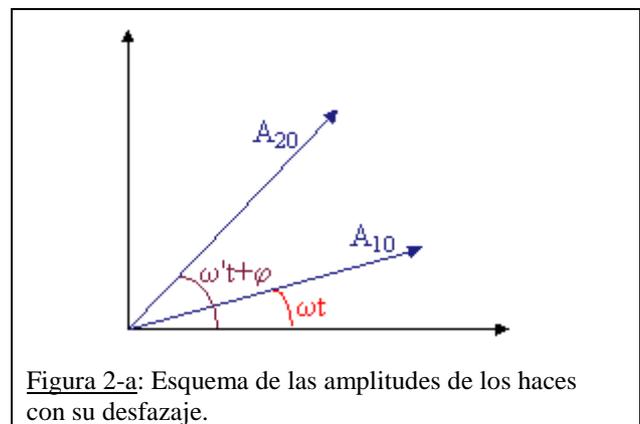


Figura 2-a: Esquema de las amplitudes de los haces con su desfase.

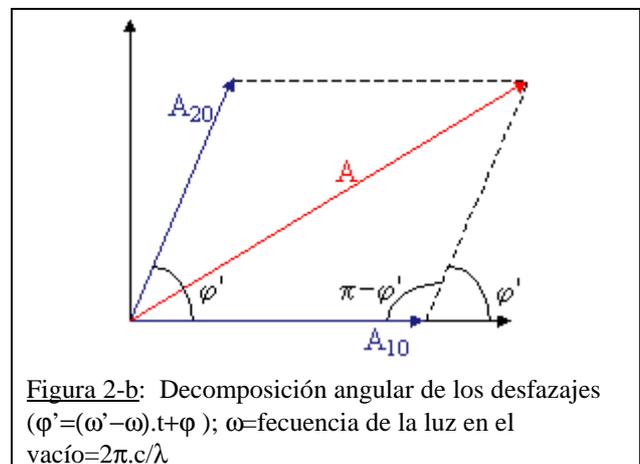


Figura 2-b: Descomposición angular de los desfases ($\phi' = (\omega' - \omega) \cdot t + \phi$); ω = frecuencia de la luz en el vacío = $2\pi \cdot c / \lambda$

Por el teorema del coseno obtenemos, a partir de la figura 2-b, la siguiente relación:

$$A^2 = A_{10}^2 + A_{20}^2 - 2.A_{10}.A_{20}.\cos(\pi - \varphi') \quad (\text{Ec. 1})$$

Por propiedades del coseno, la ecuación 1 puede escribirse como:

$$A^2 = A_{10}^2 + A_{20}^2 + 2.A_{10}.A_{20}.\cos(\varphi') \quad (\text{Ec. 2})$$

A partir de las figuras 2-a y 2-b obtenemos la siguiente expresión para A^2

$$A^2 = A_{10}^2 + A_{20}^2 + 2.A_{10}.A_{20}.\cos[(\omega' - \omega).t + \varphi] \quad (\text{Ec. 3})$$

A partir de la relación trigonométrica

$\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$ y, sabiendo que la intensidad es proporcional a cuadrado de la amplitud, de la ecuación 3 obtenemos:

$$I(t) = I_0 + I_0 \cos^2\left(\frac{\omega' - \omega}{2} t + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (\text{Ec. 4})$$

A partir de la Teoría de la Relatividad, podemos escribir que la frecuencia por efecto Doppler está dada por la siguiente expresión⁽²⁾:

$$\omega' = \omega \left(\frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{1 - \beta}} \right) \quad (\text{Ec. 5})$$

donde $2\pi.\omega$ es la frecuencia de la luz para un observador estacionario, c la velocidad de la luz en el vacío y valores positivos de u representan la velocidad relativa entre la fuente y el observador cuando estos se acercan.

Como en nuestro caso $\beta = u/c \ll 1$, podemos hacer un desarrollo en series de Taylor a primer orden, quedando⁽³⁾:

$$\omega' = \omega(1 - \beta + O((\beta)^2))$$

Esta expresión nos conduce a:

$$\omega' - \omega = -\omega.\beta \quad (\text{Ec. 6})$$

Por lo tanto la ecuación 4 puede expresarse como:

$$I(t) = I_0 + I_0.\cos^2\left(-\frac{\omega.\beta}{2} t + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (\text{Ec. 7})$$

La fase φ depende del tipo de señal de alimentación del parlante:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}.2x(t)$$

En nuestro caso, la señal es triangular, y la denotamos con: $A_0.f(t)$; entonces

$$x(t) = A_0.f(t) + \text{fase}.$$

Finalmente el argumento del coseno queda expresado como:

$$\frac{\varphi'}{2} = -\frac{\omega.\beta}{2} t + \frac{2\pi}{\lambda} A_0 f(t) + \varphi_0 \quad (\text{Ec. 8})$$

Reemplazando la ecuación 8 en la ecuación 7, llegamos a:

$$I(t) = I_0 \left[1 + \cos^2 \left(-\frac{\omega.\beta}{2} t + \frac{2\pi}{\lambda} A_0 f(t) + \varphi_0 \right) \right] \quad (\text{Ec.9})$$

Para una mejor interpretación de la relación entre el desplazamiento y la velocidad del espejo y la frecuencia Doppler medida recurrimos al método de las imágenes de la óptica geométrica⁽¹⁾. Para ello sustituiremos las ondas planas de la fuente por un punto fuente a una distancia finita x_0 del espejo a tiempo $t=0$. Al otro lado del espejo se formará un punto imagen, también a distancia x_0 del mismo. A partir de la figura 1 podemos ver que cuando el espejo se mueve hacia la fuente a una velocidad constante v , la distancia del espejo a la fuente puede expresarse como $d = x_0 - vt$ (en la figura esta posición se muestra como Espejo'), por lo que la distancia de la nueva imagen al espejo también será d . Como la luz viaja hacia al espejo y vuelve, la distancia total recorrida será $2d = x_{f-i}$. Esto es equivalente a la distancia relativa entre el punto fuente y su imagen (nótese que a través de este análisis el espejo puede ser eliminado y, en lugar de tener el espejo acercándose a la fuente estacionaria a una velocidad v , el punto imagen, que actúa como una nueva fuente, se acerca a la fuente en el sistema del laboratorio a una velocidad relativa u).

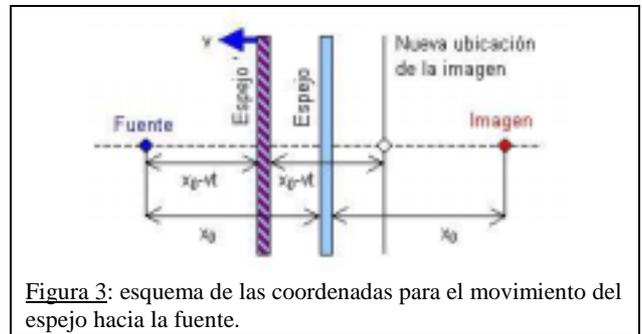


Figura 3: esquema de las coordenadas para el movimiento del espejo hacia la fuente.

Resumiendo lo expresado anteriormente, tenemos que la velocidad relativa entre la fuente y su imagen puede expresarse como:

$$u = \frac{dx_{f-i}}{dt} = -2v \quad (\text{Ec. 10})$$

donde el signo negativo indica que el espejo se acerca a la fuente para valores positivos de v .

Por lo tanto, si reemplazamos este resultado en la ecuación 9 obtenemos la siguiente expresión para la intensidad:

$$I(t) = I_0 \left[1 + \cos^2 \left(sg(v) \frac{v\omega}{c} t + \frac{2\pi}{\lambda} A_0 f(t) + \varphi_0 \right) \right] \quad (\text{Ec. 11})$$

Es importante la inclusión de la función signo de v ($sg(v)$) como factor ya que el signo de la

velocidad se invierte según el espejo esté acercándose o alejándose de la fuente.

Utilizando la relación $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, podemos

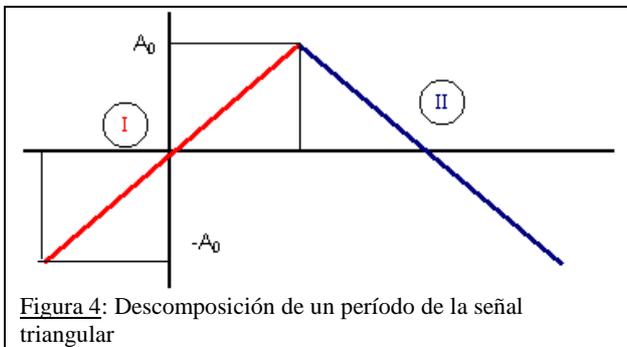
reescribir la ecuación 11 como:

$$I(t) = I_0 \left[1 + \cos^2 \left(sg(v) \frac{v\omega}{c} t + \frac{\omega}{c} A_0 f(t) + \varphi_0 \right) \right] \quad (\text{Ec. 12})$$

por lo tanto la expresión final para el argumento del coseno es:

$$\frac{\varphi'}{2} = \varphi_0 + \omega \left(sg(v) \frac{v}{c} t + \frac{A_0 f(t)}{c} \right) \quad (\text{Ec. 13})$$

Un período de la señal triangular puede descomponerse en dos partes, según se muestra en la figura 4



A partir de la figura anterior, $A_0 f(t)$ se puede escribir como:

En I) $A_0 f(t) = v \cdot t$

En II) $A_0 f(t) = 2x_0 - v \cdot t$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación 13 puede verse que quedan definidos dos desfases diferentes, dependiendo del sentido de movimiento del espejo:

$$\varphi'_{(I)} = 2\omega \frac{v}{c} t + \varphi_0 \quad (\text{Ec. 14})$$

$$\varphi'_{(II)} = -2\omega \frac{v}{c} t + \delta_0 + \varphi_0$$

donde $\delta_0 = 4\omega x_0 / c$

Por lo tanto, utilizando la relación $f = 2\pi\omega$, la frecuencias Doppler pueden expresarse cómo:

$$f_{D(I)} = 2f \frac{v}{c}$$

$$f_{D(II)} = -2f \frac{v}{c}$$

Si reemplazamos $v/f = v/\lambda$ en la ecuación anterior nos quedan las siguientes expresiones:

$$f_{D(I)} = 2 \frac{v}{\lambda} \quad (\text{Ec. 15})$$

$$f_{D(II)} = -2 \frac{v}{\lambda}$$

Arreglo experimental

El arreglo experimental se ilustra en la figura 5.

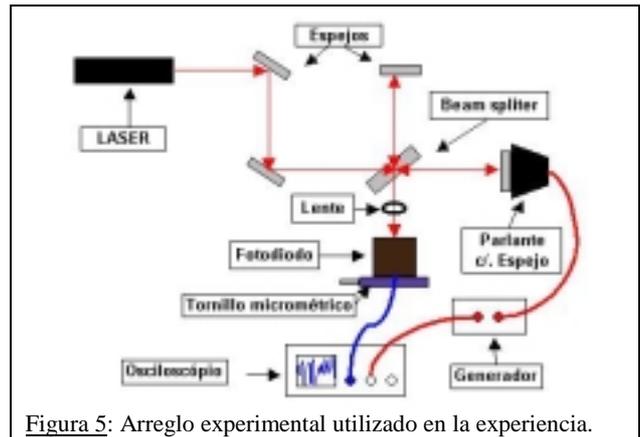


Figura 5: Arreglo experimental utilizado en la experiencia.

Se hace incidir el haz de un LASER de He-Ne ($\lambda=632.8 \text{ nm}$) sobre un par de espejos de forma tal que permita calibrar correctamente el interferómetro de Michelson. Uno de los brazos del interferómetro está fijo, en cambio el otro fue adherido a un parlante, el cual es excitado con una señal triangular; es importante que este espejo sea liviano de forma tal que no modifique las oscilaciones del parlante.

Al recombinarse los dos haces provenientes de ambos espejos, en el Beam-Splitter, estos se interfieren. Para poder apreciar mejor el fenómeno se colocó una lente que permite aumentar el tamaño de las franjas de interferencia. La intensidad de las franjas es medida con un fotodiodo conectado a un osciloscopio digital, con sistema de adquisición de datos.

Realizamos un barrido de frecuencias entre los 8 Hz y 225 Hz aproximadamente, tratando de mantener constante la amplitud de la señal.

Resultados y discusión

En la figura 6 se grafica la señal de alimentación del parlante y la intensidad medida por el fotodiodo en función del tiempo.

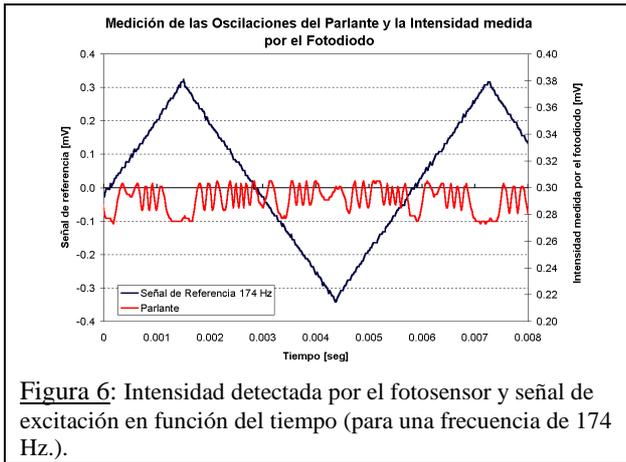


Figura 6: Intensidad detectada por el fotosensor y señal de excitación en función del tiempo (para una frecuencia de 174 Hz.).

Se obtuvieron gráficos similares para cada una de las frecuencias de excitación del parlante. A partir de una simulación realizada con el MS Excel de la intensidad medida por el fotosensor se calculó el corrimiento Doppler de cada una de las frecuencias medidas (Figura 7).

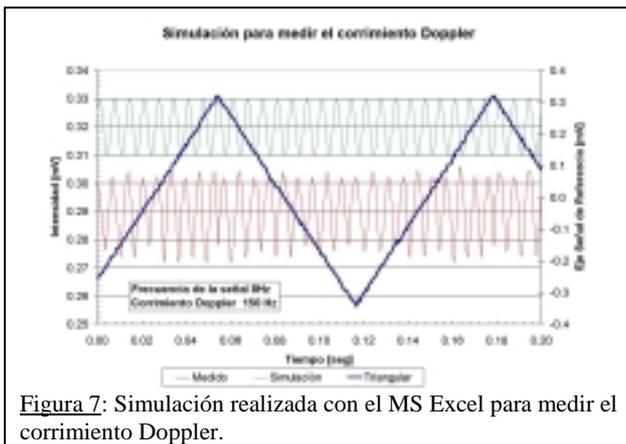


Figura 7: Simulación realizada con el MS Excel para medir el corrimiento Doppler.

Para calcular la velocidad de oscilación del espejo se calculó el desplazamiento en nm del parlante según la siguiente ecuación⁽⁴⁾:

$$x[nm] = 2.2143 x[mV] + 68.928 \quad (\text{Ec. 16})$$

A partir de la ecuación anterior obtuvimos el desplazamiento total del parlante. Luego, para calcular la velocidad dividimos cada valor obtenido de desplazamiento por el semi-período de la señal de excitación:

$$v = \frac{x[nm]}{\tau/2} = 2 \cdot f_{fuente} \cdot x[nm]$$

Con los corrimientos Doppler y las velocidades obtenidas realizamos un análisis para ajustar las mediciones.

En primer lugar realizamos una regresión lineal de los datos en un gráfico de f_D vs $v \cdot f/c = v/\lambda$ (Figura 8)

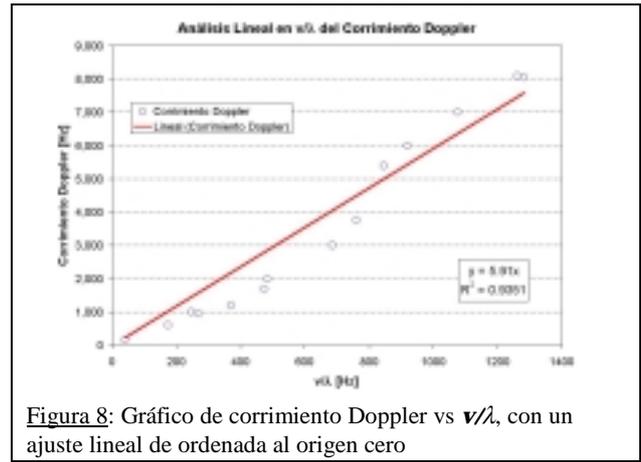


Figura 8: Gráfico de corrimiento Doppler vs v/λ , con un ajuste lineal de ordenada al origen cero

Para poder comparar los datos medidos con el modelo teórico de la ecuación 15 a primer orden, elegimos la ordenada al origen como cero. En el gráfico anterior obtuvimos la pendiente 5.91 ± 0.03 .

A partir de la ecuación 15 puede observarse que obtendríamos una relación lineal entre f_D y $f \cdot v/c$ (o análogamente v/λ) con un valor para la pendiente de 2 y ordenada al origen 0. Sin embargo, puede verse en la figura 8 que, si bien el parámetro obtenido es del mismo orden que el esperado, éste es tres veces mayor. Por otro lado se puede ver que nuestras mediciones no siguen un comportamiento lineal; aunque el coeficiente R^2 de nuestro ajuste es cercano a 1.

Conclusiones

En la figura 8, se observa que los valores medidos no se ajustan correctamente a una regresión lineal en v/c como predice la teoría a primer orden.

Debido a la sensibilidad del interferómetro de Michelson⁽⁴⁾ ($\sim 60\text{nm}$), el patrón de interferencia es muy susceptible a pequeños cambios en el ámbito de medición; por ello, para mejorar el coeficiente de la regresión lineal, proponemos medir en un lugar libre de movimientos ajenos al sistema.

Faltaría analizar y concluir que sucedería si hacemos las simulaciones sin el término correspondiente al efecto Doppler dentro del argumento del coseno cuadrado. A partir de ahí podremos decir si los efectos que estamos viendo en los gráficos se deben o no a contribuciones de este efecto.

Apéndice

Algunas aplicaciones

Son muchas y variadas las aplicaciones que hacen uso del LDV y del corrimiento Doppler. Tal vez los más cotidianos son los radares Doppler que se utilizan para el control del tránsito, ya que permiten medir la velocidad de los vehículos ⁽⁵⁾. Otros tipos de radares Doppler son utilizados en las ciencias meteorológicas para identificar las condiciones climáticas y detectar y prevenir posibles tormentas y tornados ^{(6), (7)}.

En medicina se utiliza un LDV para medir con alta resolución el flujo sanguíneo en arterias delicadas como la femoral y coronaria ⁽⁸⁾.

Debido a la gran sensibilidad del interferómetro de Michelson se utiliza este dispositivo para medir pequeñas oscilaciones ⁽⁹⁾ y como sismógrafo ⁽¹⁰⁾.

Además, esta técnica se puede utilizar para determinar curvas de resonancia de sistemas oscilatorios, como por ejemplo piezoeléctricos.

Referencias

- (1) R.H. Belansky y K.H. Wanser, Am. J. Phys. **61**, 1014 (1993).
- (2) D. Halliday y R. Resnick, *Física*, Vol II, (CECSA, México, 1979), pág. 1403-1405.
- (3) T.J. Belich, R.P. Lahm, R.W. Peterson y C.W. Whipple, Am. J. Phys. **65**, 186 (1997).
- (4) D. Tobia y M.E. Saleta, *Estudio de las oscilaciones de un parlante utilizando un interferómetro de Michelson*, Informe de Laboratorio 5, FCEN – UBA – 2° Cuatrimestre 2001.
- (5) www.detectoresderadar.com. Página del fabricante del radar de tránsito Escort 8500, donde se describen las características y funcionamiento del mismo.
- (6) weather.com/espanol. Página del canal "The Weather Channel" en la cual se describen las aplicaciones de los radares meteorológicos.
- (7) A.L. Garza et al, "*Beneficio de estudios climatológicos y de condiciones del tiempo ...*", publicado en la página oficial del CONACYT de México.
<http://info.main.conacyt.mx>
- (8) H. Nishihara, et al, Appl. Opt. **21**, 1785 (1982)
- (9) J.B. Diamond, et al, Am. J. Phys. **58**, 919 (1990).
- (10) G. Da Costa, G. Kiedansky y R. Siri, Am. J. Phys. **56**, 993 (1988).