Estudio de la estadística del decaimiento radiactivo

L. CIOCCI BRAZZANO; G. ACUÑA
Lilgi@uole.com - Mpontiac87@hotmail.com

Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - *Laboratorio 5 – 2do. Cuatrim. 2001*

Estudiamos la estadística del decaimiento radiactivo. Analizamos varios intervalos temporales, y utilizando un método de prueba de hipótesis, mostramos que este sigue una estadística de Poisson, con un nivel de significación del 97.5%. También construimos un gráfico de esperanza en función de la varianza para los datos de la muestra, encontrando que estos siguen una relación lineal, y la recta que mejor ajusta es una con pendiente cercana a la unidad, y la ordenada al origen cercana a cero, lo que era de esperar para una distribución poissoniana, cuya varianza y esperanza deben ser iguales.

I. Introducción

En general, los núcleos de los distintos elementos no son estables. Emiten espontáneamente partículas cargadas y radiación electromagnética. Este fenómeno se conoce como radiactividad natural, y fue descubierto accidentalmente en 1896 por Henri Becquerel.

Los núcleos excitados se desexcitan mediante tres tipos de decaimiento: *alfa*, consiste en la emisión de una partícula alfa o átomos de helio doblemente ionizados; *beta* consiste en la emisión de partículas beta, electrones o positrones; y *gamma*, cuando la desexcitación se lleva a cabo mediante la emisión de radiación electromagnética.[1]

La desintegración radiactiva es un fenómeno naturalmente estadístico. Las hipótesis con las cuales se trabaja para el estudio de las desintegraciones radiactivas, cuya validez está corroborada por la experiencia, son[2]

- Dado un intervalo temporal, todos los átomos de una muestra tienen la misma probabilidad de desintegrarse en dicho intervalo.
- La desintegración de un átomo es un evento independiente de la desintegración de los demás átomos de la muestra.
- La probabilidad de desintegración de un átomo en un dado intervalo temporal permanece constante para todo intervalo temporal de la misma duración.

Basados en estas hipótesis, es posible esperar que el número de desintegraciones radiactivas que se observan en un determinado lapso de tiempo sufran fluctuaciones estadísticas alrededor de un valor medio. Las fluctuaciones en el número de desintegraciones están representadas por una *distribución de Poisson*,

$$P(k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!} \qquad (1)$$

Esta distribución expresa la probabilidad P(k) de que en un dado intervalo se observe un número entero k de desintegraciones, siendo α el número de desintegraciones predicho. Este tipo de distribución tiene como característica que el valor medio y la varianza son ambos iguales al parámetro α.

El objetivo de nuestro trabajo es determinar si el decaimiento radiactivo sigue efectivamente una ley de distribuciones de Poisson, por medio de una docimasia de hipótesis.

II. Experiencia

Para el desarrollo de esta experiencia dispusimos del arreglo experimental esquematizado en la figura 1. El dispositivo experimental consta de una cámara de plomo, que impide la salida de la radiación de su interior; un detector, que detecta la ocurrencia de desintegraciones provenientes de la muestra; un amplificador y un analizador.

Con el fin de estudiar la distribución del número de decaimientos radiactivos, colocamos una muestra de cesio dentro del blindaje de plomo, y registramos el número de decaimientos producidos en un dado intervalo de tiempo. Para poder hacer un estudio estadístico, es necesario tener un número suficientemente grande de mediciones, para lo cual se dispone de un analizador multicanal, que permite repetir el procedimiento de medición en una cantidad de canales prefijada. En nuestro caso utilizamos entre 500 y 1024 canales. El mismo procedimiento también se llevó a cabo para distintos intervalos temporales. Los intervalos de tiempo de muestreo estudiados fueron desde los microsegundos hasta los segundos.

Debido a la existencia de otras fuentes de radiación ajenas a la fuente, como ser radiactividad residual contaminante en los materiales de construcción del detector, radiación cósmica y radiactividad del ambiente, conocidos como *efecto cero* o *actividad de fondo*, es necesario eliminar esto efectos no deseados de la medición. Esta determinación del efecto cero, se lleva a cabo mediante la medición del número de decaimientos radiactivos medidos por el detector en ausencia de la fuente de radiación. El valor medio de esta magnitud, multiplicado por un factor de escala (que está relacionado con el tiempo de integración de la medición del ruido y la medición que se desea corregir), se resta a cada medición.

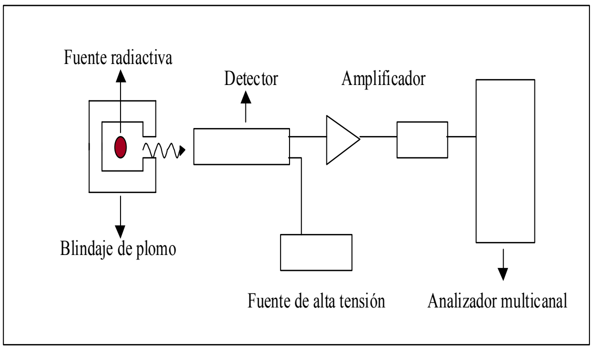

Figura 1: Esquema del dispositivo experimental.

III. Análisis de datos

Para decidir si la distribución en los valores de las cuentas radiactivas es una distribución de Poisson apelamos a una docimasia de hipótesis. Según la prueba de bondad de ajuste desarrollada por K. Pearson[3], la hipótesis sobre la distribución será rechazada siempre que

$$D^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} > C \qquad (2)$$

El procedimiento general para determinar si la distribución $X_1,..., X_n$ representa una muestra de una variable aleatoria con una distribución completamente especificada es

1. *Dividir la recta real en k intervalos mutuamente excluyentes,* $A_1,...., A_n$.
2. *Sea* $p_{i0}=P(A_i)$. *Estos valores se pueden calcular, puesto que la hipótesis especifica completamente la distribución.*
3. *Calcular* D^2*(ver ecuación (1)) y rechazar la hipótesis si* $D^2>C$, *donde C se obtiene, a un nivel de significación* α*,como* $C = \chi^2_{k-1,1-\alpha}$..

Para poder determinar si la hipótesis de que el decaimiento radiactivo sigue una estadística poissoniana utilizando este método de docimasia de hipótesis, hicimos una programa en C (ver Apéndice) que calcula el valor de D^2, dado un número de intervalos fijados de acuerdo con cada caso en particular, así como también los valores de máximo; mínimo; varianza; esperanza; la posición de los centros de cada intervalo estadístico y la frecuencia de decaimientos en cada intervalo. Aplicamos este programa a cada juego de datos obtenidos para todos los intervalos temporales estudiados. Con los datos obtenidos de este programa, construimos histogramas (ver figura 2), graficamos la varianza en función del número medio de cuentas (ver figura 3), esperando encontrar un recta de pendiente uno, ya que si la estadística que siguen los decaimientos radiactivos es poissoniana, la varianza y la esperanza de las muestras deberían coincidir

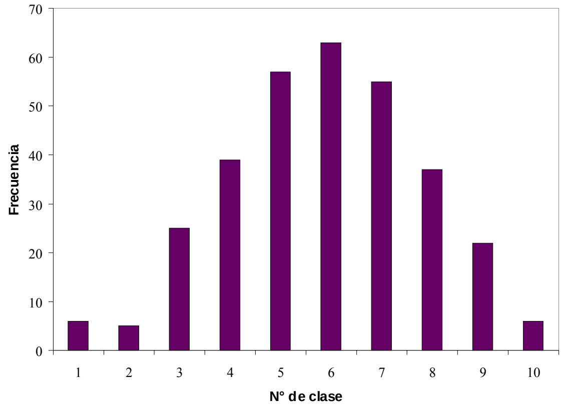

Figura 2: Frecuencia en función del índice de clase (representa el centro de cada clases tomadas).

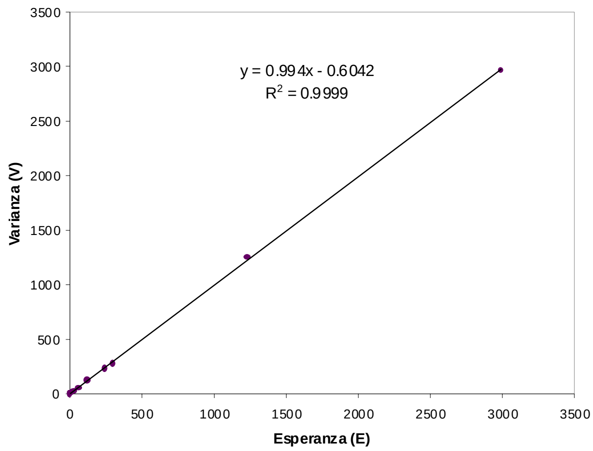

Figura 3: Varianza en función de esperanza para los distintos intervalos temporales analizados. Datos correspondientes a la tabla 1.

Tabla 1: Datos obtenidos para las distintas muestras. T representa el tiempo de integración, E la esperanza, V la varianza, D^2 el parámetro calculado mediante la ecuación (2), y χ^2 es el valor de la distribución chi cuadrada, con parámetro $\alpha = 0.05$, y k número de intervalos estudiados para cada muestra[1].

T(ms)	E	V	D^2	χ^2	k
0.4	1.193	1.20	0.407	11.143	5
2	5.940	6.08	2.380	11.143	5
8	24.835	24.72	9.890	19.023	10
10	29.94	29.40	5.660	19.023	10
20	59.54	56.18	3.727	19.023	10
40	119.80	121.82	7.154	19.023	10
80	238.94	233.06	10.011	19.023	10
100	298.87	279.59	22.116	19.023	10
400	1232.63	1251.06	6.374	19.023	10
1000	2992.48	2964.80	7.120	19.023	10

Conclusiones

Medimos un número estadísticamente grande de veces la cantidad de decaimientos radiactivos producidos en una muestra de cesio, para distintos intervalos de tiempo de integración, y corregimos el efecto cero en los datos tomados.

Mediante la prueba de bondad de ajuste desarrollada por K. Pearson, determinamos que los decaimiento radiactivo sigue una estadística poissonianna, con un nivel de significación del 97.5%. Desarrollamos para ello un programa en C que permite comparar el valor de D^2, con el correspondiente valor de la distribución $= \chi^2_{k-1,1-\alpha}$.,con un nivel de significación α y un número k de intervalos estadísticos. Encontramos que cuanto mayor el tiempo de integración, mejor era el estudio estadístico, debido al aumento (respecto de los menores tiempos de integración) en el número de decaimientos registrados por el detector.

También mostramos, mediante un gráfico de varianza en función de esperanza, que ambos valores siguen una relación lineal, siendo la recta que mejor ajusta los valores obtenidos una con pendiente 0.994±0.004 y ordenada –0.604. Este resultado concuerda con la hipótesis de una distribución poissoniana en el número de decaimientos radiactivos producidos en la muestra, ya que esta relación entre la varianza y la esperanza de los valores es lineal de pendiente uno y ordenada al origen nula.

[1] El valor de χ^2, con parámetros α y k se obtuvo de tablas[3]

Referencias

[1] R.H Rodríguez Pasqués; " Introducción a la tecnología nuclear"; Eudeba Manuales; 1978.
[2] H.A. Enge, M.R. UER, J.A. Richards; "Introduction to atomic physics"; Addison-Wesley Publishing Company; 1973.
[3] P.L. Meyer; "Probabilidad y aplicaciones estadísticas"; Fondo Educativo Interamericano; 1973.

Apéndice

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include <limits.h>

double poisson(float, int);
double factorial(int);
double factolog(int);

main()
{
FILE *fp;
char *nombre, *salida;
int i, j, n, k, min, max, nclases, *cuentas, aux;
float dx, varianza, xm, *clases, *centros;
double *pclase, d, c;

nombre = (char *) calloc(100, sizeof(char));
salida = (char *) calloc(100, sizeof(char));

printf("Decime el nombre del archivo Li: ");
scanf("%s", nombre);
printf("Decime el numero de clases Li: ");
scanf("%i", &nclases);
printf("Decime el valor de chi cuadrado Li: ");
scanf("%lf", &c);
printf("Decime el nombre del archivo de salida Li: ");
scanf("%s", salida);

fp = fopen(nombre,"r");
{
/*** Calculo de maximos y minimos ***/

for (i = 0; i < 4; i++)
  fscanf(fp, "%*[^\n]\n");
cuentas = (int *) calloc(1624,sizeof(int));
```

```
j = 0;
while (i != EOF)
{
  i = fscanf(fp,"%*i %i %*i\n", &aux);
  if (i != EOF)
  {*(cuentas+j)=aux;
  j++;
}
}
n = j;

max = 0;
min = INT_MAX;
for (i = 0; i < n; i++)
{
  if (max < *(cuentas+i))
  max = *(cuentas+i);
  if(min > *(cuentas+i))
  min = *(cuentas+i);
}
  printf("max = %i\n", max);
  printf("min = %i\n",min);
  printf("nclases = %i\n",nclases);
}
fclose(fp);


/*** division en clases***/

clases = (float *) calloc(nclases,sizeof(float));
centros = (float *) calloc(nclases, sizeof(float));
dx = ((float)(max - min)) / nclases;
            printf ("dx =%f\n", dx);
for (i = 0; i < nclases; i++)
  *(centros+i) = dx / 2 + i * dx + min;

for (i = 0; i < n; i++)
{
  k = floor((*(cuentas+i) - min) / dx);
  if (k == nclases)
             k--;
  *(clases + k) += 1;
}

/*** calculo de varianza ***/

xm = 0;

for ( i = 0; i < n; i++)
{
xm += *(cuentas + i);
```

```
}
xm = xm / n;

varianza = 0;

for(i =0; i<n; i++)
{
varianza += (*(cuentas +i)-xm)*(*(cuentas +i)-xm);
}
varianza /= (n - 1);


/*** test de hipotesis ***/

pclase = (double *) calloc(nclases, sizeof(double));

for(i = min; i <= max; i++)
{
j = floor((i - min) / dx);
if (j == nclases)
            j--;
*(pclase + j) = *(pclase + j) + poisson(xm, i);

}

d = 0;
for (i = 0; i < nclases; i++)
{
  if (*(pclase+i) != 0)
           d += (*(clases+i) - n * *(pclase+i)) * (*(clases+i) - n * *(pclase+i))/ (n * *(pclase+i));
}

if (d < c)
printf("Que lindo!!!!!\n");
else
printf("Seguí participando\n");

fp = fopen(salida,"w");
fprintf(fp, "Maximo = %i\n", max);
fprintf(fp, "Minimo = %i\n", min);
fprintf(fp, "Valor medio = %f\n", xm);
fprintf(fp, "Varianza = %f\n", varianza);
fprintf(fp, "Valor de chi cuadrado = %lf\n", c);
fprintf(fp, "Valor de D cuadrado = %lf\n", d);
fprintf(fp, "Cuentas, Frecuencia\n");
for (i = 0; i < nclases; i++)
  fprintf(fp, "%f %f\n", *(centros+i), *(clases+i));
fclose(fp);
  getch();
          while (!kbhit()){};
          getch();
```

```
 return 0;

}




double poisson(float alfa, int k)
{
  double f;
  if (k < 100)
  f = exp(-alfa) * pow(alfa,k) / factorial(k);
  else
  {f  = -alfa + k * log(alfa) - factolog(k);
          f = exp(f);
  }
  return f;
}

double factorial(int k)
{
  int i;
  double f;

  f = 1;
if (k > 1)
{
  for(i = 2; i <= k; i++)
            f = f * i;
}
  return f;
}

double factolog(int k)
{
int i;
double f;

f = 0;
if (k > 1)
{
for(i = 1; i <= k; i++)
f += log(i);
}
return f;
}
```