

# Estudio de la dinámica no lineal de un péndulo

Lorena Sigaut<sup>1</sup>  
Pablo Knoblauch<sup>2</sup>

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires

Se estudió el comportamiento de un péndulo sometido a una fuerza magnética repulsiva y a una excitación periódica. Mediante variaciones en los parámetros del dispositivo se observaron varios fenómenos: movimiento caótico, ciclos límite, duplicación del período, resonancia, saltos de amplitud e histéresis.

Se resolvieron numéricamente las ecuaciones que modelan la dinámica del péndulo y por último, se modeló el potencial debido a la fuerzas magnética y gravitatoria.

## I. Introducción

Muchas situaciones en la física son cautivantes debido a su simplicidad, y lo son más cuando se introduce una pequeña variación al sistema en estudio. De eso se trata este informe: un péndulo físico al que se lo somete a una fuerza magnética repulsiva y a una excitación periódica. El “universo” que se descubre es sólo una parte de toda una especialidad de la dinámica no lineal.

En la sección II se explica el dispositivo experimental y se hace referencia a los métodos de adquisición de datos.

La sección III se refiere al modelo matemático utilizado; se muestran las ecuaciones que rigen el movimiento del péndulo. En ella se pueden apreciar los distintos comportamientos del sistema. En la sección IV se muestran los resultados experimentales. En la sección V se estudiaron los saltos de amplitud y la curva de histeresis.

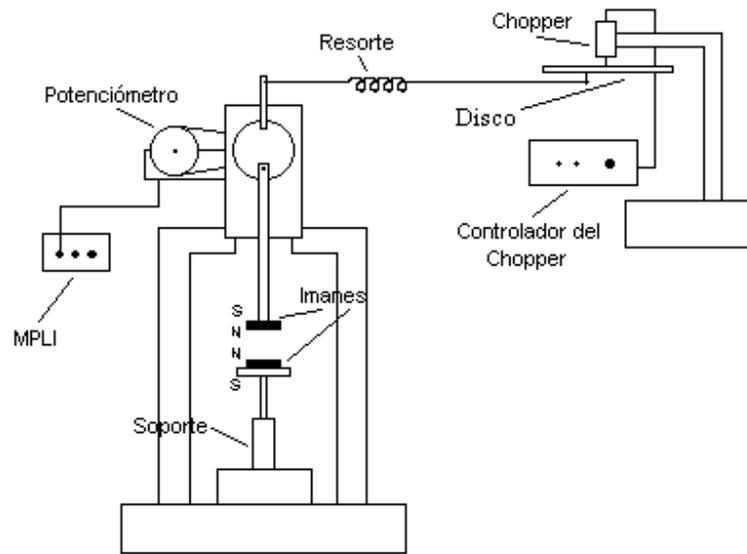
Las secciones VI y VII contienen modelos teóricos del problema. Mientras que en la sec. VI se resuelven numéricamente las ecuaciones planteadas en la sec. III; en la sec. VII se reformulan las ecuaciones utilizando un potencial magnético-gravitatorio que proviene de los datos experimentales.

## II. Dispositivo experimental

El dispositivo experimental consiste en una barra de acero de 30,5 cm de largo y de masa 378,63gr adosada a un disco que puede girar libremente. En el extremo inferior de la barra se encuentra un imán que se enfrenta a otro unido a un soporte. Mediante una correa de goma conectamos al disco un potenciómetro. Con éste obtenemos un voltaje proporcional al desplazamiento angular. Mediante una sencilla relación lineal se puede obtener la posición angular del péndulo en función del tiempo en radianes (ver fig. 1)

Los voltajes del potenciómetro los recolectamos con el Multi Purpose Laboratory Interface (MPLI). Con el mismo programa se calculó la velocidad angular y la transformada de Fourier de la serie temporal de la posición, dando el espectro de frecuencias.

Para brindarle energía al sistema y así evitar que las oscilaciones decaigan rápidamente se colocó, opuesta a la barra, una placa de metal a la que le unimos un hilo tanza con un resorte. El otro extremo del hilo esta atado a un disco que gira con una frecuencia determinada por un chopper. De esta forma se aplica una fuerza al sistema, que suponemos periódica. Calibrando el chopper se obtiene la frecuencia de esta fuerza en hertz.



**Figura 1:** Esquema del dispositivo experimental

### III. Modelo matemático

Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son la gravitatoria, la de amortiguamiento, la magnética y una fuerza periódica con la cual se excita el sistema.

El término de la fuerza de amortiguamiento se supone proporcional a la velocidad angular del péndulo ( $\dot{\omega}$ ). Se considera a los imanes como puntuales y a la fuerza magnética como a una fuerza repulsiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre imanes, de la forma:

$$F_m = \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r_\theta^2}$$

Donde  $m_1$  y  $m_2$  son los momentos magnéticos de los imanes, en este caso se utilizaron dos imanes iguales por lo tanto  $m_1 = m_2$ ,  $\mu_0$  es la permeabilidad en el vacío y  $r_\theta$  es la distancia entre imanes. De la figura 2 se observa que:

$$r_\theta = \sqrt{(L \sin \theta)^2 + h_\theta^2}$$

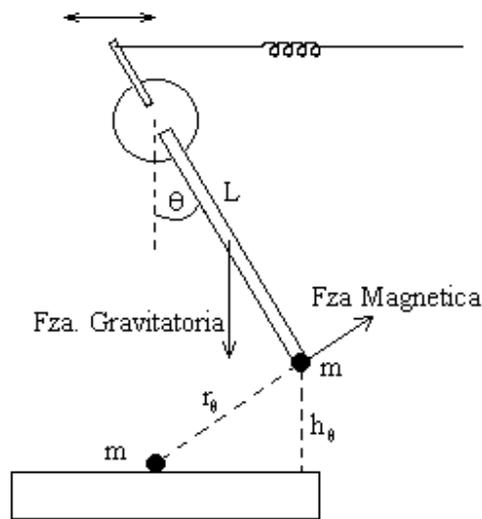
$$h_\theta = d + L(1 - \cos \theta)$$

Donde  $L$  es el largo del péndulo y  $d$  la mínima distancia entre imanes.

La fuerza con la que se excita al sistema se la puede pensar como una fuerza elástica (debido a la presencia del resorte) pero donde la distancia varía periódicamente en el tiempo (debido al movimiento del disco). Esto se puede suponer únicamente si la distancia entre el péndulo y el disco es grande. Resultando una fuerza de la forma:

$$F_e = -kx_0 \sin(\Omega t)$$

Donde  $k$  es la constante del resorte,  $x_0$  es la amplitud de la distancia que hay entre el centro del disco hasta donde se encuentra atado el hilo que excita al péndulo y  $\Omega$  es la frecuencia con la que se fuerza al sistema.



**Figura 2:** Esquema de fuerzas y variables utilizadas

Usando la segunda ley de Newton:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum T$$

Siendo  $I$  el momento de inercia del péndulo y el segundo término corresponde a la sumatoria de los torques que actúan sobre el mismo.

La ecuación de movimiento queda de la forma<sup>3</sup>:

$$\frac{ML^2}{3} \omega' = -\frac{L}{2} M g \sin \theta + T_e \sin \Phi - \gamma \omega + \frac{|\theta|}{\theta} L \frac{\mu_0 m_1^2}{4\pi r_\theta^2} \times \cos \left( |\theta| + \arctan \left( - \left| \frac{h_{\beta\theta}}{L \sin \theta} \right| \right) \right) \quad (1)$$

$$\theta' = \omega$$

$$\Phi' = \Omega$$

Donde  $M$  es la masa del péndulo,  $g$  la aceleración gravitatoria,  $T_e$  es el torque producido por la fuerza periódica,  $\Phi$  y  $\Omega$  son la fase y la velocidad angular de la fuerza periódica respectivamente y  $\gamma$  el coeficiente de amortiguamiento.

Escrita de una forma más simple:

$$\omega' = -A \sin \theta + B \sin \Phi - C \omega + \frac{|\theta|}{\theta} \frac{D}{r_\theta^2} \times \cos \left( \left| \theta \right| + \arctan \left( - \left| \frac{h_{\beta\theta}}{L \sin \theta} \right| \right) \right) \quad (2)$$

$$\theta' = \omega$$

$$\Phi' = \Omega$$

Donde A, B, C y D son parámetros que dependen de las constantes físicas del experimento. Se estimaron dichas constantes y se calcularon los parámetros para nuestro sistema obteniendo:

$$\begin{aligned} A &= 48,2 \text{ 1/s}^2 \\ B &= 1,33 \text{ 1/s}^2 \\ C &= 0,00979 \text{ 1/s} \\ D &= 0,0213 \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

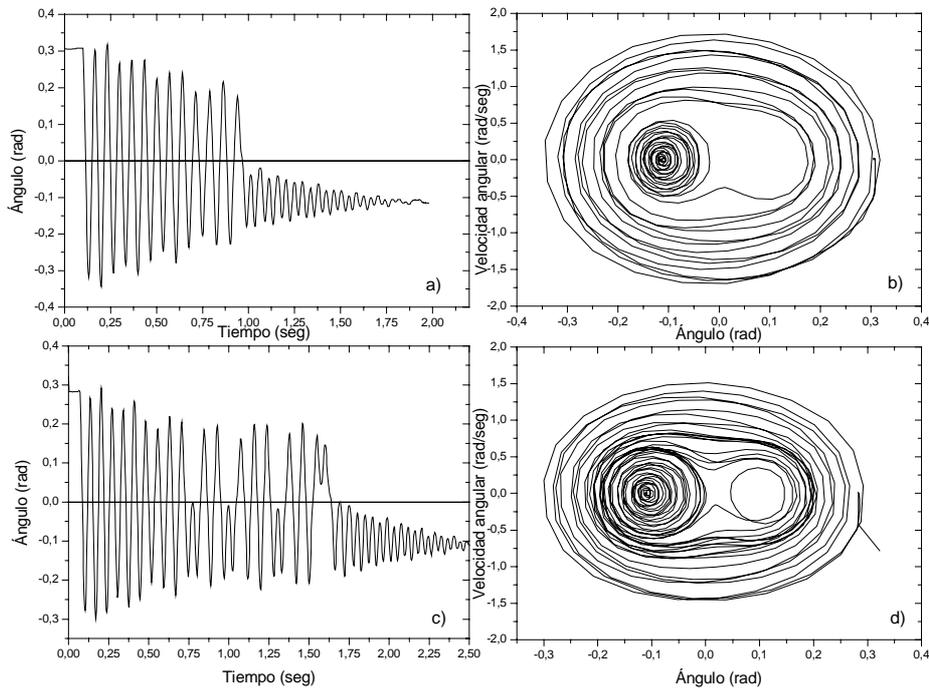
#### IV. Desarrollo experimental

Una vez armado el dispositivo experimental se realizaron mediciones variando los parámetros: frecuencia de la fuerza periódica ( $\Omega$ ) y distancia mínima entre los imanes ( $d$ ). De cada medición se obtuvieron los gráficos de la posición angular en función del tiempo, el diagrama de fase y el espectro de frecuencias.

Un ejemplo del movimiento del péndulo se encuentra en la figura 3. Para dicha secuencia se utilizaron los parámetros  $d=2,92\text{cm}$  y  $\Omega=0,64\text{Hz}$ . El sistema posee dos atractores, que en principio se consideran simétricos. Hay que destacar que el sistema no posee puntos fijos ya que siempre es excitado por la fuerza periódica.

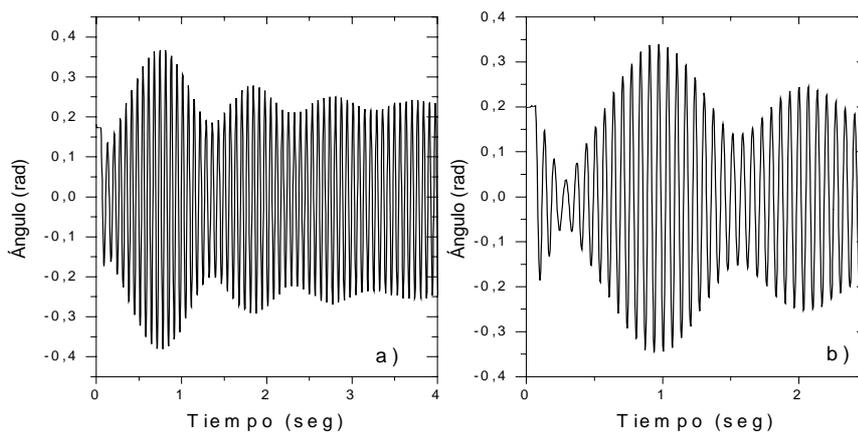
El gráfico de la figura 3.a) corresponde a la serie temporal de una medición realizada con condiciones iniciales:  $\theta(0)=0,302 \text{ rad}$ ,  $\omega(0)=0$  y  $\Phi(0)=0$ ; y el b) a su diagrama de fases. En dichos gráficos se observa que el sistema oscila alrededor del ángulo cero hasta que se queda atrapado en uno de los atractores. Para la medición graficada en la fig 3.c) y 3.d) se cambió ligeramente la condición inicial:  $\theta(0)=0,285\text{rad}$ ,  $\omega(0)=0$  y  $\Phi(0)=0$ . Vemos que el sistema oscila de un atractor a otro aleatoriamente hasta que finalmente queda atrapado en uno de ellos.

Esta es una de las características más representativas de un sistema caótico: una pequeña variación de las condiciones iniciales significa un cambio significativo en la solución (si bien en el caso descrito la solución estacionaria es la misma hay un período transitorio caótico).



**Figura 3:** Medición realizada con  $d=2,92\text{cm}$ ,  $\Omega=0,64\text{Hz}$ ,  
 a) serie temporal con una condición inicial de  $\theta(0)=0,302$ ,  $\omega(0)=0$  y  $\Phi(0)=0$ .  
 c) serie temporal con una condición inicial de  $\theta(0)=0,285$ ,  $\omega(0)=0$  y  $\Phi(0)=0$ .

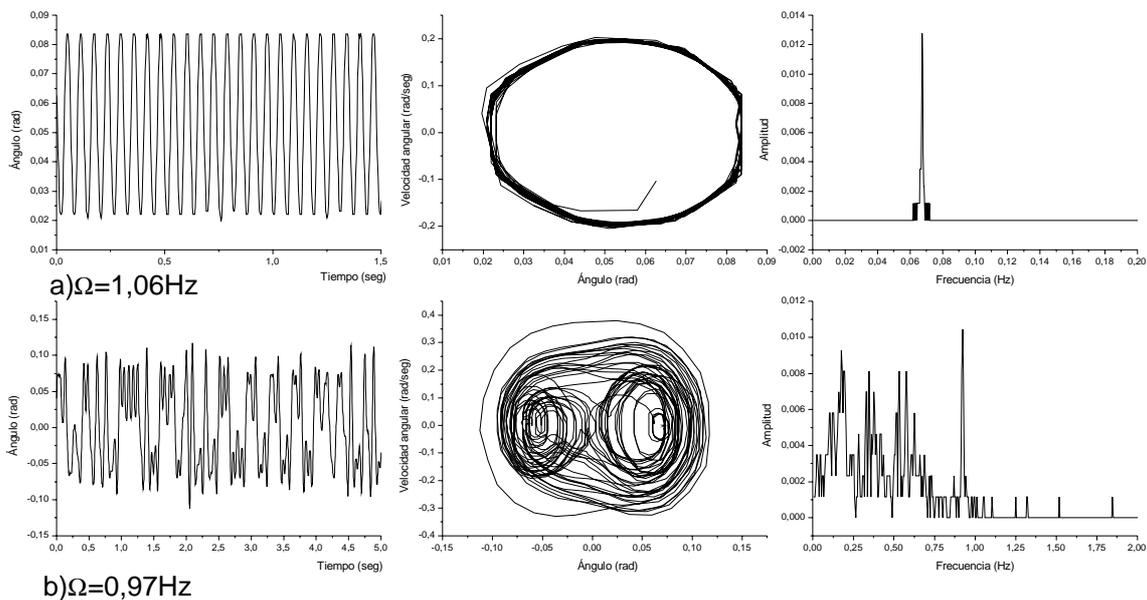
Otro fenómeno observado fue el de resonancia (figura 4). Mientras que para la mayoría de los casos la amplitud de oscilación decae a lo largo del tiempo, para ciertos valores específicos de los parámetros  $d$  y  $\Omega$  se observa un gran aumento. En los casos mostrados en la figura 4 la amplitud llega a valer prácticamente el doble de su valor inicial.



**Figura 4:** Fenómeno de resonancia  
 a) serie temporal  $d=5,36\text{cm}$  y  $\Omega =0,97\text{Hz}$   
 b) serie temporal  $d=7,84\text{cm}$  y  $\Omega =0,97\text{Hz}$

Para una mejor ilustración de los posibles comportamientos del sistema, se dejó fija la distancia mínima entre imanes en  $d = (3,17 \pm 0,05)\text{cm}$  y se procedió a variar la frecuencia de la fuerza periódica. Para cada serie de datos se graficó la serie temporal de la posición angular, el diagrama de fase y el espectro de Fourier.

Para una frecuencia de  $\Omega = 1,06\text{Hz}$ , se observa en el gráfico a) de la figura 5 el régimen estacionario, es decir, se deja evolucionar al sistema hasta que llega a una órbita periódica. El período se puede obtener del espectro de Fourier, que muestra una sola frecuencia bien definida. Al disminuir la frecuencia a  $\Omega = 0,97\text{Hz}$  (figura 5.b)) nos encontramos con un movimiento caótico, el péndulo "pasa" de un atractor a otro sin ningún patrón, en el espectro de Fourier no se encuentran frecuencias bien definidas.

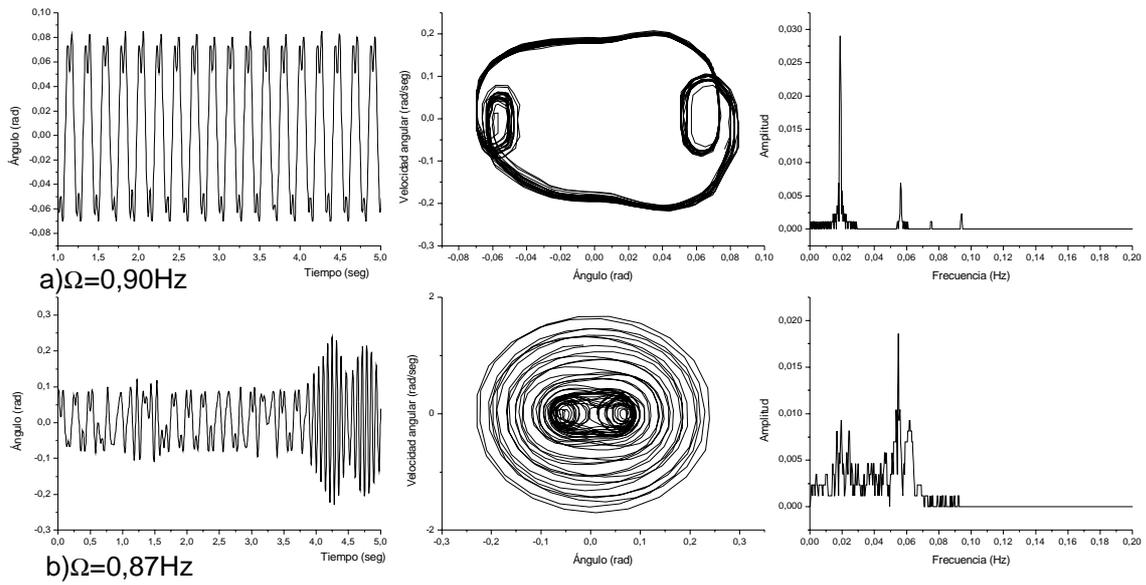


**Figura 5:** Serie de mediciones con la distancia entre imanes fija en  $d = 3,17\text{cm}$   
a) órbita periódica, b) movimiento caótico

Al disminuir la frecuencia, se vuelve a observar el régimen estacionario (figura 6.a)), para  $\Omega = 0,90$  la órbita tiene distinta forma. En el espectro de Fourier se observa la frecuencia fundamental con armónicos que tienen que ver con los "bucles" que se observan en el diagrama de fases.

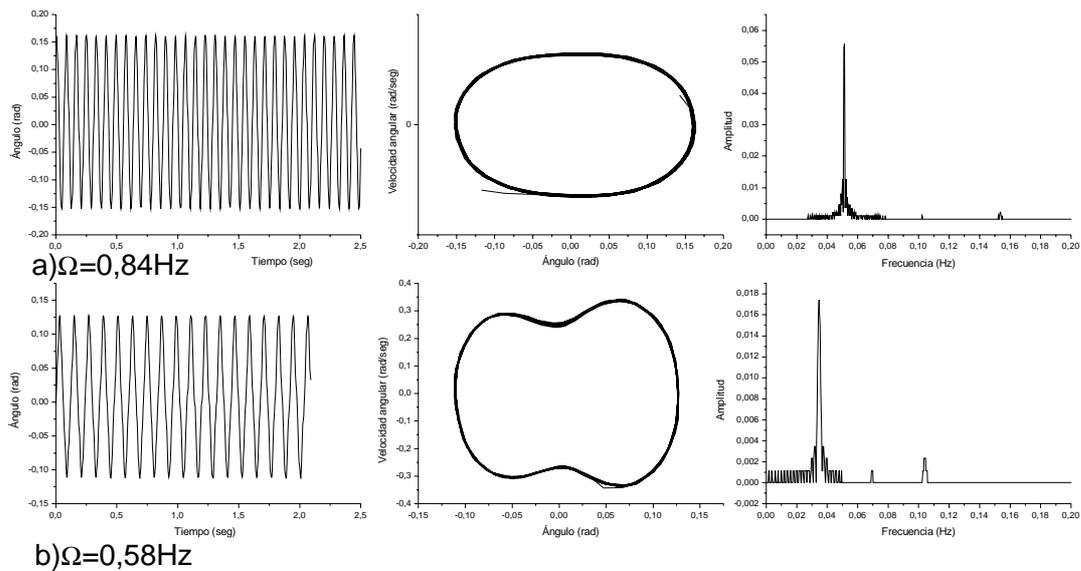
Es importante aclarar que los diagramas de fases deberían ser tridimensionales, pues el sistema consta de tres variables: el ángulo ( $\theta$ ) y la velocidad angular del péndulo ( $\omega$ ) y la fase de la fuerza ( $\Phi$ ). Como en los diagramas de fases se grafica  $\omega$  en función de  $\theta$ , es posible encontrar órbitas que se crucen en el diagrama bidimensional pero no se cruzan en el tridimensional.

Con una frecuencia de  $\Omega = 0,87\text{Hz}$  se observa el fenómeno de resonancia (figura 6.b)).



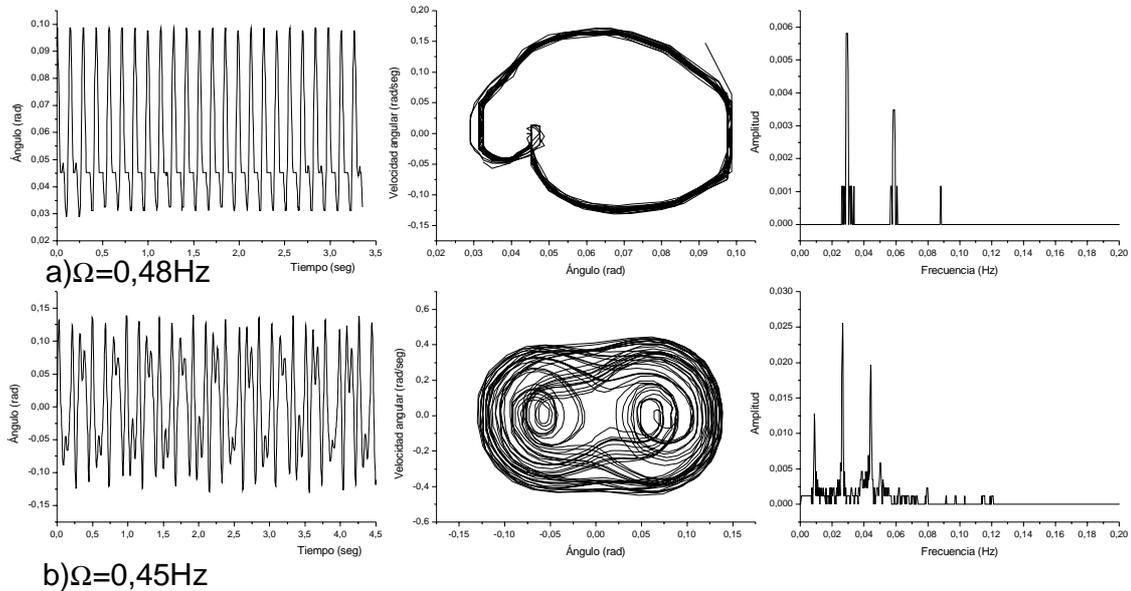
**Figura 6:** Serie de mediciones con la distancia entre imanes fija en  $d=3,17\text{cm}$   
 a) órbita periódica, b) fenómeno de resonancia

Al ir reduciendo la frecuencia  $\Omega$  se vuelven a obtener órbitas periódicas. Para  $\Omega = 0,84\text{Hz}$  está asociada una sola frecuencia ya que la órbita es ovalada (figura 7.a)) y para  $\Omega=0,58\text{Hz}$  (figura 7.b)) aparecen los armónicos de la frecuencia fundamental debido a que la órbita comienza a deformarse.



**Figura 7:** Serie de mediciones con la distancia entre imanes fija en  $d=3,17\text{cm}$   
 a),b) órbitas periódicas

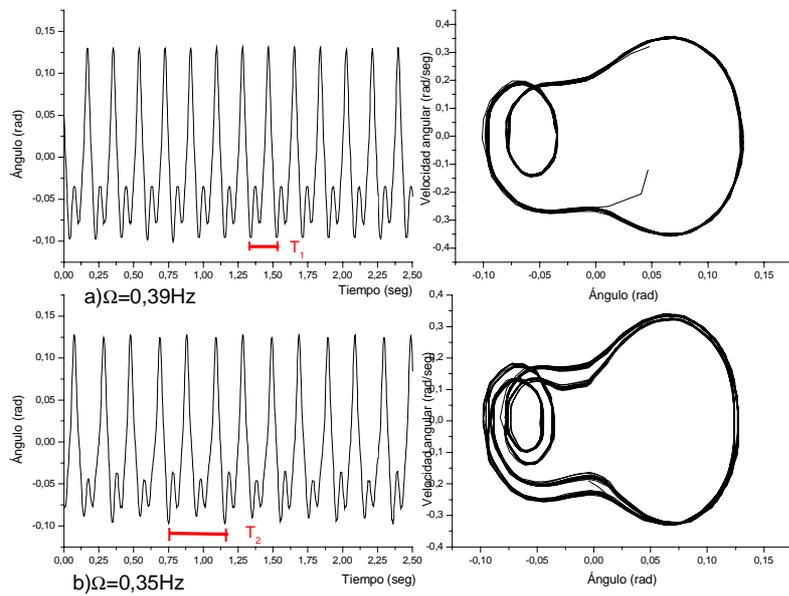
En el caso de  $\Omega=0,48\text{Hz}$  (figura 8.a) el sistema quedó atrapado en uno de los atractores realizando nuevamente una órbita periódica. Al bajar aún más la frecuencia  $\Omega=0,45\text{Hz}$  el movimiento resulta caótico (figura 8.b)).



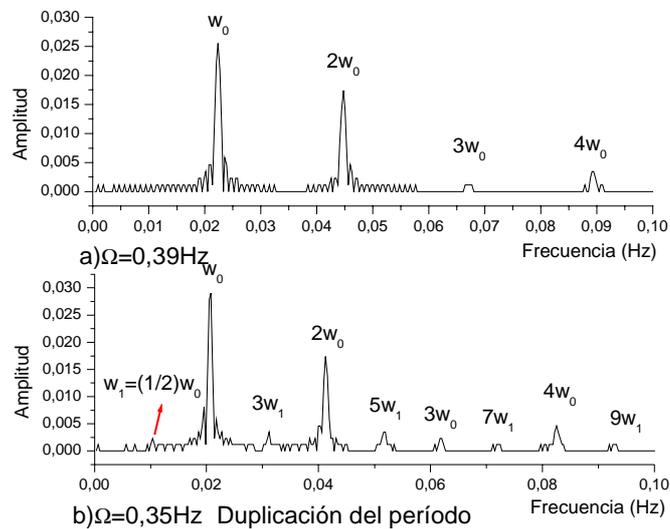
**Figura 8:** Serie de mediciones con la distancia entre imanes fija en  $d=3,17\text{cm}$   
a) órbita periódica, b) movimiento caótico

Al llegar a la frecuencia  $\Omega=0,39\text{ Hz}$ , se vuelve a obtener una órbita periódica de la forma de la figura 9.a). Lo interesante es que al aumentar un poco la frecuencia a  $\Omega= 0,35\text{Hz}$ , se observa en el diagrama de fases de la figura 9.b) que la órbita se duplicó. Se puede comprobar utilizando las series temporales. El período de una es el doble de la otra. (en el primer caso el período es de  $T= 0,19\text{ seg}$  y en el segundo de  $T= 0,39\text{ seg}$ ).

Se puede ver en el diagrama de Fourier de la segunda medición los mismos picos que aparecen en el mismo diagrama antes de la duplicación (figura 10), pero además se observan otros picos, en particular el que corresponde a la mitad de la frecuencia anterior, junto con sus armónicos.



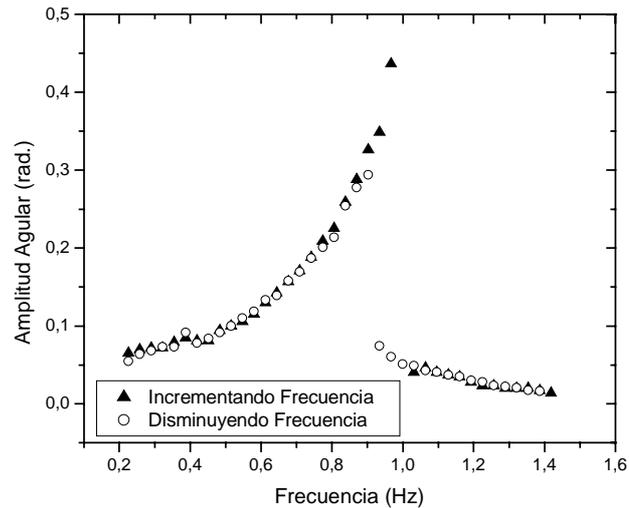
**Figura 9** : Serie de mediciones con la distancia entre imanes fija en  $d=3,17\text{cm}$   
a) órbita periódica, con período  $T_1=0,19\text{seg}$  ,  
b) duplicación del período,  $T_2= 0,39\text{seg}$



**Figura 10:** Espectros de frecuencia.  
a) antes de la duplicación del período, b) duplicación del período

## V. Histeresis

A continuación, se mantuvo fija la distancia entre imanes ( $d = 4,96$  cm.) para estudiar los “saltos” de la amplitud angular e histereis. Para ello, se graficó la amplitud angular del péndulo en función de la frecuencia de la fuerza con que excitamos el sistema. Obtuvimos la curva que se muestra en la figura 11.



**Figura 11:** Estudio experimental de la curva de histeresis mostrando estados bi-estables para frecuencias 0,9 – 1 Hz.

Es importante notar que la amplitud crece continuamente hasta la frecuencia 0,967 Hz. donde luego ocurre un salto discontinuo de la amplitud angular de 0,43 a 0,04 rad. Desde este punto la amplitud decrece continuamente hasta una amplitud de 0,01 rad. Cuando aumentamos la frecuencia, la amplitud crece siguiendo los mismos valores que en la anterior situación, pero cuando la frecuencia alcanza un valor de 0,92 Hz., nuevamente ocurre una discontinuidad de 0,07 a 0,29 rad. Después de la frecuencia 0,92 Hz., la amplitud decrece continuamente.

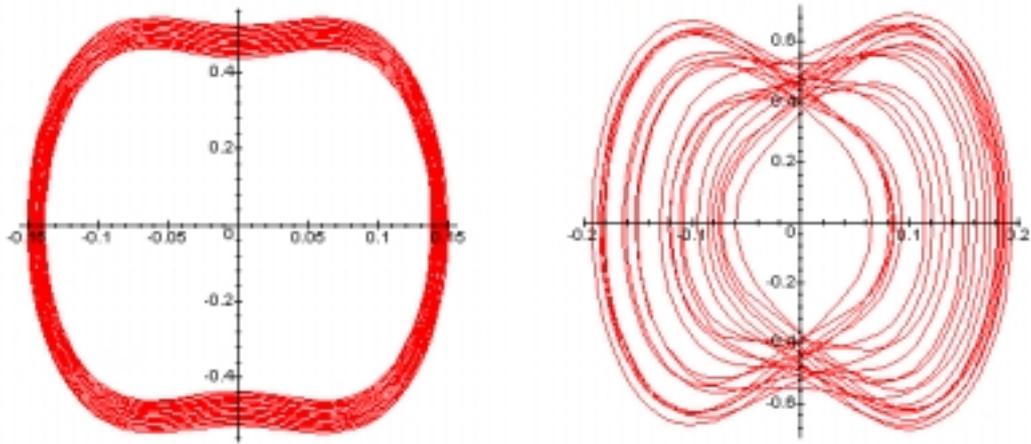
De los anteriores resultados se desprenden dos observaciones:

- Para frecuencias entre 0,9 – 1 Hz. la curva de amplitud es bi-estable.
- La amplitud del péndulo no depende únicamente de la frecuencia de la fuerza con que se excita el sistema, sino que también de la “historia” del sistema en ese rango de frecuencias.

## VI. Simulación numérica

Las ecuaciones 2 se introdujeron en el programa Maple V Release 4 y se resolvieron numéricamente. Se utilizaron los parámetros estimados que aparecen en la sección III.

Algunos resultados son:



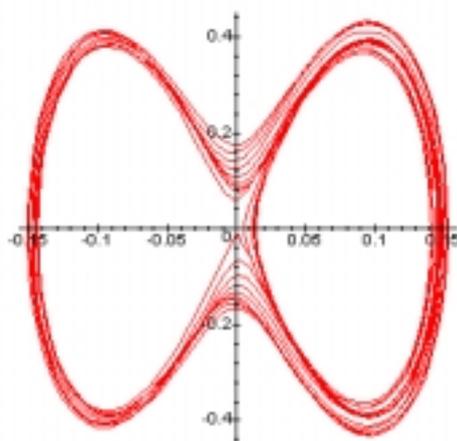
a) Cond. Iniciales:  $d = 5 \text{ cm}$ ,  $\theta(0) = 0,15 \text{ rad.}$ ,  
 $V(0) = 0$ ,  $\Omega = 0$

b) Cond. Iniciales:  $d = 5 \text{ cm}$ ,  $\theta(0) = 0,15 \text{ rad.}$ ,  
 $V(0) = 0$ ,  $\Omega = 0,5 \text{ Hz}$ .

**Figura 12:** Ejemplos de soluciones numéricas

En una primera integración numérica, se puede observar el diagrama de fase para el péndulo sin forzar (a), y forzado (b). En el forzado se puede apreciar que la amplitud de la fuerza que excita es considerablemente grande con respecto a la fuerza magnética. Es por eso que el péndulo no queda “atrapado” en alguna zona de equilibrio estable (atractor)

Luego de varias simulaciones, se observó que la amplitud de la fuerza variable en el tiempo es grande comparada con la fuerza magnética. Entonces se reemplazó ese valor por el de 0.1 y para otras condiciones, se obtuvo:



**Figura 13 :** Diagrama de fase para una simulación con las condiciones iniciales:  
 $d = 4,4 \text{ cm}$ ;  $\theta(0) = 0.15 \text{ rad.}$ ;  $\Omega = 0.3 \text{ Hz}$

Después de muchas integraciones numéricas, se pudo apreciar como influyen los distintos parámetros a la hora de la resolución, o sea que una pequeña variación de los parámetros puede provocar soluciones muy diferentes entre sí. Los diagramas anteriores muestran una porción ínfima de todos los fenómenos que se pueden observar.

## VII. Cálculo del Potencial de interacción

Para una distancia fija entre imanes, calculamos el potencial con el que interactúan la barra e imán con el imán restante. Para el cálculo utilizamos nuestras mediciones: amplitud angular y velocidad angular.

El cálculo del potencial a partir de nuestros datos, nos beneficia en que no es necesario tener en cuenta explícitamente la geometría de los imanes y el momento magnético a diferencia de la ecuación 2.

El potencial incluye dos potenciales específicos:

$$V(\theta) = V_g(\theta) + V_M(\theta)$$

Donde  $V_g$  corresponde al potencial gravitatorio y  $V_M$  al potencial magnético (potencial de interacción). Hay que destacar que el potencial general sólo depende de la variable angular  $\theta$ .

La energía mecánica es igual a la suma de la energía cinética (T), más la energía potencial (V):

$$E = T + V$$

Como en nuestro dispositivo hay pérdida de energía por rozamiento, la energía mecánica variará de la forma:

$$E(t) = E_0 - at = T + V$$

(proponemos la relación lineal para la energía mecánica observando los gráficos de variación angular y velocidad en función del tiempo).

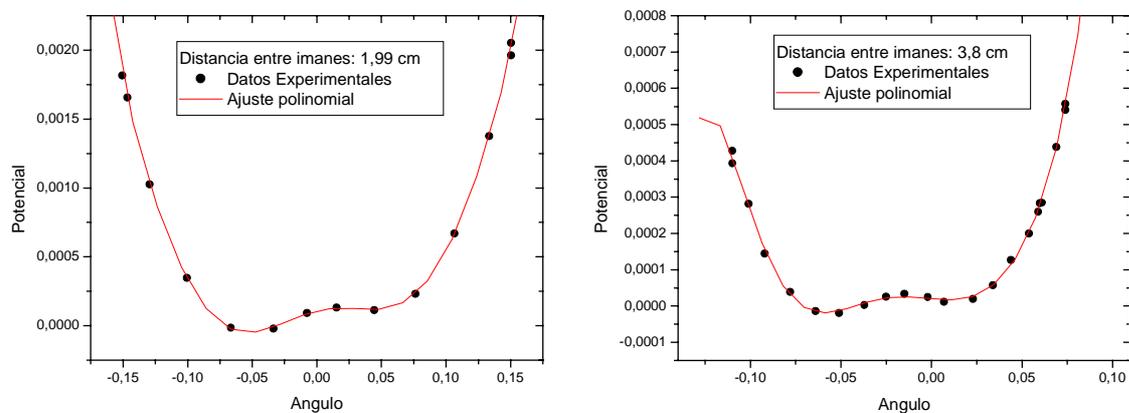
Para calcular la variación de energía en función del tiempo,  $E(t)$ , graficamos T para dos oscilaciones y con los máximos de los picos de T obtuvimos la relación lineal que determina la pérdida de energía mecánica.

Finalmente, despejamos V y se obtiene la expresión:

$$V(\theta) = E_0 - at - T$$

que graficamos en función de  $\theta$  para esas oscilaciones y para esa distancia particular entre imanes.

A continuación, los potenciales para dos distancias distintas.



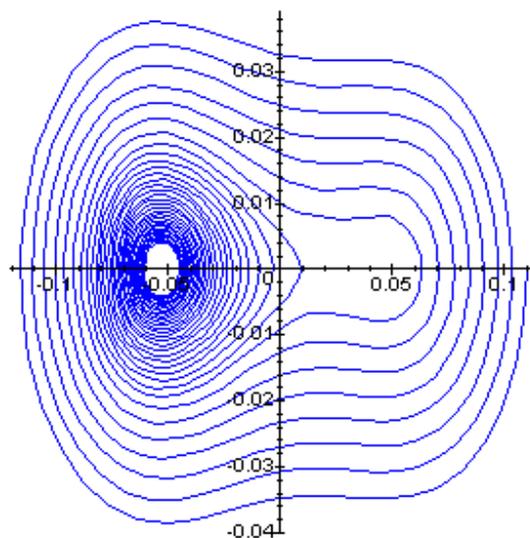
(a)  $d = 1,99 \text{ cm}$

(b)  $d = 3,8 \text{ cm}$

**Figura 14:** Potenciales calculados a partir de los datos experimentales

Con un polinomio de grado 8, ajustamos las curvas de potencial. Y sabiendo que la fuerza es la derivada del potencial cambiado de signo, introducimos la nueva expresión en la ecuación diferencial que describe nuestro sistema. Luego, se resolvió numéricamente con el programa de computadora Maple. A continuación, los resultados.

Primero se obtuvieron los resultados para oscilaciones amortiguadas (sin el término forzante)



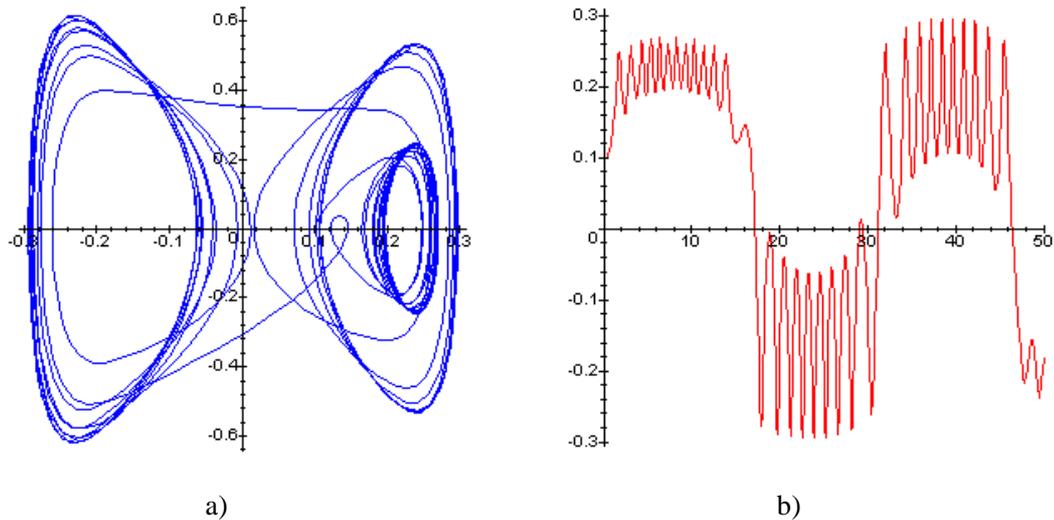
**Figura 15 :** Diagrama de fase para el potencial de la figura 14.a) sin el término forzante.

Condiciones iniciales:  $d = 1,99 \text{ cm}$ ;  $\theta(0)=0,11\text{V}$ ;  $\Omega = 0$

Observar la asimetría del diagrama con la del potencial.

Aclaración: las unidades están en Volts (proporcional a radianes)

Luego, se agregó el término forzante. A continuación se muestra el diagrama de fase y la serie temporal (amplitud en función del tiempo)



**Figura 16 :** Diagrama de fase y serie temporal para el potencial de la figura 14.a)  
 Condiciones iniciales:  $d = 1,99\text{cm}$ ;  $\theta(0)=0,1\text{V}$ ;  $\Omega=0.2\text{Hz}$   
 Aclaración: las unidades están en Volts (proporcional a radianes)

## VIII. Conclusiones

El péndulo magnético muestra un panorama muy amplio de la dinámica no lineal. A través de todo este trabajo, se pudo tener una idea de los distintos fenómenos que se suscitan en un sistema no lineal como regímenes estacionarios, histeresis, etc.

Este trabajo no está concluido. Hay muchos aspectos que se pueden mejorar como lograr una mejor simetría del péndulo cuando se encuentra el imán inferior, o el de tratar de conseguir una fuerza que varíe en el tiempo de forma armónica.

Uno de los trabajos que quedó pendiente es cambiar la fuerza que entrega energía al sistema, en nuestro caso fue el hilo con el resorte atado al disco que gira. Otra posibilidad, es colocar el imán que permanece fijo en un dispositivo que lo haga oscilar periódicamente en forma vertical. De esta forma se lograría tener un campo magnético variable en forma mecánica. Una de las ventajas de esta fuerza es que sería simétrica. Se logró armar un dispositivo, pero no alcanzó el tiempo como para estudiar este nuevo sistema. Un cambio de esta naturaleza en un sistema como el que estudiamos significaría tener una nueva experiencia.

El Universo de la no linealidad es un Universo por descubrir.

## Bibliografía

- “Classical Dynamics of Particles & Systems”, J. Mario, Acad. Press, NY 1965
- “Nonlinear dynamics”, Solari, Natiello, Mindlin, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1996
- “Nonlinear Dynamics and Chaos”, Strogatz, Perseus publishing, 2000
- A. Siahmakoun, V. French J. Patterson, “Nonlinear dynamics of a sinusoidally driven pendulum in a a repulsive magnetic field”, Am. J. Phys. 65, 393-400 (1997)

---

<sup>1</sup> lurilus@yahoo.com.ar

<sup>2</sup> pablotk@hotmail.com

<sup>3</sup> A. Siahmakoun, V. French J. Patterson, “Nonlinear dynamics of a sinusoidally driven pendulum in a a repulsive magnetic field”, Am. J. Phys. 65, 393-400 (1997)