

Estudio de la dinámica de un electrón en condiciones relativistas a través del efecto Compton

Por: *Alejandro García Rosselli (alegarcia@hotmail.com), UBA*

Diego Hofman (dmhof@yahoo.com.ar), UBA

Resumen

En este trabajo se intenta estudiar el comportamiento dinámico de electrones de altas energías, scattereados por efecto Compton. El objetivo fundamental consiste en medir la energía de los fotones incidentes y la de los electrones scattereados y poder así comparar las predicciones de dos modelos mecánicos: uno no relativista y el otro relativista. Se encuentra como resultado que en el rango de energías trabajado (100-1000 KeV) las predicciones de la mecánica no relativista difieren de los valores experimentales. Más aún, se muestra que en base a los resultados obtenidos es posible construir una mecánica relativista en bases a los resultados experimentales. Finalmente se calcula la masa en reposo del electrón obteniéndose el resultado $m_0c^2 = (569 \pm 48) \text{ KeV}$.

Introducción

El presente trabajo se realizó con el fin de estudiar el comportamiento relativista de una partícula que se desplaza a altas velocidades. Dada la dificultad de acelerar un objeto a velocidades cercanas a la de la luz, se hizo uso del fenómeno conocido como efecto Compton como fuente de electrones de altas energías. Para esto se utilizaron muestras de isótopos radioactivos de las cuales se obtuvieron fuentes de fotones de energías conocidas. De esta manera es posible hacer un estudio de las propiedades dinámicas de los electrones y poner a prueba las predicciones de la mecánica no relativista y la relativista.

Los conocimientos teóricos necesarios para la interpretación del siguiente experimento incluyen las ecuaciones dinámicas (relativistas y no relativistas) y como una descripción mecánico-cuántica del efecto Compton. Estos se desarrollaron a continuación siguiendo como guía el trabajo de P.L. Jolivette y N.Rouze (ver Ref. 1).

En primer lugar, la fuente de electrones de alta energía es el denominado efecto Compton. Este se refiere a la colisión de un fotón con un electrón con la consiguiente transmisión de impulso y momento que se da en la interacción. En el caso de un

choque frontal (ángulo de scatter del fotón incidente de 180 grados) se plantea inicialmente la conservación del momento:

$$p_{\gamma} = p - p'_{\gamma} \quad (1)$$

donde p_{γ} es el momento del fotón incidente, p el momento del electrón y p'_{γ} es el momento del fotón scattereado.

Al mismo tiempo puede plantearse la conservación de la energía:

$$p_{\gamma}c = p'_{\gamma}c + T \quad (2)$$

luego, combinando ambas ecuaciones,

$$pc = 2E_{\gamma} - T \quad (3)$$

donde T es la energía cinética del fotón, c es la velocidad de la luz, E_{γ} es la energía del fotón incidente y donde se utilizó la relación mecánico-cuántica $E=pc$ para un fotón.

Cabe destacar que estas expresiones son tanto válidas en el caso no relativista como el relativista (donde la energía correspondiente a la masa en reposo se anula de ambos miembros en la conservación de la energía).

Si se impone el supuesto no relativista $T=p^2/2m_{nr}$, se puede obtener la siguiente expresión para la masa no relativista del electrón:

$$m_{nr}c^2 = \frac{p^2c^2}{2T} = \frac{(2E_{\gamma} - T)^2}{2T} \quad (4)$$

donde cabe recalcar que la forma final queda expresada en función de los parámetros que serán medidos en la siguiente experiencia. Es de esperar que, de ser correctos los supuestos no relativistas, m_{nr} sea una constante propia del electrón y no dependiente de su estado dinámico.

Por otro lado, utilizando la relación relativista entre el momento y la energía (E) del electrón e incluyendo la energía en reposo (siendo m_0 la masa en reposo),

$$p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 = E^2 = (m_0 c^2 + T)^2 \quad (5)$$

se obtiene:

$$m_0 c^2 = \frac{p^2 c^2 - T^2}{2T} = \frac{2E_\gamma (E_\gamma - T)}{T} \quad (6)$$

donde nuevamente la última expresión queda en función de los parámetros que serán medidos en el siguiente experimento.

De esta manera quedan expresadas ambas formulaciones y, dadas las variables involucradas, es posible realizar un experimento que permita corroborar una u otra.

Finalmente, se agregan a continuación las expresiones relativistas para algunos parámetros de importancia, en función de las cantidades medidas:

$$\beta = \frac{T(2E_\gamma - T)}{T^2 - 2E_\gamma T + 2E_\gamma^2} \quad (7)$$

$$\gamma = 1 + \frac{T^2}{2E_\gamma (E_\gamma - T)} \quad (8)$$

$$E_e = \frac{T^2 - 2E_\gamma T + 2E_\gamma^2}{T} \quad (9)$$

donde β y γ son los coeficientes relativistas y E_e la energía del electrón scattereado.

Método experimental

De lo expuesto anteriormente queda claro que el dispositivo experimental que se utilizará debe permitir el análisis del efecto Compton.

Se utilizó en la presente experiencia un dispositivo experimental como el que se muestra en la figura 1.

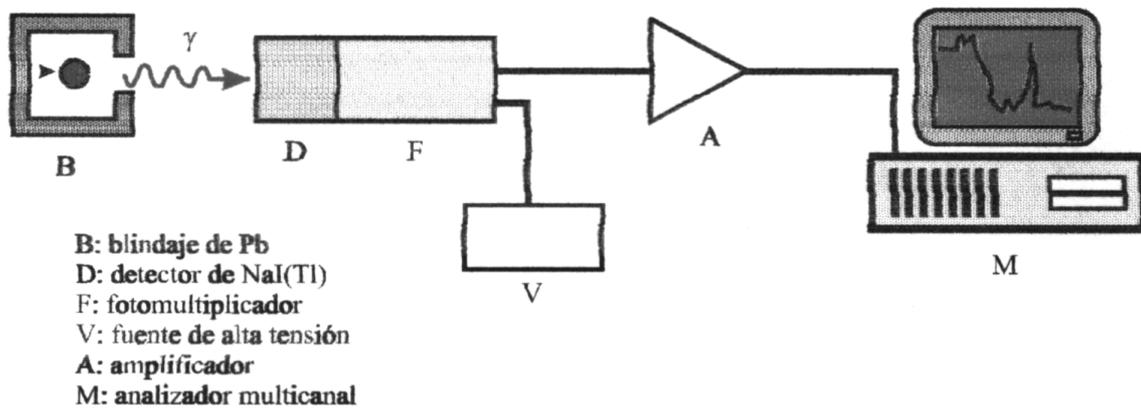


Fig 1. Disposición experimental. Gráfico extraído de Física Re-Creativa (ver Ref. 2).

La disposición experimental es utilizada de la siguiente manera. Una muestra de algún isótopo radioactivo que emita fotones de altas energías es colocado frente a un detector de NaI(Tl). En este detector se dan las interacciones de tipo Compton como también algunas asociadas al efecto fotoeléctrico. Este detector emite, una vez excitado, en el espectro visible. Esta señal es amplificada por el fotomultiplicador que lo convierte en una señal que puede ser procesada y es proporcional a la energía del fotón original incidente. Esta señal se vuelca en una computadora que construye gráficas de distribución de energías.

Cabe aclarar que variables como el tamaño del detector son fundamentales para caracterizar el espectro que se obtiene por este tipo de mediciones. El caso del tamaño se encuentra asociado al número de efectos múltiples Compton (efecto en cascada, donde cada interacción utiliza el fotón scattereado en la interacción anterior) que el detector capta antes de que el fotón scattereado escape de éste. También existen otros métodos posibles de detección, como los detectores de Germanio hiperpuro que son más eficientes.

De esta manera, al dejar una muestra que emita durante un tiempo prolongado, se construye un espectro de las energías detectadas por la configuración experimental. Sin embargo, antes de poder utilizar estos espectros debe realizarse una calibración del

equipo, para asociar los canales de digitalización de la detección a valores determinados de energía. Este procedimiento se explicará en detalle más adelante.

Para medir precisamente la energía del fotón incidente y la energía cinética de los electrones luego de la colisión deben analizarse los espectros obtenidos por medio del procedimiento anterior.

Un espectro típico se muestra esquematizado en la figura 2.

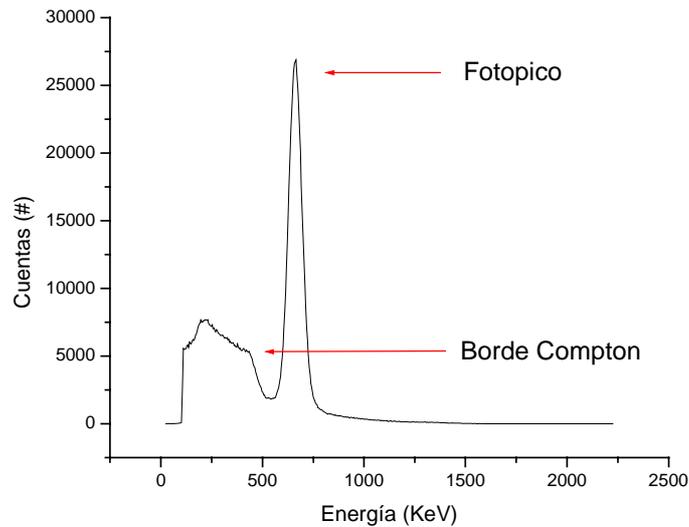


Fig 2. Espectro típico (en este caso del ^{137}Cs) de la distribución de energías que muestra la medición.

En la gráfica anterior deben resaltarse dos características esenciales. En primer lugar, el pico pronunciado corresponde al denominado *fotopico* que está asociado a la energía de los fotones incidentes antes de la interacción Compton. Calculando la posición del fotopico, por lo tanto, puede calcularse E_γ . Dado que los valores de E_γ pueden consultarse en tablas para las distintas muestras, asignando estos valores a los fotopicos puede calibrarse el instrumental por medio de una regresión lineal que asigne valores de energía a los canales del equipo.

La segunda característica fundamental del espectro es el denominado *Borde Compton*. Este corresponde a la energía máxima (es decir de choque frontal o ángulo de scatter de 180 grados) de los electrones después de la interacción Compton. Puede notarse que su caída no es del todo abrupta. Esto está asociado directamente con la capacidad del equipo de detectar múltiples interacciones Compton, de acuerdo a lo ya comentado. Calculando la energía asociada a este punto es que puede calcularse el

parámetro T necesario para el análisis. Es importante es hacer, en este momento, la siguiente aclaración. La posición del Borde Compton es de difícil determinación. Simulaciones numéricas realizadas por P.L. Jolivette y N.Rouze (ver Ref. 1) estiman que el Borde Compton se encuentra a 54% de la diferencia de altura entre el tope del borde y el valle. El criterio que se utilizará es un tanto distinto y se explicará más adelante.

Este análisis se realizó para los siguientes isótopos radioactivos: ^{133}Ba , ^{207}Bi , ^{137}Cs , ^{60}Co y ^{22}Na . Cabe remarcar que algunos de estos isótopos presentan más de un fotopico, asociados a distintas frecuencias de emisión o a interacciones de otra naturaleza (por ejemplo, pares de aniquilación).

De acuerdo con esta técnica es que se obtuvieron los datos que se muestran en la siguiente sección de resultados.

Resultados

De la manera ya expuesta, se midieron los espectros de los cinco isótopos citados. La posición del fotopico fue obtenida calculando la posición media del centroide de una distribución de puntos simétrica cercana al pico. Se adoptó como incerteza la variación máxima de esta posición (aunque como se verá más adelante esta incerteza es despreciable frente al error estadístico).

Para la obtención del Borde Compton se procedió de una manera distinta. Dada la forma típica de esta parte del espectro, se ajustó con una curva sigmoidea la meseta previa al Borde Compton y su caída hacia el valle. De esta manera puede estimarse el punto medio de la pendiente como uno de los parámetros del ajuste sigmoideo. La incerteza de esta medición se obtuvo de acuerdo al error estimado por el ajuste (aunque nuevamente estos errores son despreciables frente al error estadístico que se explicará más adelante).

En la figura 3 se muestra un ajuste típico sigmoidal para el borde Compton de un espectro. El valor obtenido para x_0 es el asociado a la posición del borde.

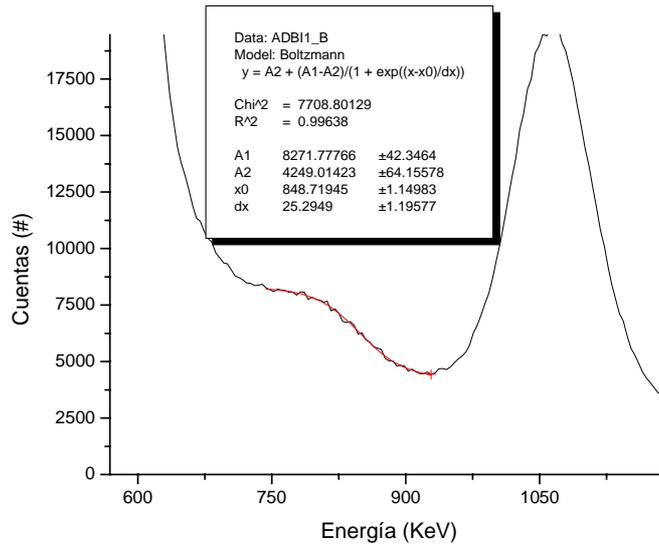


Fig 3. Ajuste sigmoidal al borde Compton para el espectro del ^{207}Bi

Siguiendo estas pautas se confeccionó la siguiente tabla:

Isótopo	E_γ (KeV)	T (KeV)
Ba	356 ± 1	186 ± 1
Bi1	567 ± 1	$378,9 \pm 0,5$
Bi2	1062 ± 1	849 ± 1
Cs	666 ± 1	$472,4 \pm 0,6$
Co	1149 ± 1	917 ± 1
Na1	509 ± 1	$339,7 \pm 0,4$
Na2	1266 ± 1	1023 ± 1

Tabla 1. Valores de las energías de los fotones incidentes y de los electrones scattreados para las distintas muestras.

A partir de estos datos se realizaron los siguientes gráficos. En primer lugar se presenta la relación entre las variables experimentales medidas (ver Fig. 4), esto es , entre la energía cinética del electrón scattreado y la energía del fotón incidente. Se observa que la relación es aproximadamente lineal para el rango en cuestión con una buena bondad de ajuste. Los parámetros de ajuste se presentan en la Fig 4.

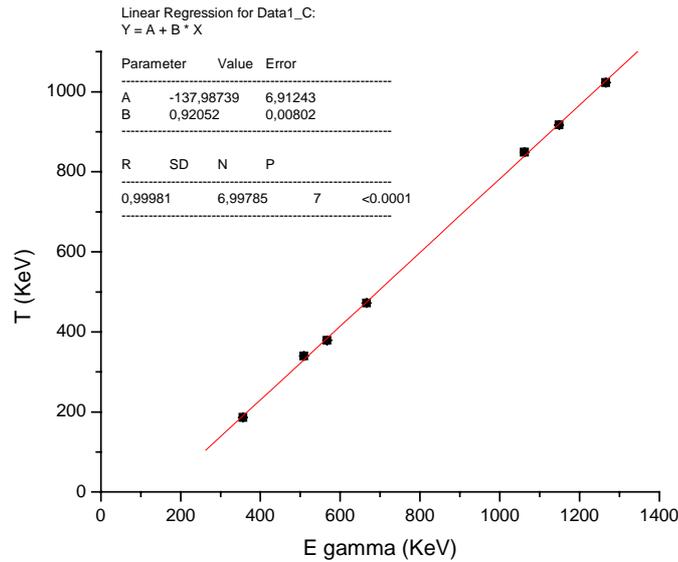


Fig.4. Relación entre la energía cinética del electrón scatterado y la energía del fotón incidente. Las incertezas son pequeñas en el gráfico, del orden del tamaño de los puntos.

A continuación se muestra la relación entre $m_{nr}c^2$ (que se obtiene de las expresiones teóricas desarrolladas en la introducción) y T (ver Fig. 5).

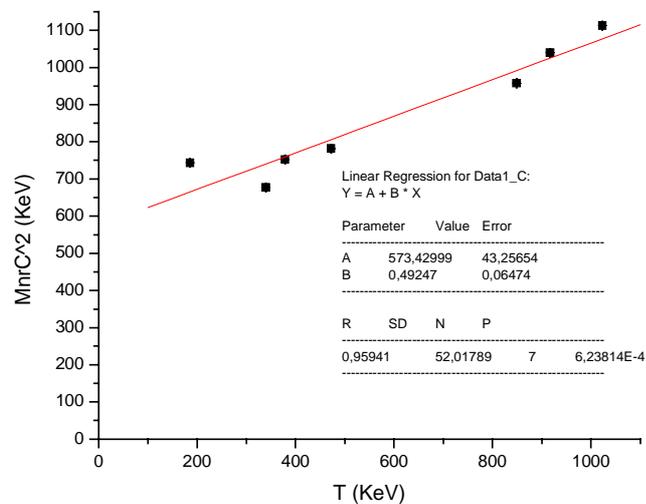


Fig.5. Relación entre la masa en reposo (en unidades de energía) no relativista y la energía cinética del electrón scatterado.

En este gráfico R es del orden de 0.96 por lo que el ajuste lineal es aceptable en el rango de interés. Cabe resaltar en este caso los valores de la ordenada al origen y la pendiente de la recta:

Ordenada: (573 ± 43) KeV

Pendiente: (0,49 ± 0,06)

La figura 6 muestra una gráfica que relaciona m_0c^2 con la energía cinética T.

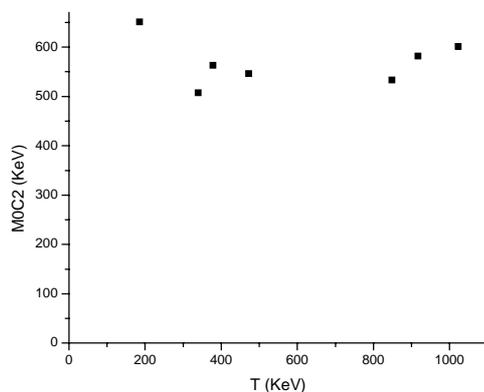


Fig 6. Masa en reposo del electrón (que se desprende de las ecuaciones relativistas), en función de su energía cinética.

Se comprueba, al realizar un ajuste lineal, que la pendiente de la recta modelo no es estadísticamente distinta de 0 (usando el criterio t-estadístico o simplemente la relación de desvío estándar a valor medio.). Por lo tanto m_0c^2 puede considerarse independiente de T. Realizando un análisis estadístico y, despreciando los errores experimentales frente a los desvíos derivados de la estadística (que son de un orden de magnitud mayor) se obtiene: $m_0c^2 = (569 \pm 48) \text{ KeV}$

Finalmente, en las figuras 7 y 8, se muestran las relaciones entre el momento del electrón y el parámetro relativista β y la relación entre γ y β respectivamente.

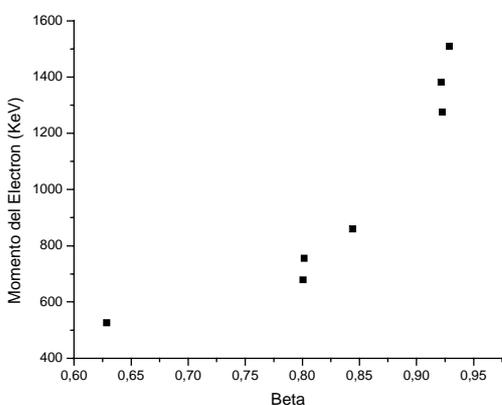


Fig 7. Momento del electrón en función de Beta

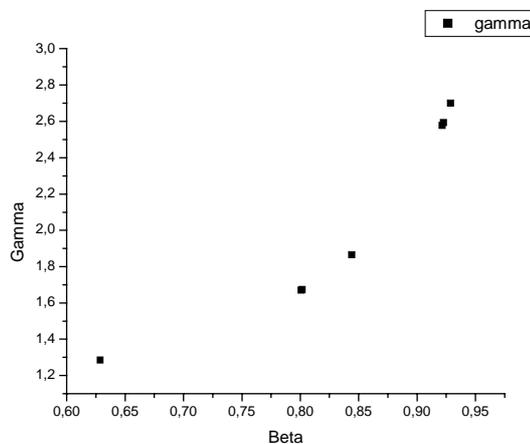


Fig 8. Gamma vs. Beta

Discusión

De los gráficos presentados en la sección anterior es posible realizar un análisis comparativo entre los modelos dinámico presentados.

En primer lugar se puede poner a prueba el modelo no relativista en que la masa tiene una expresión en función de las cantidades medidas y que en teoría debería ser una constante del electrón, independiente de su estado dinámico. La Fig. 5 muestra una gráfica de esta cantidad en función de la energía cinética del electrón. Como puede verse la dependencia es claramente lineal de pendiente no nula. Esto contradice fundamentalmente los supuestos de la mecánica no relativista. Es evidente de este experimento la necesidad de una nueva formulación para la mecánica. Lo interesante es que de un experimento como este puede desprenderse esta nueva formulación que lleva directamente a las expresiones relativistas. Esto se realiza de la siguiente manera. De los valores del ajuste lineal puede escribirse:

$$m_{nr}c^2 = m_0c^2 + 0,49 \cdot T \cong m_0c^2 + \frac{T}{2} \quad (10)$$

donde m_0c^2 representa la ordenada al origen del ajuste lineal y se aproxima el valor de la pendiente por $\frac{1}{2}$ (que se encuentra dentro del intervalo de incertezas del ajuste). De esta manera, puede obtenerse, reemplazando (10) en (4),

$$p^2c^2 + (m_0c^2)^2 = (m_0c^2 + T)^2 = E^2 \quad (11)$$

que es idénticamente igual a (5). Esta expresión, se recuerda, es el supuesto básico que permite el desarrollo de las expresiones relativistas dadas en la introducción.

De esta manera queda clara la importancia de los datos obtenidos en la Fig.5. Estos no solo están en desacuerdo con la mecánica no relativista, sino que también permiten la formulación, en bases experimentales, de la mecánica relativista.

En contraposición, y como otra forma de observar el mismo fenómeno, puede observarse la Fig. 6, que muestra la independencia de la masa en reposo con la energía cinética. El valor encontrado para la masa en reposo del electrón es de (569 ± 48) KeV. Este resultado no solo presenta gran incerteza (8.5%) sino que es superior al tabulado,

de 511 KeV. Este error puede ser atribuido a las dificultades de los métodos gráficos para la determinación de los valores de las variables experimentales y a la poca resolución del detector (en comparación con un de Germanio hiperpuro, por ejemplo).

Puede agregarse que los resultados observados en las Fig. 7 y 8 son característicos del comportamiento relativista. En primer lugar (Fig. 7) se observa que la dependencia del momento con la velocidad no es lineal (como lo es en el caso clásico). Cabe notar el comportamiento asintótico del momento a medida que la velocidad se hace comparable a la de la luz ($\beta=1$). En la Fig. 8 se representa la relación entre los parámetros relativistas. Un ajuste no lineal de esta curva del tipo $\gamma=(a + b.\beta^2)^{-1/2}$ muestra claramente que $a=1$ y $b=-1$ como puede comprobarse del simple despeje a partir de las ecuaciones desarrolladas en la introducción.

Conclusiones

De lo expuesto en el presente trabajo pueden extraerse ciertas conclusiones. En primer lugar queda claro que para el rango de energías utilizado en el scattering de electrones por efecto Compton, los resultados de la mecánica no relativista no son consistentes. Es imposible asignar, en este caso, una masa independiente de la velocidad (o de la energía cinética que tiene la forma $p^2/2m$) al electrón. En segundo lugar, fue posible derivar experimentalmente los resultados de la mecánica relativista a partir del ajuste lineal a la variación de la cantidad m_{nr} . Los resultados obtenidos son completamente análogos a los postulados del modelo relativista. Finalmente se calculó la masa en reposo del electrón obteniéndose el resultado $m_0c^2 = (569 \pm 48)$ KeV, que difiere del resultado tabulado de 511 KeV. Este error se asigna principalmente a los defectos de los métodos gráficos. Se propone como mejora fundamental al experimento el trabajo con un detector de Germanio lo cual facilitaría la identificación gráfica de las cantidades medidas.

Referencias

1. P.L. Jolivet and N. Rouze, "Compton Scattering, the electron mass, and relativity: A laboratory experiment", *Am. J. Phys.* **62**, 266 (1994)
2. S. Gil y E. Rodriguez, *Fisica Re-Creativa*, Prentice Hall, Buenos Aires, 2001