

# MODELADO DE UN CONJUNTO DE CIRCUITOS RLC ESTRUCTURAS PERIÓDICAS

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UBA.  
Leandro Aolita – Clara Smal*

Utilizamos un conjunto de circuitos RLC, que forman una serie periódica. Estudiamos la formación de ondas estacionarias y comparamos los resultados obtenidos con los modelos teóricos pertinentes. Obtuvimos en general una buena concordancia entre lo medido y lo esperado teóricamente y concluimos que nuestro circuito es una buena aproximación de una estructura infinita y periódica.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

La propagación de ondas en estructuras periódicas es de interés primordialmente con relación al comportamiento de los electrones en un cristal o en ejemplos relacionados con ondas acústicas o electromagnéticas [1]. En general estas estructuras pueden ser continuamente periódicas, o discontinuas pero con perturbaciones periódicas. Tales estructuras tienen la propiedad de que la propagación es posible solo en ciertas bandas de frecuencia llamadas pasabandas, que están separadas por bandas de corte en las que la propagación es evanescente. Las frecuencias límites de estas bandas están dadas por la condición de que la longitud  $d$  de la estructura contenga a un número entero de longitudes de onda  $\lambda$  (excepto para la frecuencia fundamental, en donde vale  $\lambda = 2d$ ).

Nuestro interés en estas estructuras surgió a partir del trabajo de R.C. Cross, "Demonstration of wave propagation in a periodic structure" [2], en el cual reproducen a un circuito periódico infinitamente largo.

El problema principal al modelar físicamente un medio de longitud infinita con una estructura de longitud finita es que ésta última posee contornos, lo que

produce la reflexión de ondas. Para evitar este problema utilizamos un circuito circular que tiene efectivamente, una longitud infinita.

Análiticamente, la propagación de ondas en un medio periódico es regida por la ecuación de ondas (independiente del tiempo)[2]:

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \cdot V(x) = 0 \quad (1)$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda,  $v$  es la velocidad de fase,  $V$  es el voltaje a un tiempo fijo y  $x$  es la coordenada espacial del medio unidimensional. Para el caso en el que  $v$  es constante la solución de (1) es la siguiente distribución de voltaje.

$$V(x) = A \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v} \cdot x + \phi\right) \quad (2)$$

Donde  $A$  y  $\phi$  son la amplitud y la fase, respectivamente y pueden depender de la frecuencia. De esta forma, contrastando nuestros resultados experimentales con los predichos por (2) nos da una buena medida de que tan bien una estructura periódica e infinita es modelada por

nuestro circuito, lo cual fue uno de los principales objetivos del trabajo.

El otro objetivo de la experiencia fue la caracterización de las ondas estacionarias que se forman en el circuito.

Esta caracterización fue realizada en contraste con una simulación del circuito resuelto por mallas. A diferencia de la expresión (2) la distribución de voltajes obtenida resolviendo por mallas nos da la solución independientemente de que pensemos a nuestro circuito como infinito o no.

## 2. LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN PERIÓDICA.

### 2.1-El Circuito.

Como mencionamos en la introducción, el mayor obstáculo a la hora de reproducir físicamente una estructura infinitamente larga es minimizar las reflexiones en los contornos de la estructura hecha en el laboratorio que, obviamente, posee una longitud finita. Este obstáculo fue saltado utilizando un circuito circular. Es decir, un circuito con veinte unidades L-C realimentado de forma tal que la primera y la última celda estén conectadas. El dispositivo se muestra en la figura 1.

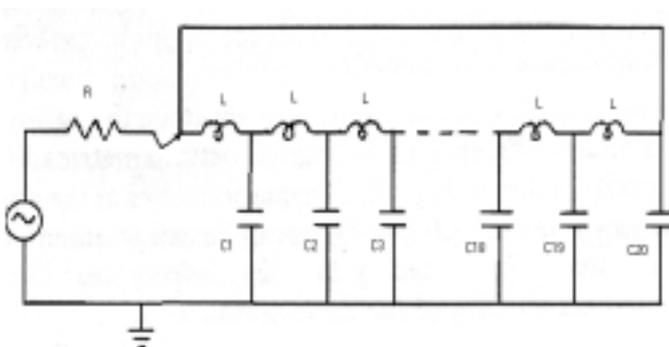


Figura 1: Circuito circular. R:100Ω, L: inductancias y C1.....C20 capacitores del mismo orden de magnitud

Aquí  $L$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , etc, son las inductancias y capacidades componentes del circuito,  $V$  es el voltaje de alimentación y  $R$  es la resistencia, a través de la cual alimentamos nuestro circuito con corriente y no con voltaje. Este es, en efecto, un circuito de longitud infinita en el que cada veintiuna celdas hay una alimentación, y sujeto a la condición de contorno de que el voltaje se repita cada veintiuna celdas, pues en el circuito la  $n$ -ésima celda es, en efecto, la misma que la  $n+21$ -ésima ( $n \in \mathbb{N}$ ). Gráficamente (ver figura 2):

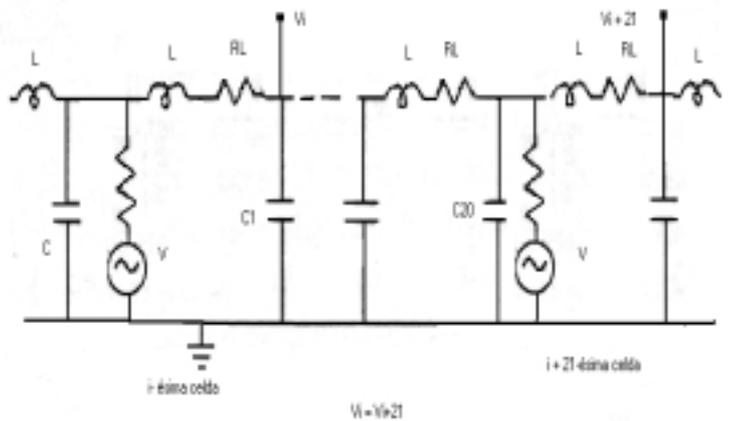


Figura 2: Circuito infinito que se repite periódicamente, sujeto a condiciones de contorno.

$$V_i = V_{i+21} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

De esta forma modelamos una estructura infinitamente larga y periódica.

Cabe destacar la presencia de la resistencia  $R$  en el circuito, pues si alimentáramos al circuito directamente con el voltaje  $V$ , estaríamos imponiendo una restricción extra al circuito; no solo que el voltaje en la  $n$ -ésima alimentación sea igual al de la  $n+21$ -ésima si no que además sean iguales a  $V$ . Con esta

configuración, entonces, evitamos el problema de fijar el voltaje de esa celda; pues lo estamos alimentando con corriente. No en el sentido de que el generador en serie con la resistencia funcione como fuente de corriente (ese sería el caso solo si fuera R fuera mucho mayor que la carga: nuestro circuito).

## 2.2 La Impedancia del Circuito.

Una forma simplista a la que podríamos vernos tentados para calcular las frecuencias de resonancia del sistema (no así, las distribuciones de voltaje) es usando la impedancia de un circuito infinito compuesto únicamente por celdas L-C. Esta es (Ver Apéndice 1):

$$Z = \frac{i\omega L}{2} + \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} \quad (3)$$

de la cual se llega (Ver Apéndice 1) a una expresión dependiente de la frecuencia para la diferencia de fase entre el  $m$ -ésimo voltaje y el  $m+2l$ -ésimo. De pedir que esta diferencia sea igual  $2n\pi$  (con  $n \in \mathbb{N}$ ) se obtiene (Ver Apéndice 1):

$$\omega_{n\pm} = \sqrt{\frac{2}{LC} * \left\{ 1 \pm \left[ 1 + \tan^2\left(\frac{n\pi}{10}\right) \right]^{-1/2} \right\}} \quad (4)$$

De esta expresión se llega a diez frecuencias de resonancia que se muestran en la tabla 2 de la sección Resultados junto con las frecuencias medidas. No debe sorprendernos el hecho de hallar solo diez frecuencias y no veinte, pues podría haber degeneración; más bien deberíamos sorprendernos si hubiera más de veinte. En dicha tabla se puede observar que la discordancia con las frecuencias medidas es total. Lo que nos lleva directo a que la impedancia de

la expresión 3 no es la de nuestro circuito. La expresión 3 no tiene en cuenta la presencia de las alimentaciones V ni de las resistencias R que alteran, por supuesto, la impedancia total del circuito. No pudimos hallar manera alguna de calcular analíticamente  $Z(\omega)$  (la realimentación realmente dificulta los cálculos). Pero, a continuación presentamos los gráficos del módulo y la fase de  $Z(\omega)$  (figura 3) según la simulación (Ver Apéndice 2):

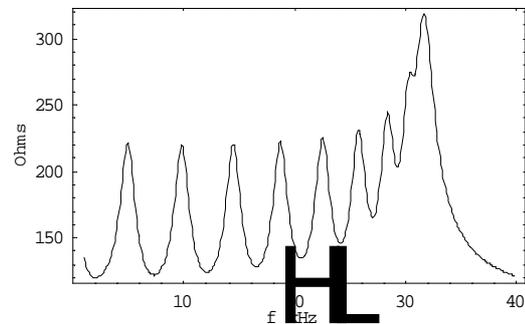


Figura 3-a) Variación del módulo de la impedancia teórica en función de la frecuencia, calculada con una simulación.

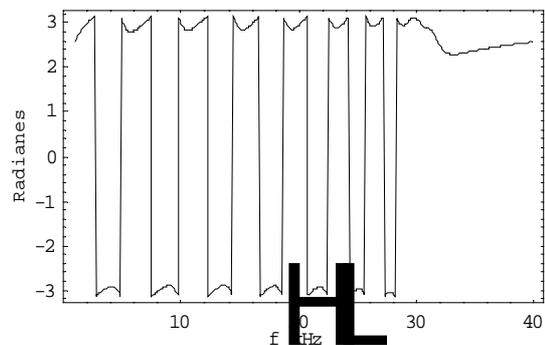


Figura 3-b): Variación de la fase teórica en función de la frecuencia. El gráfico es, en realidad continuo.

En la figura 3-a) se observa cómo el módulo de  $Z(\omega)$  oscila para un rango de frecuencias totalmente en discordancia con (3) y en concordancia con las frecuencias medidas (Ver tabla 2, en 4(Resultados)). Y luego como, a partir de

los 30KHz aprox., tiende a un valor cercano a los  $100\Omega$ . Lo cual tiene mucho sentido, pues ese es el valor de la resistencia  $R$ , sobre la cual tiende a caer todo el voltaje como será explicado en la sección 4(Resultados), sin realimentación. En la figura 3-b) podemos observar la fase de  $Z(\omega)$ . Para poder interpretar el gráfico, es necesario aclarar que las discontinuidades observadas son solo debido a la definición de fase del programa utilizado para realizar la simulación (Mathematica 4.0, Ver Apéndice 2). Este toma valores de fase entre  $-\pi$  y  $\pi$ . Podemos ver una oscilación de  $Z(\omega)$  en el plano complejo entre el segundo y tercer cuadrante. Esto significa que el comportamiento de  $Z(\omega)$  oscila entre inductivo y capacitivo hasta los 30Khz aproximadamente, donde se estabiliza.

### 3. DESARROLLO EXPERIMENTAL

#### 3.1- Caracterización de los elementos del circuito:

Es muy importante el hecho de tener una buena caracterización de todos los elementos del circuito para poder predecir los resultados con precisión.

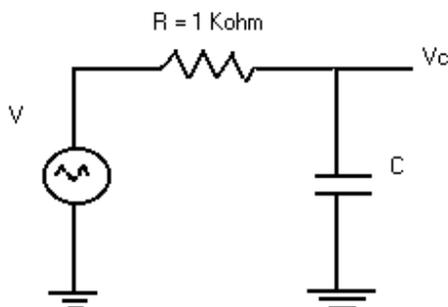


Figura 4. Circuito utilizado para medir C, V es la tensión de alimentación y  $V_c$  la tensión en el capacitor.

#### Capacitores:

Se utilizó un circuito como el que se muestra en la figura 4. La caída de voltaje en el capacitor  $V_c$  está dada por las siguientes ecuaciones (ecuaciones (4) y (5)):

$$V_c = V - I.R \quad (4)$$

$$V_c = \frac{-iI}{\omega C} \quad (5)$$

De la ecuación 5 podemos observar que la corriente  $I$  viene dada por la ecuación (6):

$$I = i.\omega.C.V_c \quad (6)$$

El circuito es alimentado por una fuente de corriente alterna, de la forma que muestra la ecuación (7):

$$V(t) = V_o e^{i\omega t} \quad (7)$$

La caída de tensión del capacitor tiene la misma dependencia temporal que la tensión de alimentación, sabiendo esto y de la ecuación 7 podemos ver que la corriente está dada por la derivada de la tensión de la forma:

$$I = i\omega.C.V_c = C.\frac{dV_c}{dt} \quad (8)$$

Reemplazando la expresión (8) en la (4), tenemos una buena forma de obtener C:

$$\frac{V - V_c}{R} = C.\frac{dV_c}{dt} \quad (9)$$

Esta consiste en realizar una regresión lineal de la ecuación (9), cuya pendiente es  $C$ . Esto fue lo que se hizo.

Los voltajes  $V$  y  $V_c$  se midieron usando un sistema de adquisición de datos

basados en una PC (MPLI). Con dicho sistema de adquisición obtuvimos la derivada del voltaje en el capacitor numéricamente. Los resultados se muestran en la tabla 1 en la siguiente subsección (inductancias).

*Inductancias.*

Se utilizó el circuito que se muestra en la figura 5.

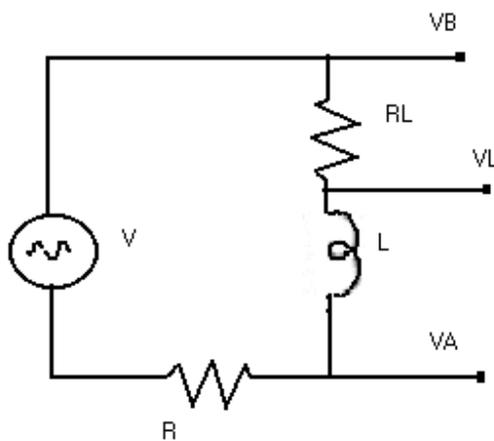


Figura 5. El dispositivo utilizado para medir la inductancia L. V es la tensión de alimentación, R la resistencia y RL la resistencia interna de la inductancia. VA y VB son los voltajes medidos y VL el calculado.

La resistencia interna de cada inductancia RL era de 9Ω se midió con un multímetro, con un error de 0,1Ω. Como sabemos la f.e.m. inducida en la inductancia esta dada por:

$$V_L = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (10)$$

De esta forma conociendo VL y dI/dt obtenemos L. El problema que tenemos es que no podemos medir directamente a VL.

Pero existe una forma indirecta a través de los voltajes VA y VB.

Sabiendo que:

$$V_A = I \cdot R \quad (11)$$

, y por otro lado que:

$$V_B = I \cdot R + I \cdot R_L + V_L \quad (12)$$

, obtenemos VL:

$$V_L = V_B - V_A \left( 1 + \frac{R_L}{R} \right) \quad (13)$$

Luego la derivada de la corriente con respecto del tiempo es obtenida de la ecuación (11) y calculada numéricamente por el MPLI. Se hizo una regresión lineal de la ecuación (10) para obtener L. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 1.

Nº de L	(mH)	Nº de L	(mH)
1	1.83±0.08	11	1.88±0.06
2	1.84±0.08	12	1.86±0.07
3	1.95±0.05	13	1.94±0.06
4	1.89±0.06	14	1.87±0.06
5	2.04±0.06	15	2.01±0.06
6	1.82±0.05	16	1.99±0.06
7	2.00±0.05	17	1.93±0.05
8	1.88±0.06	18	1.96±0.06
9	1.78±0.06	19	1.93±0.06
10	2.17±0.06	20	1.66±0.06

Nº de C	(nF)	Nº de C	(nF)
1	100.4±0.8	11	99.6 ±0.9
2	100.9±0.9	12	99.9 ±0.8
3	100.0±0.9	13	100.3±0.9
4	100.0±0.9	14	99.8 ±0.8
5	100.1±0.8	15	99.8 ±0.8
6	99.3 ±0.9	16	100.0±0.9
7	100.1±0.8	17	100.6±0.8
8	99.8 ±0.9	18	99.9 ±0.8
9	99.5 ±0.8	19	100.3 +0.9
10	99.2 ±0.8	20	100.0±0.8

Tabla 1 con lo valores de las L y las C que componen el circuito

### 3.2-La Medición

Una vez caracterizado cada elemento del circuito medimos el voltaje  $V_i$  sobre cada celda en función de la frecuencia. Así como también realizamos mediciones del circuito sin la realimentación y con distintas cantidades de celdas de forma de adquirir información acerca de cómo influye la cantidad de celdas en la naturaleza discreta del circuito. En la figura 6 se puede ver el dispositivo utilizado:

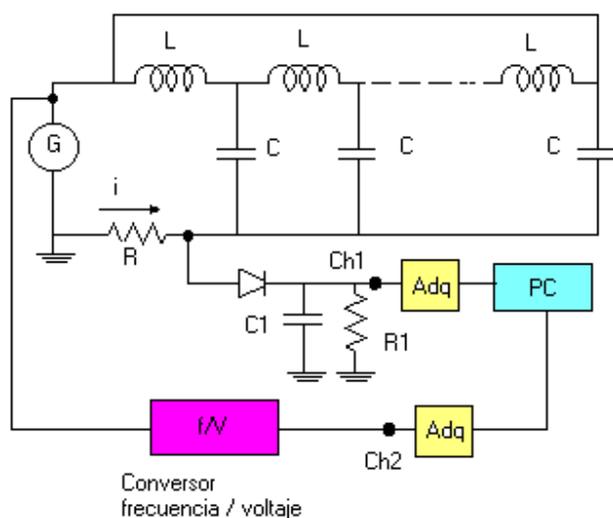


Figura 6: Diagrama esquemático del sistema de medición. Los parámetros medidos directamente fueron: la frecuencia y la tensión de entrada producida por el generador de funciones G y la tensión de los diferentes nodos, debidamente rectificadas. La tensión y la frecuencia fueron adquiridas por distintos canales a la PC.

La línea de transmisión es alimentada por el generador, con una señal sinusoidal que realiza un barrido de frecuencias en un intervalo de tiempo controlable. Luego la caída de tensión  $V_i$  es rectificadas en un rectificador alimentado por una fuente continua. Este último toma una señal sinusoidal de amplitud  $V_i$  y nos entrega una señal constante igual al voltaje efectivo  $V_{ef} = V/\sqrt{2}$ . Pero para cada frecuencia la amplitud varía, entonces la señal rectificadas es la amplitud efectiva en función de la frecuencia. Esta última es adquirida por la PC. Encontramos a este método de medición como el óptimo para medir a distintas frecuencias, pues pudimos medir eficazmente en un continuo de frecuencias. Pero tiene como desventaja la pérdida de información acerca de la fase de la señal (que se pierde al ser rectificadas).

Una vez obtenida las curvas  $V(\omega)$  para cada componente del sistema fue muy fácil obtener las distribuciones de voltaje para cada celda  $V(n)$  a frecuencia fija, tomando los valores de  $V(\omega)$  para cada celda a la frecuencia dada. Todos los resultados obtenidos con este método de medición se muestran en la siguiente sección (ver 4.Resultados).

## 4. RESULTADOS

### 4.1-Sin la Realimentación:

Como anticipáramos en la sección 3 (medición), las primeras mediciones fueron realizadas al circuito sin la realimentación y para distintas cantidades de celdas, con el objeto de comprender como influye la cantidad de celdas en la naturaleza discreta del circuito; pues

recordemos que estamos modelando un medio continuo (aquel en el que vale la ecuación (1)). En las figuras 7-a) a 7-g) podemos observar los resultados de estas mediciones:

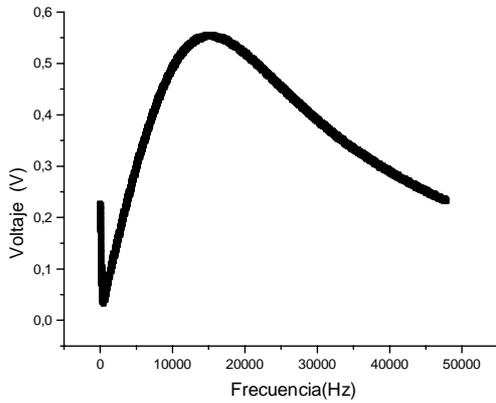


Figura 7-a): curva  $V(\omega)$  para el circuito sin realimentación con una sola celda. Se observa una única frecuencia de resonancia.

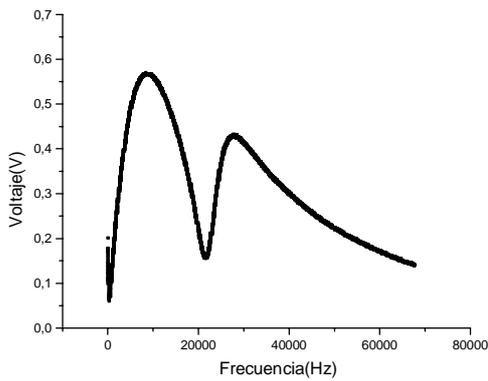


Figura 7-b): IDEM que 7-a), pero con dos celdas

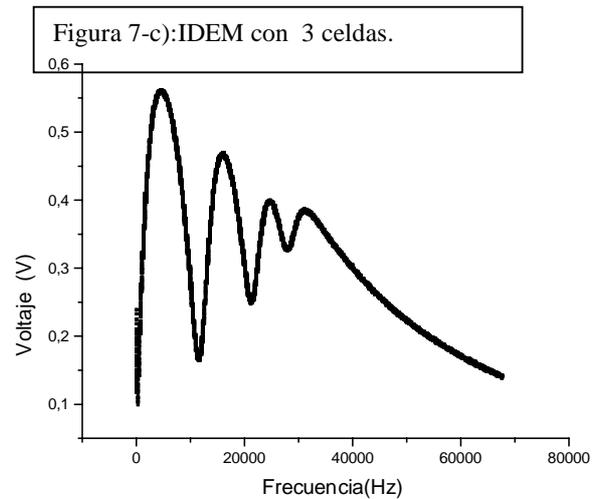
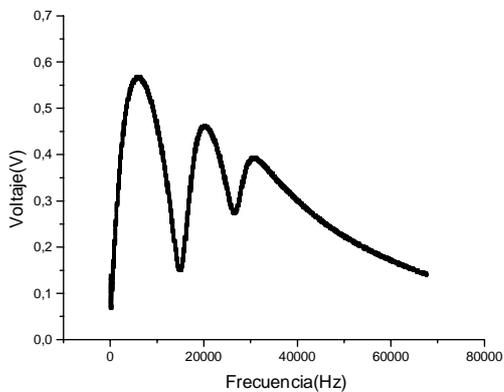


Figura 7-d): IDEM con 4 celdas

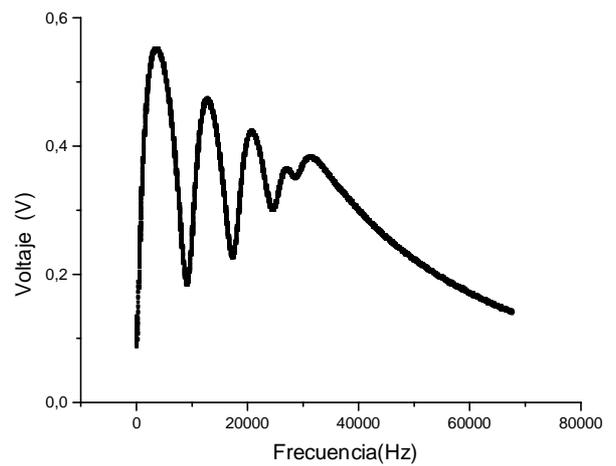


Figura 7-e) IDEM con 5 celdas

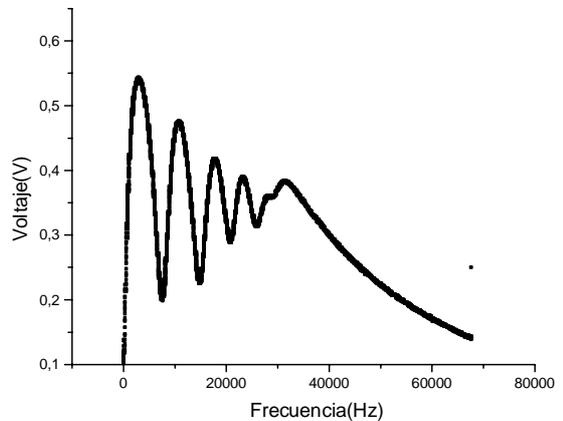


Figura 7-f):IDEM con 6 celdas

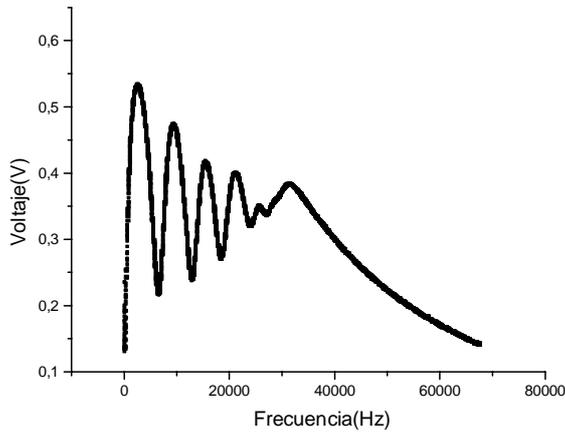


Figura 7-g):IDEM con 7 celdas

Podemos observar la sucesión de mediciones sin realimentación, y con una y hasta siete, celdas. Vemos que el número de picos es directamente proporcional al número de celdas; a excepción del séptimo caso en la que el séptimo pico es tan pequeño que resulta indistinguible. Lo mismo sucedió para mayor cantidad de celdas. En todos los casos se observa cómo la caída de voltaje tiende a cero cuando la frecuencia crece, lo cual no es sorpresa pues los capacitores “tienden a cerrarse” cuando la frecuencia crece, mientras que la caída sobre las inductancias es proporcional a ésta. Con lo cual todo el voltaje tiende a caer sobre las inductancias. Esto explica también por que los picos se hacen cada vez más pequeños cuando la frecuencia aumenta. De todos modos, es claro que la tendencia es a aumentar un pico por celda. Y, como la cantidad de picos es igual a la cantidad de grados de libertad del sistema, es evidente que nuestro

sistema tendrá 21 grados de libertad. Este dato será de crucial importancia a la hora de interpretar los siguientes resultados. Por que, así como es lícito aproximar a una soga continua (con infinitos grados de libertad) con un arreglo de masas unidas por resortes (con un número finito de grados de libertad) hasta una cierta longitud de onda; nuestro circuito es una buena aproximación de un medio continuo hasta el momento en el que  $\lambda$  se hace del orden de la longitud de una celda. Y es entonces, por supuesto, que las diferencias entre un circuito continuo y el nuestro se hacen notorias. De esta manera, es de esperar que nuestro circuito falle al reproducir una estructura continua e infinitamente larga a medida que la frecuencia aumenta ( $\lambda$  disminuye).

## 2-La Línea de Transmisión Periódica.

El siguiente grupo de mediciones que realizamos fue con el circuito con la realimentación conectada. Los gráficos de  $V(\omega)$  sobre la resistencia se muestran en las siguientes figuras (figura 8-a) y b):

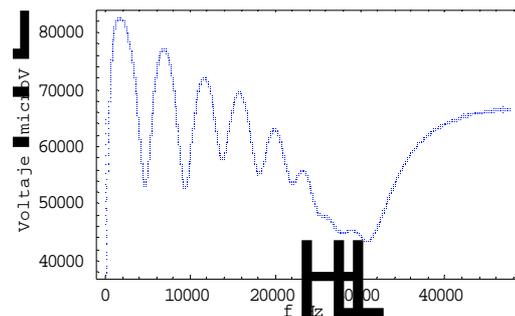


Figura 8-a). Distribución de voltaje en la resistencia experimental.

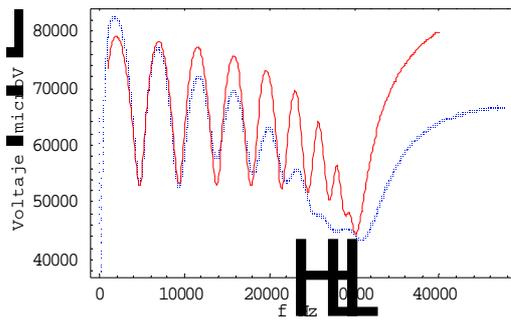


Figura 8 –b): Gráfico comparativo de la distribución de voltajes obtenida(azul) con la predicha(rojo).

En la figura 8-a) podemos observar los distintos máximos y mínimos de voltaje sobre la resistencia, cuyas amplitudes decaen al aumentar la frecuencia según lo predicho en la sub-sección anterior. Esto sucede hasta alcanzar los 30 KHz aproximadamente, en donde todo el voltaje tiende a caer sobre la resistencia. Pues en este caso, a diferencia del circuito sin realimentación, cuando las capacidades tienden a cerrarse todo el voltaje tiende a caer sobre la resistencia, debido a que las inductancias son cortocircuitadas por la realimentación. Es aquí donde se encuentra la frecuencia de corte del sistema, pues éste es un filtro pasa bajos. En la figura 8-b) se observa el gráfico obtenido comparado con el gráfico predicho por la simulación del circuito resuelto por mallas. La ubicación de los máximos y mínimos es la misma en ambos gráficos, así también como sus formas funcionales. Pero la amplitud de los máximos y mínimos decae más rápidamente en el obtenido que en el predicho. Lo cual parece indicar que las inductancias del circuito son mayores que las tenidas en cuenta dentro de la simulación. Pero al variar las inductancias (así también como otros parámetros) de la simulación no pudimos reproducir exactamente la curva obtenida. A menos que haya algún tipo de fenómeno

inductivo, o de otra índole, cuyo origen desconocemos por completo.

Las frecuencias para las que el voltaje sobre la resistencia es mínimo son aquellas donde la disipación de potencia en la resistencia es mínima. Es en estas frecuencias donde la mayor parte de la potencia transmitida por la fuente está siendo almacenada en la parte pasiva del circuito. Definimos, entonces, a éstas como las frecuencias de resonancia del sistema; que se muestran en la siguiente tabla (Ver tabla 2):

<b>Frecuencia Medida (Hz)</b>	<b>Frecuencia Predicha por (4)(Hz)</b>
1817	22123
4761	43701
7189	64204
9346	83125
11661	100000
13881	114412
15916	126007
18155	134500
-	139680
-	141421

**Tabla 2**

En la siguiente figura puede observarse una comparación entre el gráfico de las frecuencias medidas en función de las predichas por (4) con el de una recta de pendiente uno y ordenada al origen cero, para ver poder ver con claridad la total discordancia entre ambas columnas de la tabla 2 (figura 9):

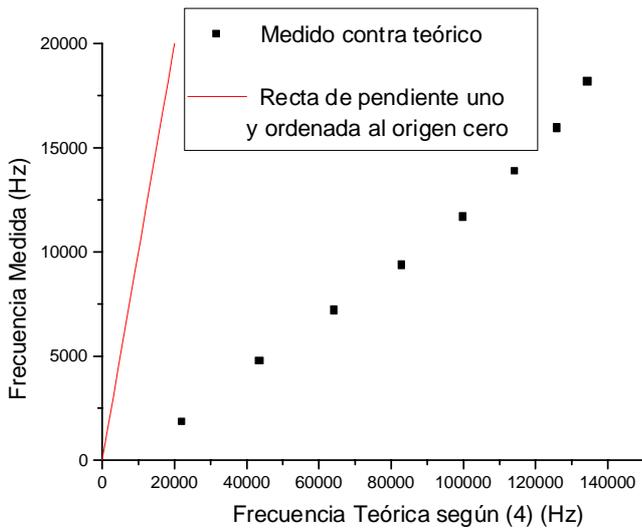


Figura 9. Se pueden observar las frecuencias de resonancias medidas y las frecuencias teóricas, predichas por la expresión 4. La discordancia es total, lo cual nos lleva directo a que la expresión 3 no da la impedancia de nuestro circuito.

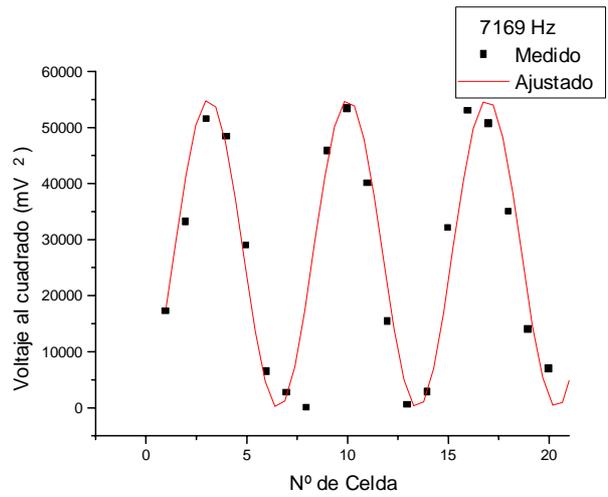


Figura 10 b distribución de voltaje para una frecuencia de 4761 Hz Ajustado por ec 1

A continuación se observan las distribuciones de voltaje para cada celda,  $V(n)$ , para algunas frecuencias fijas, figuras 9:

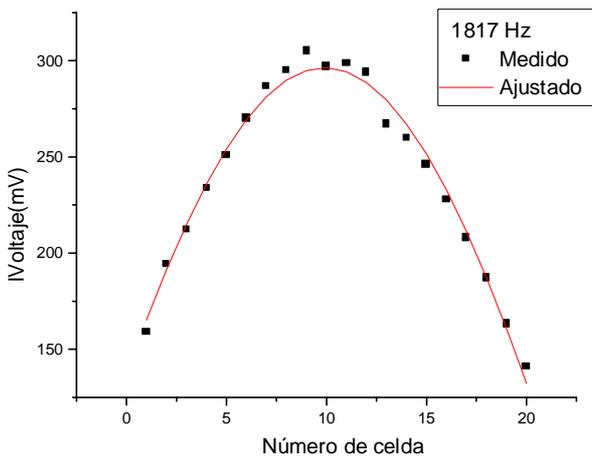


Figura 10 a distribución de voltaje para una frecuencia de 1817 Hz Ajustado por ec 1

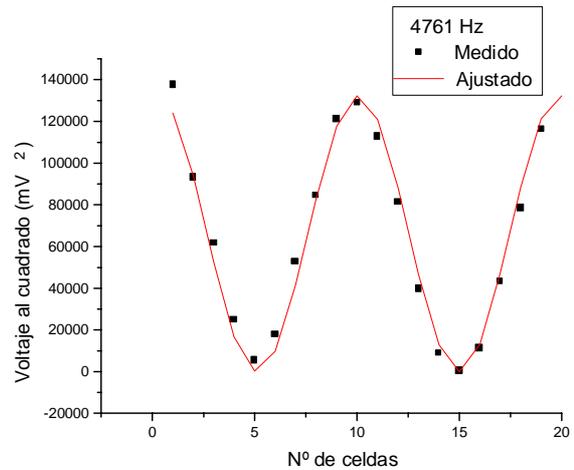


Figura 10 c distribución de voltaje para una frecuencia de 7189 Hz Ajustado por ec 1

En la figura 10-a) observamos la curva  $V(n)$  para  $\omega = 2\pi \cdot 1817\text{Hz}$  (el primer máximo del gráfico de la figura 10-a), junto con el ajuste realizado con la expresión (2). El valor obtenido para la velocidad de fase  $v$  fue:  $v = (16541 \pm 803) \text{ celdas/seg}$

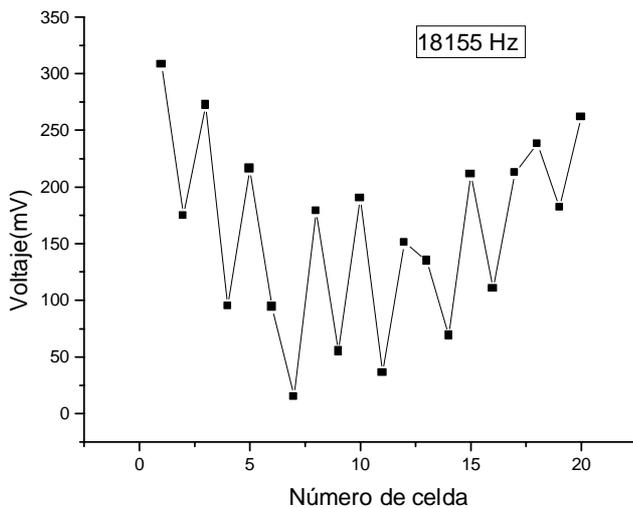


Figura 10 d distribución de voltaje para una frecuencia de 18155Hz.

En las figuras 10-b) y c) vemos las curvas  $V(n)^2$  para  $\omega = 2\pi \cdot 4761\text{Hz}$  y  $\omega = 2\pi \cdot 7169\text{Hz}$  (las dos primeras frecuencias de resonancia), respectivamente; junto con los ajustes con la expresión 2 al cuadrado. La razón por la que tomamos cuadrados fue por que nuestro método de medición solo nos permite medir amplitudes efectivas, por eso solo podemos compararlas con el módulo o el cuadrado de (2). Esto no sucedió para la figura 10-a) por que ésta corresponde al modo fundamental y la distribución ya es definida positiva. Las velocidades de fase resultaron:  $v = (16064 \pm 605) \text{ celdas/seg}$  y  $v = (16018 \pm 714) \text{ celdas/seg}$  respectivamente. Se puede observar que a medida que la frecuencia aumenta se hace más difícil ajustar a nuestros datos con la expresión (2). Para la última frecuencia de resonancia,  $\omega = 2\pi \cdot 18155\text{Hz}$ , es evidente que dicho ajuste es impensable (figura 10-d)). Esto está en perfecta concordancia con lo anticipado en la sub sección anterior.

El lector atento notará que las distribuciones de voltajes obtenidas no son perfectamente simétricas respecto de la alimentación. Pero esto no debe

sorprendernos, pues si observamos a la  $m$ -ésima alimentación de la figura 2; y nos movemos hacia la derecha encontramos a una  $R_L$  y una  $L$ , mientras que si nos movemos hacia la izquierda no.

## CONCLUSIONES

Los ajustes realizados para la distribución de voltajes en las celdas con la expresión 2 fueron satisfactorios, excepto para frecuencias altas. Es aquí en donde se pone en evidencia la naturaleza discreta de nuestro sistema. Hecha esta salvedad la aproximación para un medio infinito y continuo resulta satisfactoria, dado que nuestro sistema puede ser modelado con la ecuación de ondas (1).

Bajo este modelo fue medida la velocidad de propagación del medio dando como resultado:

$$v = 16207 \text{ celdas / seg.}$$

Se midieron también todas las frecuencias de resonancias del sistema, las cuales figuran en la tabla 2.

Por último, también quedó demostrado que la impedancia del circuito no puede ser calculada pensando al mismo como una red periódica e infinita de celdas L-C. Pues la presencia de alimentaciones y resistencias alteran la impedancia total del circuito.

## REFERENCIAS

- [1] L. Brillouin, Wave Propagation in Periodic Structures. ( Mcgraw-Hill, New York, 1946.
- [2] R. C. Cross, Demonstration of Wave Propagation in the periodic Structure. (Am. J. Physics 53, 563 (1985).
- [3] Frank S. Crawford, Ondas (Berkeley Physics Course, vol 3), Reverte, Barcelona 1971.

## Apéndice A:

Consideremos el circuito de la figura 1. Llamemos  $Z$  a la impedancia equivalente de éste circuito. Dado que el circuito es un arreglo infinito de celdas LC, su impedancia debe ser la misma que la del circuito de la figura 2, que es el paralelo de  $(i\omega C)^{-1}$  (la impedancia del capacitor  $C$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular) con  $Z$ , en serie con  $i\omega L$  (la impedancia de la inductancia  $L$ ). Es decir:

$$Z = i\omega L + \frac{(i\omega C)^{-1} \cdot Z}{(i\omega C)^{-1} + Z} \quad (A1)$$

Entonces de donde se obtiene:

$$Z = i\frac{\omega L}{2} \pm \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{L^2 \omega^2}{4}} \quad (A2)$$

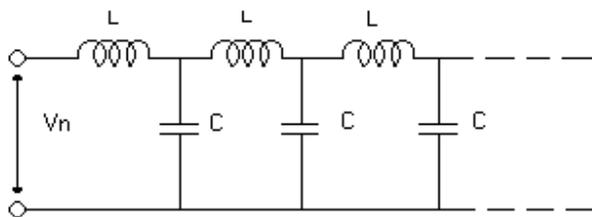


Figura A1: arreglo infinito de celdas LC

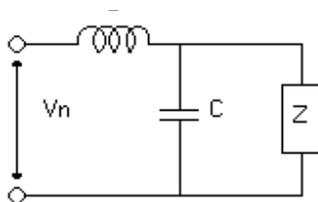


Figura A2: una celda LC, en paralelo con la impedancia equivalente del circuito anterior. El voltaje  $V_n$  es igual a la corriente a lo largo de la  $n$ -ésima celda multiplicado por la impedancia de la  $n$ -ésima inductancia, más la  $n+1$ -ésima

caída de tensión (ver figura 3). Pero todo lo que está a la derecha del  $n$ -ésimo capacitor puede ser reemplazado por  $Z$ .

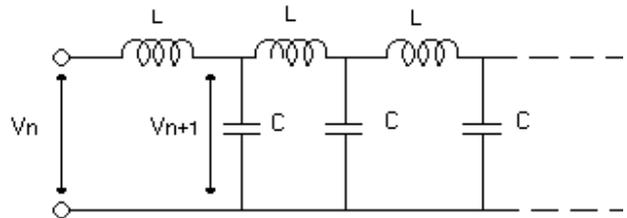


Figura A3:  $V_n$  representa la caída de voltaje en el  $n$ -ésimo capacitor, mientras que  $V_{n+1}$  representa la caída de voltaje en el  $n+1$ -ésimo capacitor

Tenemos, entonces, las dos siguientes ecuaciones:

$$V_n = I_n \cdot i\omega L + V_{n+1} \quad (A3)$$

$$V_n = I_n \cdot Z \quad (A4)$$

De aquí, y usando la ecuación (A2), obtenemos:

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} - \frac{i\omega L}{2}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} + \frac{i\omega L}{2}} \quad (A5)$$

que, para  $\omega < 2/LC$  (la región en donde trabajamos), es un número complejo de módulo uno, llamémoslo  $e^{i\alpha}$ . O sea que  $\alpha$  nos da el desfase entre el voltaje de la  $n$ -ésima celda y la  $n+1$ -ésima. Y, por recurrencia, obtenemos la relación entre el  $n$ -ésimo y el  $n+20$ -ésimo:

$$\frac{V_{n+20}}{V_n} = e^{i \cdot 20\alpha} \quad (A6)$$

En nuestro circuito solo resonaran aquellas frecuencias que hagan que el desfase entre  $V_{n+20}$  y  $V_n$  sea nulo, pues

ambos voltajes son en realidad el mismo a que (la n-ésima y la n+20-ésima celda una misma). Para hallar la m-ésima frecuencia de resonancia basta pedir que se cumpla:

$$e^{i*20\alpha} = e^{i*2\pi*m} \Leftrightarrow \alpha = \frac{m\pi}{10} \quad (\text{A7})$$

Y como  $\alpha$  es el arcotangente del cosciente entre la parte imaginaria y la real de (A5), resulta(usando (A7)):

$$\begin{aligned} \frac{m\pi}{10} &= \arctan \frac{\text{Im} \left[ \frac{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{i\omega L}{2}}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4} + \frac{i\omega L}{2}}} \right]}{\text{Re} \left[ \frac{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{i\omega L}{2}}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4} + \frac{i\omega L}{2}}} \right]} = \\ &= \arctan \left( \frac{\omega \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}}{\frac{\omega^2 L}{2} - \frac{1}{C}} \right) \end{aligned}$$

De resolver la última ecuación se obtiene la expresión para la m-ésima frecuencia de resonancia  $\omega_m$  :

$$\omega_{m\pm} = \left\{ \frac{2}{LC} \left[ 1 \mp \left( 1 + \tan^2 \left( \frac{m\pi}{10} \right) \right)^{-1/2} \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{A9})$$

Cabe mencionar que (A9) Es solución de (A8) Para todo número natural  $m$ , pero recordemos que arrastramos la condición  $\omega < 2/LC$ . Con esto último obtenemos solo 10 diez frecuencias de resonancia que figuran en la tabla (A2).