

Una comprobación experimental del modelo para redes de resistencias cuadradas infinitas en el caso perfecto como en el perturbado

Juan Kamienkowski, Sebastián Romano y Matías Travizano,
kamandu@yahoo.com, juka44@yahoo.com.ar, slick@ussrback.com

Se comprueba el modelo teórico propuesto por Cserti^{1,2} para redes de resistencias cuadradas infinitas en el caso perfecto como en el perturbado, encontrándose una concordancia del 93%. Para esto se propone un novedoso y eficaz método para construir las redes.

1: INTRODUCCION

Se comienza estudiando el caso de una red cuadrada infinita de resistencias. La configuración de la red es bastante simple: es infinita, compuesta por resistencias iguales de valor R en dos dimensiones por la cual no circula corriente. Se le conecta un tester para medir la resistencia entre dos puntos, por lo que empieza a circular corriente. En casi todos los nodos de la red, dado que se está en un caso estacionario, la divergencia del vector densidad de corriente es nula. Pero en los que se conecta el tester esto no ocurre, ya que por uno ingresa una corriente I_0 y por el otro sale una corriente $-I_0$, que es equivalente a pensar que tenemos fuentes y sumideros en la configuración. Entonces, la distribución de corriente que se origina al realizar las mediciones entre los nodos ubicados en \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_j , es:

$$I_m = I_0(\delta_{mi} - \delta_{mj}) \quad \text{para todo } m \quad (1)$$

donde $I_m = I(r_m)$ y se supone que la corriente entra por \mathbf{r}_i y sale por \mathbf{r}_j , mientras no hay corriente en los otros puntos de la red. Por otro lado, a partir de las leyes de Ohm y Kirchoff se puede deducir:

$$\sum_n [V(r_i) - V(r_i + n)] = RI(r_i) \quad (2)$$

donde, como antes, los vectores \mathbf{r}_i marca las posiciones en la grilla, V es el potencial, I la corriente y \mathbf{n} son los vectores desde el punto \mathbf{r}_i a sus vecinos más cercanos. Si, trabajando con notación de Dirac, se escribe V e I como combinación lineal de las $V(r_i)$ y las $I(r_i)$ correspondientemente, y definiendo el Laplaciano para la red infinita sin perturbar como:

$$L_0 = \sum_{i,j} |i\rangle (\Delta_{ij} - z\delta_{ij}) \langle j| \quad (3)$$

donde $|i\rangle$ está asociado al punto \mathbf{r}_i , z es el número de vecinos y Δ_{ij} vale 1 si \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_j son vecinos y sino vale 0, se llega a la siguiente ecuación tipo Poisson¹:

$$L_0 V = -RI \quad (4)$$

Si se define entonces la función de Green G_0 como:

$$L_0 G_0 = -1 \quad (5)$$

la solución a la ecuación (4) es:

$$V = -RL_0^{-1}I = RG_0 I \quad (6)$$

Luego, introduciendo la distribución de corrientes (1) en la ecuación (6), se obtiene:

$$V_k = \langle k | V = R \langle k | G_0 I = R \sum_m \langle k | G_0 | m \rangle I_m = RI_0 [G_0(k, i) - G_0(k, j)] \quad (7)$$

donde $V_k = V(r_k)$ y $G_0(n, m) = \langle n | G_0 | m \rangle$. La resistencia entre r_i y r_j es la diferencia de potencial entre estos dos puntos sobre I_0 , de donde se obtiene:

$$R_0(i, j) = 2R[G_0(i, i) - G_0(i, j)] \quad (8)$$

donde se usó la propiedad de simetría con respecto a los subíndices de las funciones de Green. La forma explícita de la función de Green se puede encontrar en la Ref. 1.

Ahora, si se tiene una perturbación en la red, es decir falta una resistencia, entonces la distribución de corriente ya no es la misma. La contribución a esta distribución del nexo $(i_0 j_0)$ en el punto r_i , δI_i , viene dada por:

$$\delta I_i R = \delta_{i i_0} (V_{i_0} - V_{j_0}) + \delta_{i j_0} (V_{j_0} - V_{i_0}) = \langle i | L_1 V \quad (9)$$

donde $L_1 = (|i_0\rangle - |j_0\rangle)(\langle i_0| - \langle j_0|)$ es un operador de forma diádica, y representa una perturbación al operador Laplaciano L_0 de la red no perturbada. Si se quita el nexo $(i_0 j_0)$ de la red, la corriente en el punto r_i es:

$$(L_0 V)_i = -R(I_i + \delta I_i) \Rightarrow (-L_0 V)_i - R \delta I_i = RI_i \quad (10)$$

Entonces, las leyes de Ohm y Kirchoff para la red perturbada se escriben como $LV = -RI$ con $L = L_1 + L_0$. Si se define $G = G_1 + G_0$, y se trabaja igual que antes, se llega a una ecuación similar a la (7). Definiendo la resistencia entre dos puntos de la misma forma que antes, se obtiene:

$$R(i, j) = R[G(i, i) - G(i, j) + G(j, j) - G(j, i)] \quad (11)$$

que es un resultado distinto al anterior porque como no es una red perfecta $G(i, i) \neq G(j, j)$, pero sigue valiendo $G(i, j) = G(j, i)$. Se quiere la resistencia en función de la red perturbada en función del caso no perturbado. Entonces se escribe G en función de L_1 y G_0 a partir de la ecuación (5), $L = L_0 + L_1$ y $LG = -1$, obteniéndose una ecuación de Dyson:

$$G = G_0 + G_0 L_1 G \quad (12)$$

Para este caso en particular en que L_1 tiene una forma diádica, la ecuación (12) puede ser resuelta exactamente, ya que se puede escribir G en función de G_0 a partir de una identidad. De esta forma se obtiene $R(i, j)$ en función de G_0 , y por lo tanto, usando la ecuación (8), en función de $R_0(i, j)$:

$$R(i, j) = R_0(i, j) + \frac{[R_0(i, j_0) + R_0(j, i_0) - R_0(i, i_0) - R_0(j, j_0)]^2}{4[R - R_0(i_0, j_0)]} \quad (13)$$

que es la función que modela el comportamiento de una red cuadrada infinita perturbada en términos de la red no perturbada.

2. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

2.1.1 Construcción de las redes

Para construir las redes de resistencias se utilizó un método simple, que consistió en imprimir un cuadriculado con una impresora HP 840C, ya que tinta de ésta es conductora. Las impresiones se realizaron sobre una hoja tamaño A4 marca Massuh Calidad Extra Blanco. A continuación se expone una sección de una de las redes impresas (Figura 1).

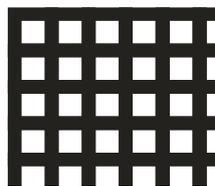


Figura 1: Sección de una de las redes impresas, de 4 ptos. de espesor

2.2. Comprobación de la linealidad de la resistividad en función de la distancia

Debido a la falta de información sobre las características de la tinta, se procedió a realizar mediciones que verifiquen si ésta cumplía con los requerimientos necesarios para llevar a cabo la experiencia. Se comprobó la linealidad de la resistencia de la tinta en función de la distancia, imprimiéndose cuatro líneas de una longitud de 20 cm. por 6 pto. (medida del MS Word). Para cada una de las cuatro líneas (rotuladas A-D) se tomó una serie de entre 10 y 11 datos, repitiendo esta operación para diez conjuntos de líneas impresas en hojas diferentes. A continuación se exponen gráficos representativos con su correspondiente ajuste lineal (Figura 2):

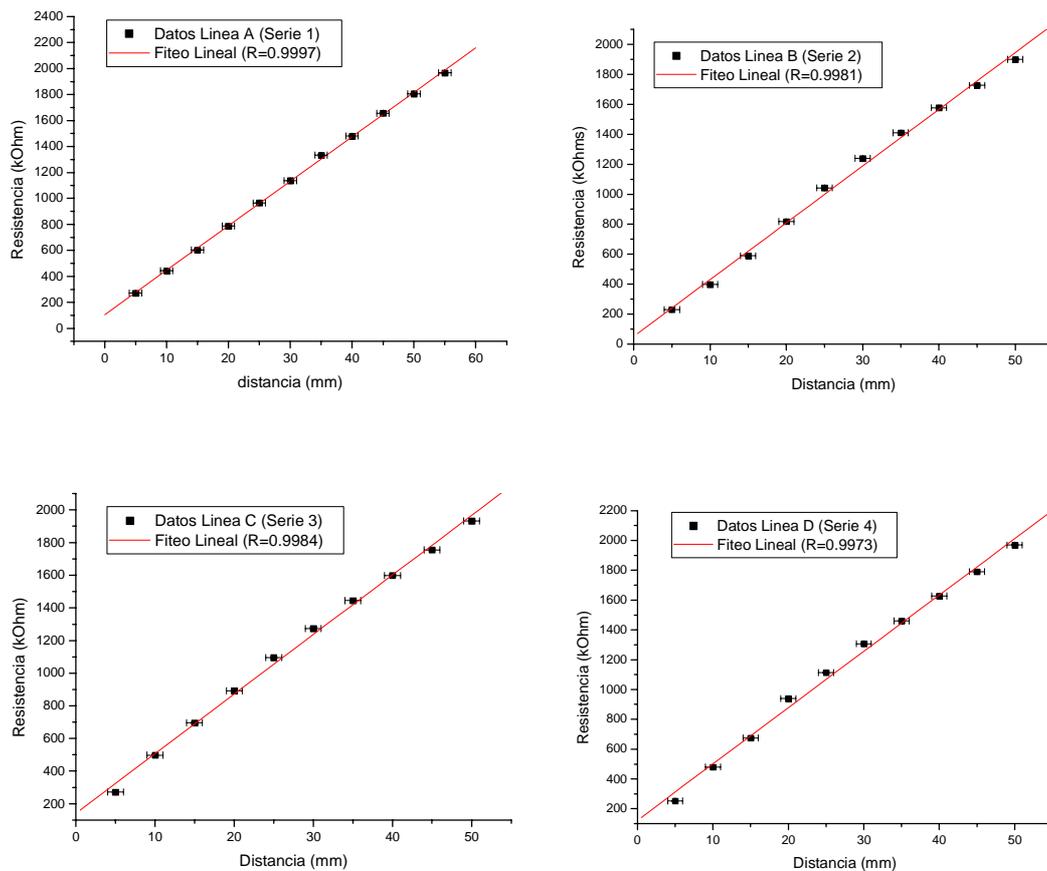


Figura 2: Ajustes lineales de la resistencia en función de la distancia para distintas series. Los errores provienen en la incerteza intrínseca de los aparatos de medición.

Se aprecia claramente que la resistencia es lineal con la distancia, incluso teniendo en cuenta que cada serie se hizo en hojas distintas. La linealidad de la resistencia conlleva a la verificación de la uniformidad de la tinta porque si existiese una variación (apreciable) en la densidad de la tinta esto determinaría un “dominio” y la resistencia dejaría de ser lineal con la distancia. Por lo tanto, se puede afirmar que la impresión (o mejor dicho la tinta) es uniforme. Sin embargo, cabe destacar que debido a que todas las líneas se han hecho en el sentido horizontal y a que la hoja de papel estándar tiene un entramado distinto vertical que horizontalmente, rigurosamente, solo se puede afirmar que la

resistencia es lineal con la densidad si uno se mueve por “caminos” horizontales (y por supuesto, de un ancho de 6 ptos.)

2.3 Repetitividad de los datos obtenidos

Para confirmar la repetitividad de los datos obtenidos, se realizaron cuatro series de mediciones consecutivas sobre cada una de las líneas. Como resultado se obtuvo una variación promedio del 7%. Este error se debe a que las mediciones variaban si era modificada la posición en la que el contacto del tester tocaba el papel, es decir, se observaban variaciones en las mediciones dependiendo de cómo era colocado el contacto.

2.4 Determinación de la infinitud de la red

El modelo disponible que permite determinar el valor de la resistencia para dos nodos arbitrarios funciona *solo* si se trata de una red *infinita*. Esta por supuesto es una condición ideal, de todas formas, existen situaciones en las cuales ciertos sistemas se comportan *como* si se tratasen de un sistema infinito. El propósito de esta sección es determinar cuál es el límite para el cual la red construida se empieza a comportar como una red infinita.

El método a seguir es el siguiente: se construye un conjunto de redes de un mismo espesor de línea (i.e. de 6 ptos.) pero de distintas dimensiones, empezando de una red de 4x4 hasta una de 30x30. Luego se mide la resistencia de cada red empezando del centro de las mismas y progresando tanto vertical como horizontalmente dejando un contacto (llámese j) en el centro (llámese 0) y variando el otro (llámese i). Como se conoce teóricamente el valor de la resistencia entre cualquier par de nodos (ecuación ***), se puede así comparar con el valor experimental y determinar entonces los rangos en los cuales la aproximación de red infinita es válida.

Los resultados obtenidos mostraron dos comportamientos que vale la pena detallar:

- El tamaño para el cual la red se puede suponer infinita es función del espesor de las líneas que constituyen la red. La resistencia es inversamente proporcional al espesor de las líneas; por lo tanto, la red se aproximaba más rápidamente (es decir, se necesitaba una red más pequeña) cuanto menor sea el espesor de las líneas.
- Cuantitativamente, una red de 25x25 nodos conformada por líneas de 0.50 ptos., con una resistencia unitaria promedio de 1.3 M Ω , se comporta aproximadamente como una red infinita hasta el nodo 7 (desde el nodo central); mientras que una red de las mismas dimensiones pero con líneas de 6 ptos, con una resistencia unitaria promedio de 300 k Ω empieza a fallar a partir del cuarto nodo. Vale la pena resaltar que este comportamiento es independiente de la dirección en la que uno elige desplazarse.

Las redes que se eligieron para trabajar eran de 50x50 nodos, conformadas por líneas de 6 ptos. o de 4 ptos. En ambas se encontró que la aproximación de red infinita era válida hasta los nodos 9 o 10. Las mediciones más lejanas discrepan del modelo teórico en un 70% en promedio.

2.5 Dependencia de la resistividad de la red con la temperatura y/o humedad

Es posible que exista una dependencia fuerte de la resistencia con la temperatura e incluso con la humedad del medio. Para eliminar este problema se construyó en un cajón plástico transparente, el cual está sellado herméticamente (o por lo menos, bien cerrado), una “caja hermética de operaciones (CHO)”, a la cual se accede mediante unos guantes, colocados especialmente para que la muestra no tenga contacto con el medioambiente de forma directa. Por la parte superior de la caja ingresa el instrumental. Dentro de esta se coloca un fondo de “Silica Gel”, el cual absorbe la humedad que queda dentro de la caja en un periodo de aproximadamente un día.

Se quiere dejar claro que el problema reside esencialmente, no tanto en la variación homogénea en los valores de la resistividad, sino en la posible aparición de “dominios” los cuales transformen a la red en heterogénea.

Las mediciones realizadas de la resistencia unitaria dentro de la CHO tuvieron una discrepancia promedio del 6,6%. Este es un error similar al obtenido al realizar el mismo tipo de mediciones fuera de la CHO (que es del 7%), por lo tanto, podemos afirmar que la humedad no afecta fuertemente el valor de las resistencias, por lo menos en las escalas temporales utilizadas para realizar las mediciones.

2.6 Perturbación de la red

Se perturbó la red quitándole una de las resistencias que la conforman, lo que equivale a que se le remueva uno de los lados de uno de los cuadrados. En el caso de esta experiencia, se quitó la primera resistencia a la derecha desde nodo central de la red.

3. RESULTADOS

3.1 Red sin perturbar

Como se ha demostrado en la Ref. 1, las relaciones de recurrencia para la resistencia entre dos nodos arbitrarios para una red cuadrada son:

$$R_0(m+1, m+1) = \frac{4m}{2m+1} R_0(m, m) - \frac{2m-1}{2m+1} R_0(m-1, m-1), \quad (14)$$

$$R_0(m+1, m) = 2R_0(m, m) - R_0(m, m-1), \quad (15)$$

$$R_0(m+1, 0) = 4R_0(m, 0) - R_0(m-1, 0) - 2R_0(m, 1), \quad (16)$$

$$R_0(m+1, p) = 4R_0(m, p) - R_0(m-1, p) - R_0(m, p+1) - R_0(m, p-1) \text{ si } 0 < p < m, \quad (17)$$

donde los índices m y n de $R_0(m, n)$ (no confundirse con i, j) se refieren a la *coordenada relativa* de los dos sitios en una red cuadrada. Debido a que los valores exactos de $R_0(1, 0) = R/2$ y $R_0(1, 1) = 2R/\pi$ son conocidos² (por supuesto, $R_0(0, 0) = 0$), se puede calcular la resistencia exacta para cualquier nodo usando estas relaciones de recurrencia.

Además, para valores grandes de i y/o j , la forma asintótica de la resistencia es²

$$R(i, j) = \frac{R}{\pi} \left(\ln \sqrt{i^2 + j^2} + \gamma + \frac{\ln 8}{2} \right) \quad (18)$$

donde $\gamma = 0.5722\dots$ es la constante de Euler-Mascheroni. Esta es la función teórica que se usará para corroborar los datos experimentales obtenidos. En la Fig. 3 se grafica la resistencia $R_0(i,j)$, por unidad de resistencia, entre los nodos $i = (0,0)$ y $j = (j_x, j_y)$ como función de j_x y j_y para la red cuadrada perfecta.

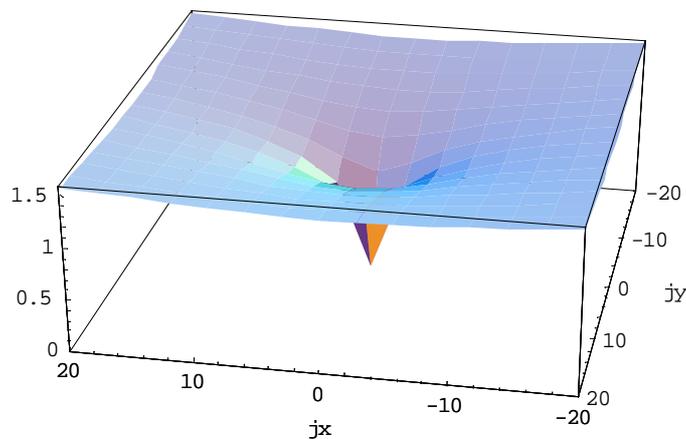


Figura 3: La resistencia $R_0(i,j)$ entre los nodos $i = (0,0)$ y $j = (j_x, j_y)$ como función de j_x y j_y , para una red cuadrada perfecta.

Vale destacar que si bien esta fórmula (Ec. (18)), estrictamente, es correcta para valores grandes de i y/o j , difiere en menos del 1% de la calculada exactamente para los primeros diez puntos. La siguiente figura representa dicho comparación para los primeros diez puntos:

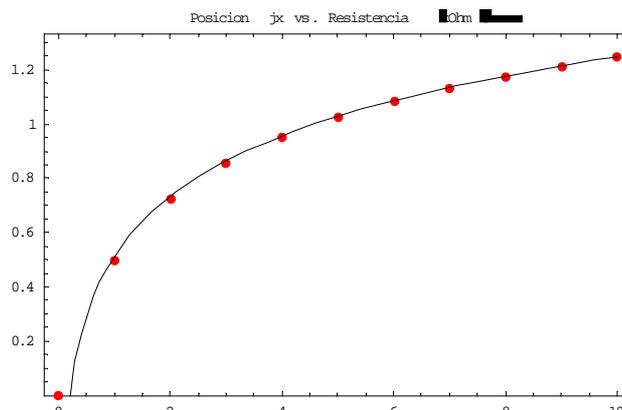


Figura 4: Comparación entre los datos generados a partir de la recurrencia dada por la Ec. (ec!!) (puntos rojos) y la función asintótica Ec. (18) (línea sólida).

Las mediciones a continuación expuestas se realizaron sobre distintos conjuntos de redes sin perturbar, en los cuales se variaba uno de los contactos, dejando el otro fijo en algún nodo.

Los resultados representativos de dichas mediciones se exponen a continuación:

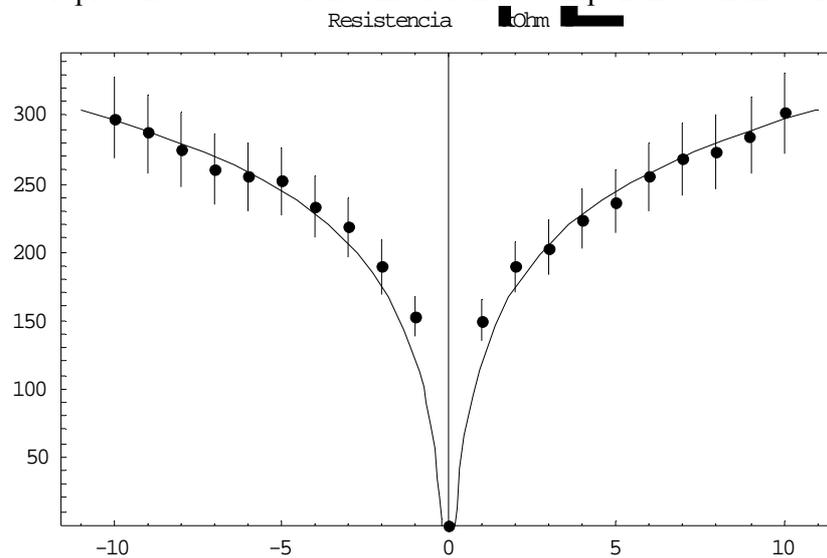


Figura 5: Datos experimentales tomados de una red de 25x25 y 6 pts. dejando el contacto i fijo en la columna cero (centro de la red) y variando el contacto j . La línea continua representa los valores teóricamente predichos.

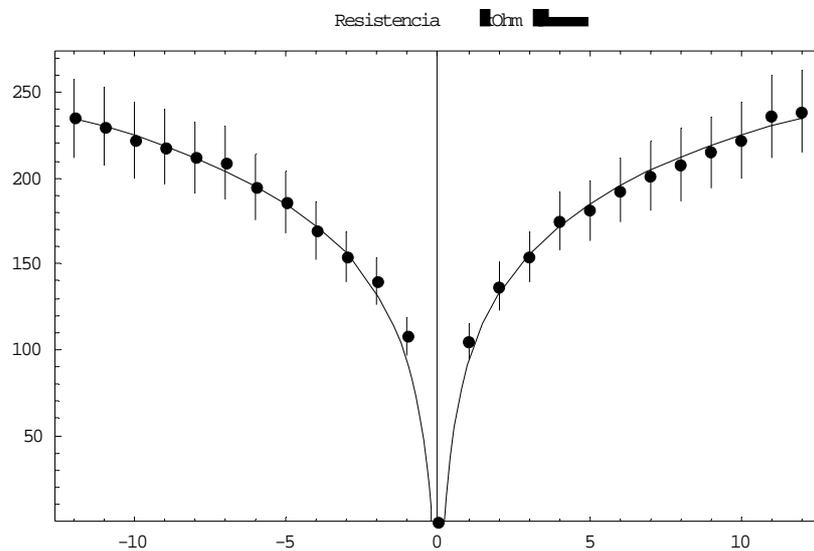


Figura 6: Datos experimentales tomados de una red de 50x50 y 4 pts. dejando el contacto i fijo en la columna cero (centro de la red) y variando el contacto j . La línea continua representa los valores teóricamente predichos

Si bien el error del multímetro es de 1 kOhm, se tomó como error significativo el 10% de las mediciones realizadas. Esta decisión reside en que el valor de resistencia obtenido es

hasta en un 10% función de la posición de los contactos sobre el papel (en realidad, de la superficie de contacto de éstos).

Se puede apreciar una simetría de reflexión con respecto al nodo 0, esto confirma lo anteriormente dicho con respecto a la uniformidad de la red.

Resta resaltar que el modelo teórico definido por la Ec. (18) posee un parámetro libre (R). Este parámetro es el que se ajustó para que la función coincidiera con nuestros datos experimentales (Apéndice A). Sabiendo que teóricamente el valor de la resistencia entre el centro de la red y el primer nodo debe ser la mitad que si el mismo segmento se encontrara libre ($R(0,1) = R/2$), se puede comparar los valores ajustados con los teóricamente esperados; los resultados obtenidos son los siguientes:

$R_{exp.}(1,0)$	$R(\text{calculado como } 2R_{exp.}(1,0))$	Ajuste	Discrepancia Porcentual
105 k Ω	210 k Ω	185,5 k Ω	11,7 %
155 k Ω	310 k Ω	287,8 k Ω	7,2 %

Figura 7: Tabla comparativa entre el valor experimental y el teóricamente determinado, junto con su discrepancia porcentual. El primer valor corresponde a una red de 50x50 y 4 pto. mientras que el segundo corresponde a una red de 25x25 y 6 pto.

En general, se encontró el mismo tipo de comportamiento para todas las redes medidas. La discrepancia porcentual se encontró entre el 7 y el 12% en todos los casos tratados.

3.2 Red perturbada

La ecuación que modela el valor de la resistencia entre dos nodos arbitrarios (i, j) de una red perturbada en la cual la unión (i_0, j_0) es removida viene dada por la Ec. (13), que por completitud la incluimos también en esta sección:

$$R(i, j) = R_0(i, j) + \frac{[R_0(i, j_0) + R_0(j, i_0) - R_0(i, i_0) - R_0(j, j_0)]^2}{4[R - R_0(i_0, j_0)]} \quad (13)$$

Donde R_0 representa la resistencia de la red cuadrada *sin* perturbar evaluada en los puntos en cuestión. Por lo tanto, la Ec. (13) permite conocer la resistencia entre dos nodos arbitrarios de una red perturbada en término de la red sin perturbar.

Vale la pena notar que la forma explícita del Laplaciano L_0 definido en la Ec. (3) no fue usado en la derivación de la Ec. (13). Así, el resultado final obtenido para la resistencia en una red perturbada es válido para cualquier red que posea una simetría en la cual cada celda unitaria tenga solo un sitio en la red, como es el caso de un red triangular.

En la Fig. 8 se presentan los datos experimentales, demarcados por puntos negros unidos por una línea continua, con su correspondiente error; además, la línea punteada representa

la predicción teórica para una red de las mismas características, pero sin perturbar. Por último, los puntos anaranjados representan los valores teóricos predichos por la Ec. (13).

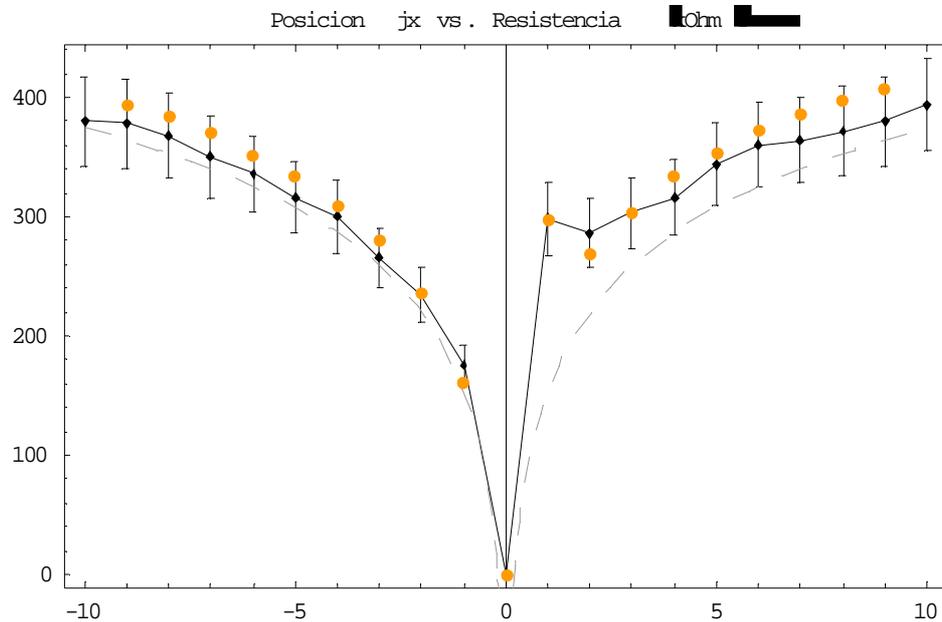


Figura 8: Datos experimentales tomados de una red de 50x50 y 4 ptos., perturbada en la unión (0,0)-(0,1), dejando el contacto i fijo en la columna cero y variando el contacto j . La línea punteada representa los valores teóricamente predichos para una red de las mismas dimensiones pero sin perturbar. La línea continua es solo una guía para los ojos.

Nótese que la resistencia es siempre mayor en la red perturbada que en la perfecta. Esto se debe a que el segundo término de la Ec. (13) es definido positivo. También se puede apreciar de la Fig. 8, que a medida que j crece, la resistencia tiende a la de la red perfecta. Debido a que la resistencia no es simétrica bajo la transformación $j \rightarrow -j$ porque la perturbación rompe la simetría de traslación.

4: CONCLUSIONES

En primera instancia hay que resaltar lo novedoso y sencillo del método utilizado para construir las redes. Por otra parte, este método demostró ser confiable, debido a que tiene una respuesta lineal y una repetitividad donde la variación promedio de la resistencia unitaria es solo del 7%. Mostró también no tener una fuerte dependencia con la humedad del medio, por lo menos en las escalas temporales involucradas en nuestras mediciones. Por último, este método permite realizar redes con otras geometrías con excesiva sencillez.

Los resultados obtenidos para las redes no perturbadas muestran un acuerdo con los valores predichos teóricamente de un 93% en promedio. Los autores creen que esta discrepancia se debe principalmente al problema de los contactos, explicado anteriormente. Un método que logre resolver este problema conllevará a un mejoramiento

sustancial entre la teoría y los datos experimentales. Esta afirmación se basa en el hecho de que el mayor error (de un 10%) se encuentra en el problema de los contactos, y la discrepancia porcentual en nuestros experimentos es, porcentual mente, de estos órdenes.

En cuanto a las redes perturbadas, no se pudo determinar con tanta exactitud la discrepancia porcentual de los datos experimentales con el modelo teórico. De todas formas, se observa que los valores teóricos se encuentran, en todos los casos, dentro de las barras de error de los puntos obtenidos experimentalmente. Por supuesto, el problema de los contactos se aplica también aquí.

Aplicaciones prácticas para este tipo de experimentos se encuentran en todo tipo de áreas. En el libro de Doyle y Snell⁶, se presenta la relación entre los random walks y las redes eléctricas. También, pensando que el espaciamiento entre las resistencias unitarias es pequeño (límite al continuo) se pueden modelar, por ejemplo, comportamientos de placas (como puede ser una chapa) frente a perturbaciones (agujeros en ella).

Finalmente, se insta a futuros continuadores a intentar con distintas geometrías. El primer intento se tendría que hacer con redes triangulares, donde existe una función⁵ que modela la resistencia entre dos nodos arbitrarios, pero todavía no se ha encontrado la expresión recursiva para esta. Como se dijo anteriormente, la perturbación de este tipo de geometría se puede modelar usando la misma función que para una red cuadrada perturbada.

BIBLIOGRAFIA:

- 1 Cserti, Dávid, Piróth “Perturbation of infinite networks of resistors” Am. J. Phys., **70**, 153-159 (2002)
- 2 Cserti “Application of the lattice Green’s function for calculating the resistance of an infinite network of resistors” Am. J. Phys., **68**, 896-906 (2000)
- 3 Glasser, Boersma “Exact values for the cubic lattice Green functions” J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 5017-5023 (2000)
- 4 Atkinson, van Steenwijk “Infinite resistive lattices” Am. J. Phys., **67**, 486-492 (1999)
- 5 Venezian “On the resistance between two points on a grid” Am. J. Phys., **62**, 1000-1004 (1994)
- 6 P.G Doyle & J.L. Snell, “Random Walks and Electricity Networks”, The Carus Mathematical Monograph, Series 22, (The Mathematical Association of America, 1984), pp. 83-149.

APENDICE A: Sobre el Ajuste No Lineal

El ajuste no lineal se realizó mediante el MATHEMATICA, mas específicamente, se usó el comando `NonlinearRegress`, utilizando el algoritmo de LevenbergMarquardt para minimizar la función de mérito χ^2 . Los detalles técnicos se adjuntan a continuación:

Correspondiendo a $R_{exp}(1,0) = 105 \text{ k}\Omega$ se tuvo:

```
BestFitParameters® 185.50752474792588`

""      "Estimate"      "Asymptotic SE"      "R"
R      180.50752474792588`  0.9995586519202719`  0.9993978013557083` , 182.57526936028094`

EstimatedVariance® 27.45098702399045` ,

      ""      "DF"      "SumOfSq"      "MeanSq"
ANOVA Table® "Model"      1      895224.6272984482`  895224.6272984482`
      "Error"      23      631.3727015517803`  27.45098702399045` ,
      "Uncorrected Total"  24      895856.`
      "Corrected Total"  23      35525.333333333336`  ""

AsymptoticCorrelationMatrix® 1. 0.
FitCurvatureTable®

""      "Curvature"
"Max Intrinsic"      0
"Max Parameter- Effects"  0
"95. % Confidence Region"  0.483405274494619`
```

Las demás tablas técnicas están a disposición, por una razón de lugar y claridad se determinó no incorporarlas.