

Salto hidráulico circular

*Faraggi Marisa (marisaf77@hotmail.com) y Sapoznik Marysol (marysol@gecuat.gov.ar)
Práctica especial laboratorio 5 -Curso de verano 2001- UBA*

Comúnmente se puede observar, por ejemplo en una pileta de cocina, que un chorro de líquido cayendo verticalmente sobre un plano horizontal se esparce radialmente en una forma muy particular. Alrededor del punto de impacto existe una zona circular en la que una fina capa de líquido se mueve en forma radial y a gran velocidad. En el borde de esta región la capa de líquido se vuelve abruptamente más gruesa y en consecuencia fluye radialmente con una velocidad mucho menor. Esto es lo que se llama “Salto Hidráulico”. En el presente se investigan algunas de leyes que gobiernan la posición del salto hidráulico, utilizando conceptos elementales de hidrodinámica y se compara una de las aproximaciones presentadas por Brechet-Néda [1] con los resultados experimentales. La experiencia concuerda con la aproximación que se hace de este modelo, de modo que es apropiada para el estudio de algunos conceptos de mecánica de fluidos.

Introducción

En el presente informe se trata sobre el salto hidráulico (SH) que se origina cuando un chorro de líquido golpea una superficie plana. Este es un ejemplo de un problema de condiciones de contorno libre en mecánica de fluidos. Además es un hecho cotidiano dado que al abrir una canilla se puede observar sobre la superficie plana de la pileta la formación del salto hidráulico, en este caso al poseer bordes la pileta, la altura del agua acumulada supera la altura del salto ocasionando que este desaparezca.

La posición del salto depende entre otros del caudal de líquido incidente y de la viscosidad cinemática. La forma del mismo es circular si la superficie de incidencia se mantiene perpendicular al chorro, de otra forma se generan distintos elipses, hecho que no vamos a estudiar en este informe.

El fenómeno de SH presenta interés no solo desde el punto de vista científico sino también en aplicaciones

tecnológicas. La turbulencia que se genera después del SH se utiliza para mezclar fluidos o para la oxigenación de agua. La energía de disipación en el contorno del salto permite reducir la energía cinética del flujo.

Existen varios aspectos interesantes que pueden ser estudiados en el SH:

-el perfil del flujo en una región de fluido laminar, antes que el salto ocurra.

-el flujo en la región turbulenta.

-el mecanismo por el cual se origina el salto.

-la energía de disipación en la zona del salto.

-la forma funcional del radio del salto dependiente de:

*la velocidad de impacto del chorro

*el caudal del chorro

*densidad y viscosidad del líquido

*condiciones de contorno del problema generadas por la forma y el tamaño de la superficie de impacto.

-las ondas en la superficie libre alrededor del SH y su dependencia con la tensión superficial del líquido.

Históricamente Lord Rayleigh fue el primero en tratar de encontrar la solución a estos problemas en su teoría de flujo de agua superficial, donde plantea que en el salto, el flujo del fluido y el flujo de momento se deben conservar, mientras que el flujo de energía no se conserva.[2] Desde allí se han sucedido cierta cantidad de trabajos que enfocan el problema desde un punto netamente teórico o netamente experimental y en algunos casos combinándolos. [1][3]

Nuestro trabajo consiste en verificar la validez de la ley de escala para el radio del salto en función del caudal deducida de las condiciones de contorno del salto y considerando el balance de energía.

Desarrollo experimental

Como se mencionó anteriormente, nuestro objetivo es estudiar el comportamiento del radio del SH en función del caudal, por tal razón fue necesario generar caudales constantes. El método que se utilizó para conseguir los caudales consistió en obtener mediante un sensor de fuerza el peso de la masa de agua en función del tiempo pues esta es proporcional al caudal, es decir se colocó un recipiente cilíndrico lleno de agua pendiendo del sensor (figura 1). Al destapar la parte inferior, comienza a salir el líquido de la botella, esta variación se recolecta mediante el sensor que envía una señal al MPLI. Para obtener distintos caudales se varió el diámetro de los tubos de salida.

Además se colocó un tubo en el interior de la botella desde su extremo superior, para poder controlar la presión en algún punto del líquido, siendo esta la presión externa.

Una vez determinados los caudales se procede a la medición de los radios del SH.

En la figura 2 se observa el dispositivo utilizado para la medición del radio. Básicamente se tiene una botella sujeta por un sistema a la pared, para evitar o disminuir cualquier tipo de oscilación. Debajo de esta se encuentra la superficie de impacto, que en nuestro caso consistió en una placa de acrílico con un papel milimetrado ubicado debajo. Las dimensiones de esta deben ser de por lo menos tres veces el radio del salto para desprejar condiciones de borde.

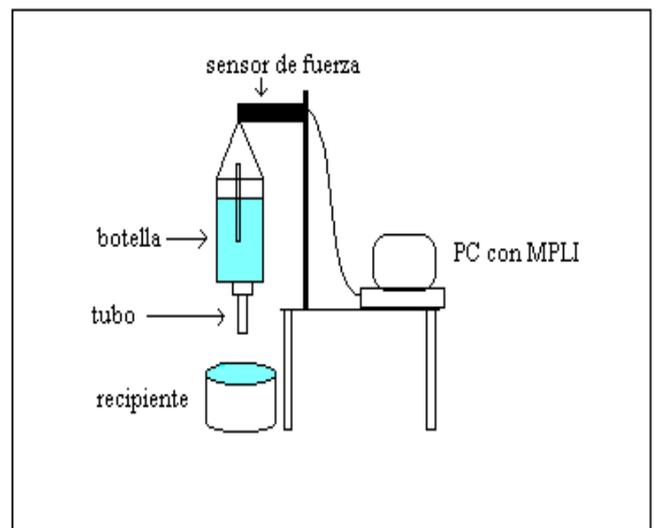


Figura 1: dispositivo que se utilizó para la calibración.

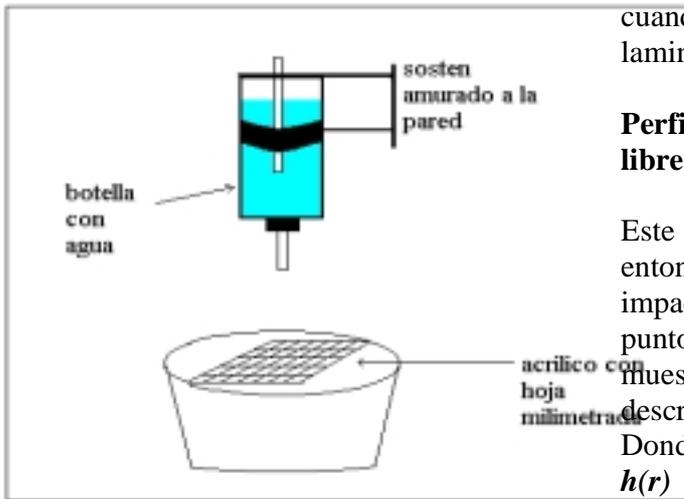


Figura 2: dispositivo utilizado para la medición del radio del SH.

Las dimensiones de las magnitudes involucradas son las siguientes: la placa de acrílico es de 30cm x 30cm, la botella tiene una capacidad de 2.25 litros, la distancia entre la superficie de impacto y la salida del chorro fue de 45cm y los diámetros de salida fueron desde los 0.33cm hasta 0.9cm.

Se trabajó en el sistema c.g.s. por lo tanto el valor de la viscosidad cinemática utilizado es $9.08 \cdot 10^{-3}$ gr/cm.seg.

Desarrollo teórico [1][3]

Para encontrar la ley que rige el comportamiento del radio del salto hidráulico en función de parámetros tales como caudal, viscosidad cinemática, gravedad y distancia d (Fig. 3) seguimos el siguiente desarrollo.

Para determinar el perfil de velocidades y el perfil del flujo $h(r)$ en un fluido laminar viscoso se utilizan fuertemente las condiciones de contorno del mismo.

El número de Reynolds para el salto de agua es: $Re \approx 4 \cdot 10^4$. Por lo tanto el número de Reynolds que se utiliza aquí esta por debajo de $\approx 3 \cdot 10^5$, el que nos indica

cuando ocurre la transición de flujo laminar a turbulento.

Perfil de velocidades de una superficie libre de un flujo viscoso laminar

Este problema posee simetría cilíndrica, entonces la posición sobre el plano de impacto estará dada por la distancia r al punto de impacto. En la figura 3 se muestran la notación con la que se describe el salto hidráulico.

Donde $v(x)$ es el perfil de velocidades, $h(r)$ es la altura del líquido a una distancia r del punto de impacto de chorro, R es el radio del SH, d es la distancia desde la salida del tubo hasta la superficie de impacto y Q el caudal que se considera constante.

Para fluidos reales, el perfil de velocidades de una superficie libre de flujo es generalmente auto semejante, esto quiere decir que satisface la condición:

$$v = f\left(\frac{r}{h}\right) \tag{1}$$

en la que h puede depender de r , pero la forma de la función f es independiente de r . El perfil de velocidades también debe satisfacer las siguientes condiciones de contorno:

$$v = 0 \text{ en } r = R \tag{2}$$

$$\frac{dv}{dr} = 0 \text{ en } r = 0 \tag{3}$$

Por supuesto que existen muchas funciones que satisfacen las condiciones antes mencionadas (1)-(3), en este caso se considerara una de las más simples de todas las posibles, la cual es una polinomial de segundo orden en la variable x/h :

$$v = \frac{Q}{2\pi r h} \quad (4)$$

La velocidad del flujo en la superficie libre $v(h)$ puede hallarse introduciendo (4) en la ecuación de continuidad

$$Q = 2\pi r \int_0^h v \, dx \quad (5)$$

obteniendo:

$$v = \frac{3Q}{4\pi h^3} |x - x^2| \quad (6)$$

Perfil de flujo de una superficie libre de un flujo viscoso laminar

Con el objetivo de obtener el perfil de flujo $h(r)$, se estudia a continuación el balance de energías. La energía de disipación en un elemento de volumen situado entre r y $r+dr$ con una altura entre x y $x+dx$, se puede expresar en función de ambas componentes, como la disipación asociada a la viscosidad y a la divergencia del flujo de energía cinética. La proporción de energía de disipación que se tiene en ese elemento de volumen puede escribirse como:

$$d^2 W_d = \mu \frac{dv}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} dx dr \quad (7)$$

El flujo de la energía cinética en el elemento de volumen está dado por:

$$dJ = \rho r v \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dr \quad (8)$$

Integrando las ecuaciones (7) y (8) se obtiene la proporción de la disipación dW_d entre r y $r+dr$, y el flujo de energía cinética $J(r)$ a través de una superficie cilíndrica de altura $h(r)$ y radio r , respectivamente,

$$dW_d = \mu \frac{dv}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \frac{3}{2\mu} \frac{mQ^2}{h^3 r} dr \quad (9)$$

$$J = \int_0^h \rho v \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dr = \frac{27}{140 \mu^2} \frac{r Q^3}{h^2 r^2} \quad (10)$$

La relación del balance de energías es $J(r+dr) - J(r) + dW_d = 0$, conduce a la siguiente ecuación:

$$\frac{dJ}{dr} + \frac{dW_d}{dr} = 0 \quad (11)$$

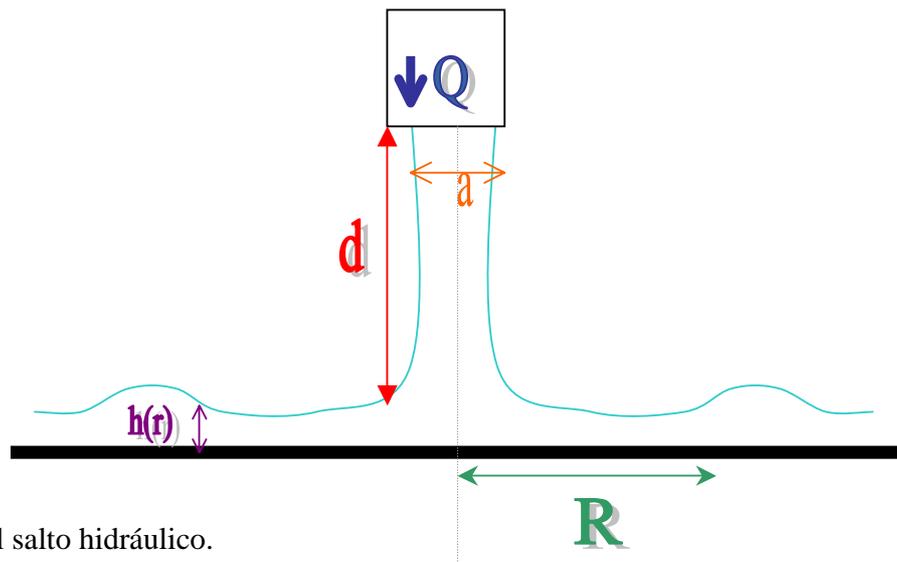


Figura3: Perfil del salto hidráulico.

La diferenciación en (11) nos lleva a una ecuación diferencial soluble

$$\frac{h}{r} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) = b \quad (12)$$

donde

$$b = \frac{35 \rho m}{9 r Q} \quad (13)$$

Entonces la solución de la ecuación anterior es:

$$h = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{C}{r}} + \frac{C}{r} \quad (14)$$

Con C constante de integración.

Como ya se mencionó, la forma cuadrática del perfil de velocidades fue elegida un poco arbitrariamente. Hay muchas funciones posibles que satisfacen las condiciones de contorno impuestas y la ec.(1). Pero se presume que la elegida puede ser la que se aproxime a la realidad. Si se usan las mismas ecuaciones (2) y (3) para f y haciendo uso del principio de la conservación del momento para determinar el perfil de flujo se llega a la ecuación (11), pero el coeficiente b difiere en un factor de 54/35 del obtenido para los argumentos de energía. Esta diferencia es la muestra de que la función f no es realmente parabólica, sin embargo es una buena primera aproximación.

Cuando se escribió el balance de energías (11), se omitieron las contribuciones de la energía gravitacional, la energía potencial y la tensión superficial. Despreciar la tensión superficial en un régimen de flujo laminar es aceptable debido al hecho de que la altura de la capa del fluido es mucho menor que el promedio del radio de curvatura de la

superficie libre. Cuando se consideren detalles en una superficie libre como en las onditas estacionarias alrededor del salto hidráulico, se deberán tener en cuenta esos efectos capilares. En cuanto a los efectos gravitatorios se refiere, son naturalmente despreciables en un régimen de flujo laminar pues la altura de la capa de líquido varía lentamente.

Sin embargo ambos efectos son probablemente importantes cerca de punto de impacto, y para determinar la altura y forma del salto hidráulico.

El radio del salto hidráulico

Una aplicación elemental del teorema de Bernoulli muestra que la velocidad radial de un líquido después del salto hidráulico es uniformemente igual a la velocidad $u = (2 d g)^{1/2}$ del chorro incidente $v = u$. Pero para pequeños r, en fluidos viscosos, donde el chorro se esparce hacia los laterales con una velocidad $v_0 = (2 d g)^{1/2}$ en forma laminar como si fuera no viscoso, excepto en la capa límite cerca de la superficie plana. [1]. El espesor de esta capa límite puede aproximarse por

$$\delta = \frac{\nu}{v_0} = \frac{\nu}{\sqrt{2 d g}}$$

El caudal dentro de la capa límite puede describirse como un flujo viscoso laminar, y por encima de esta se describe como un flujo laminar con velocidad v_0 [4]. Se puede conjeturar que el salto hidráulico ocurre cuando la capa límite alcanza la altura total del film del fluido.

Con el fin de obtener el radio R como función de los parámetros anteriormente mencionados se asume que el espesor δ de la capa límite, de un flujo viscoso, justo antes del salto es igual al valor del perfil del flujo en $r=R$.

$$d = \frac{Q}{v} \quad h = R \quad (15)$$

Por lo tanto el radio del salto hidráulico se obtendrá de la igualdad:

$$h(R) = \delta R$$

El problema que aparece aquí es la forma (14) de $h(R)$ la cual contiene una constante de integración indeterminada: C. Sin embargo en la región del salto el segundo término de la ecuación (14) se supone que es mucho menor que el primero, y haciendo una primera aproximación puede ser despreciado. De este modo se llega a:

$$\frac{b}{3} R^2 = \frac{Q^n}{2 g d} \quad (16)$$

la que finalmente nos da el radio:

$$R = \left(\frac{3}{b} \frac{Q^n}{2 g d} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

Resultados y Análisis

Algunas de las señales obtenidas utilizando el sensor de fuerza se muestran en la figura 4. En la tabla 1 se especifican los caudales hallados para los distintos tubos de salida y se puede afirmar que la determinación de los mismos es confiable debido a su bajo error.

Diámetro de salida (cm)	Caudal $Q(\text{cm}^3/\text{seg})$
0.33 ± 0.01	21.40 ± 0.01
0.41 ± 0.01	28.25 ± 0.01
0.48 ± 0.01	40.25 ± 0.02
0.50 ± 0.01	51.35 ± 0.04

0.60 ± 0.01	61.41 ± 0.05
0.71 ± 0.01	65.05 ± 0.05
0.90 ± 0.01	149.6 ± 0.4

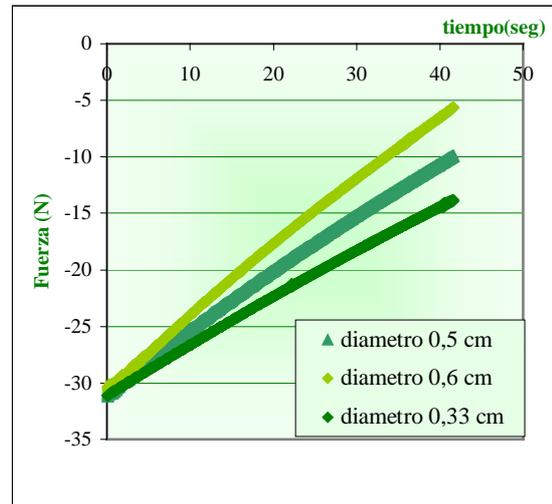


Figura 4: Señales obtenidas con el sensor de fuerzas- MPLI

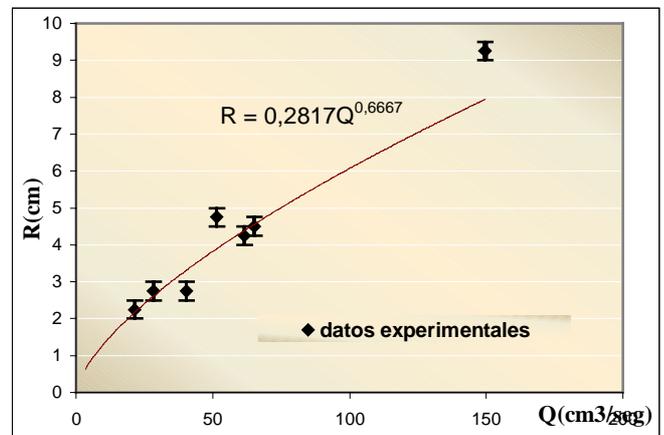


Figura 5: Dependencia del radio del SH con el caudal.

En la figura 5 se pueden ver los radios experimentales obtenidos para el salto hidráulico en función de los distintos caudales. Conjuntamente a estos se muestra la curva teórica predicha por la ecuación 17.

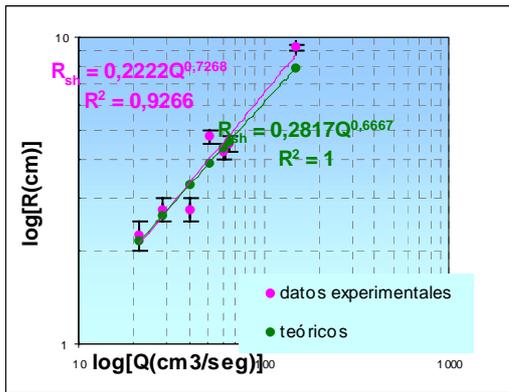


Figura 6:utilizando una escala log-log se muestra la dependencia del radio con el caudal y los respectivos valores teóricos.

Para realizar una comparación entre los datos empíricos y la curva teórica realizamos la figura 6 en donde se utilizan escalas logarítmicas en ambos ejes, de la cual se encuentra la forma funcional entre el radio y el caudal.

Conclusiones

En primer lugar se quiere notar que la realización de esta experiencia parece no requerir conocimientos avanzados para su desarrollo, pero es necesario contar con una base de dinámica de fluidos que solo se adquiere en un curso especializado. Como se puede observar de la figura 5 los resultados experimentales presentan una línea de tendencia con la forma funcional hallada por medio del desarrollo teórico. Notamos que el alejamiento del último punto se origina debido a que el radio del salto se encuentra en el límite de las aproximaciones realizadas. Descartando que este alejamiento se produzca por el error introducido al determinar el caudal ya que el mismo es sólo del 0.26%. Aprovechando que la ley de escala que rige el modelo es exponencial se realizo

la figura 6 que nos facilitó comparar la teoría con los resultados experimentales. Para completar la caracterización del salto hidráulico sería interesante repetir esta experiencia con líquidos de distintas viscosidades y para distintas alturas de la salida del fluido.

Una alternativa para medir el radio del salto hidráulico es tener un sistema de cámara digital y un programa de computación que permita determinar distancias sobre la imagen con mayor precisión, como por ejemplo las utilizadas en estudios médicos.

Como última sugerencia para mejorar el experimento es posible determinar experimentalmente la forma del perfil del fluido utilizando una técnica óptica. Esta requeriría de la utilización de un láser y un fotodiodo.

Agradecimientos

Dedicamos esta sección a todas las personas que hayan acercado un critica o sugerencia para el desarrollo de esta experiencia, entre ellos a Eduardo Rodríguez.

Referencias

- [1]Y.Brechet, Z.Néda. “On the circular jump”Am.J. Phys.67, N°8,723-731 (1999).
- [2] el sitio en la web : www.nbi.dk
- [3] R.P.Godwin, “The hydraulic jump(shocks and viscous flow in the kitchen sink)” Am.J. Phys.61, N°9,829-832 (1993).
- [4] D.J.Acheson “Elementary fluid dynamics”1990. Oxford University Press.