

# ANILLO DE THOMSON

María Silvia Soto – [msoto@cbc.uba.ar](mailto:msoto@cbc.uba.ar)

Augusto Roncaglia - [augusto@labs.df.uba.ar](mailto:augusto@labs.df.uba.ar)

Laboratorio 5 – Cátedra: Dr. S. Gil

Departamento de Cs. Físicas – Facultad de Cs. Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires – Argentina

El objetivo del siguiente trabajo se centró en el estudio de la fuerza de Lorentz que siente un anillo de aluminio en presencia de un campo magnético: Anillo de Thomson. Este aparato está compuesto por un solenoide con un núcleo de ferrite y un anillo de aluminio. Previo desarrollo teórico se intenta comprobar que dicha “fuerza media” se debe a la diferencia de fase entre el campo radial producido por el solenoide y la corriente inducida en el anillo mediante medición directa de las mismas. Se intenta también analizar su dependencia con la corriente, la frecuencia y la distancia.

## I. TEORÍA

La parte teórica fue trabajada por Saslow<sup>1,2</sup>. Si alimentamos a nuestro solenoide con corriente alterna  $I_s = I_{s0} \sin(\omega t)$ , donde  $\omega = 2\pi f$ . Este producirá un campo magnético que de acuerdo a la ley de Faraday la componente axial alterna inducirá una fem  $\mathbf{e}$  en el anillo. Si la impedancia del anillo es  $Z$ , la corriente que circulará por el mismo será:

$$I_r = \frac{\mathbf{e}}{Z} = \frac{M\omega I_{s0}}{R_r + \omega^2 L_r} [R_r \cos(\omega t) + \omega L_r \sin(\omega t)] \quad (1)$$

donde  $M$  es la inductancia mutua entre el solenoide y el anillo,  $R_r$  es la resistencia del anillo, y  $L_r$  es la inductancia del anillo en presencia del solenoide y el núcleo. La fuerza de Lorentz que siente el anillo está dada por:

$$\vec{F} = \oint I_r d\vec{l} \times \vec{B}_r = 2\pi a I_r [B_r(z)] \hat{z} \quad (2)$$

donde  $a$  es el radio del anillo y  $B_r$  la componente radial del campo magnético producido por el solenoide. Esta se puede escribir como<sup>3</sup>:

$$B_r(z) = -\frac{\mathbf{r}}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3)$$

La componente vertical del campo en el centro del núcleo está dada aproximadamente por  $\vec{B}_r(0) = \mathbf{m} n I_s \hat{z}$ , donde  $n$  es la cantidad de espiras por unidad de longitud,  $\mathbf{m}$  la permeabilidad efectiva del núcleo (se asume que esta conserva la linealidad). Como  $B_r$  es proporcional a la corriente en el solenoide  $I_s$  podemos escribir:

$$\vec{F} \propto \frac{2\pi a m M \omega I_{s0}^2}{R_r^2 + \omega^2 L_r^2} \{R_r \cos(\omega t) \sin(\omega t) + \omega L_r \sin^2(\omega t)\} \hat{z} \quad (4)$$

El término  $\sin(\omega t) \cos(\omega t)$ , igual a  $\frac{1}{2} \sin(2\omega t)$ , representa a la componente de la fuerza que oscila con frecuencia  $2\omega$ , es la parte de la corriente que circula por el anillo que está desfasada  $90^\circ$  con la corriente que circula en el solenoide. Esta fuerza tiene un promedio temporal igual a cero. El término que contiene  $\sin^2(\omega t)$ , igual a  $\frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))$ , es igual a  $\frac{1}{2}$  si promediamos en un ciclo y produce una fuerza promedio distinta de cero debido a la diferencia de fase producida por la parte inductiva:

$$\langle \vec{F} \rangle \propto \pi a m \frac{M}{L_r} I_{s0}^2 \frac{\omega^2 L_r^2}{R_r^2 + \omega^2 L_r^2} \hat{z} = \pi a m \frac{M}{L_r} I_{s0}^2 \sin^2 \mathbf{d} \hat{z} \quad (5)$$

donde la diferencia de fase  $\mathbf{d}$  de la corriente

inducida está dada por:

$$\text{sen } \mathbf{d} = \frac{\mathbf{w} L_r}{(R_r^2 + \mathbf{w}^2 L_r^2)^{1/2}} \quad (6)$$

Si la amplitud de la corriente  $I_{s0}$  (hay que destacar que esta depende fuertemente de la presencia del anillo), la inductancia mutua  $M$ , la permeabilidad  $\mathbf{m}$  y la distancia del anillo al solenoide permanecen constantes, las ecuaciones (5) y (6) predicen que la fuerza es proporcional a  $\text{sen}^2(\delta)$ , que se puede escribir como:

$$\langle F \rangle \propto \text{sen}^2 \mathbf{d} = \frac{1}{\left(\frac{R_r}{\mathbf{w} L_r}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\left(\frac{\mathbf{w}_c}{\mathbf{w}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 + 1} \quad (7)$$

donde  $\mathbf{w}_c = R_r / L_r$  que llamamos “frecuencia angular de corte”. De la ecuación (7) se pueden distinguir los siguientes límites:

$$\left(\mathbf{w} \ll \frac{R_r}{L_r}\right) \quad \mathbf{d} \approx \mathbf{w} \frac{L_r}{R_r}, \quad \text{sen}^2 \mathbf{d} \approx \mathbf{w}^2 \left(\frac{L_r}{R_r}\right)^2, \quad (8a)$$

$$\left(\mathbf{w} = \mathbf{w}_c = \frac{R_r}{L_r}\right) \quad \mathbf{d} = 45^\circ, \quad \text{sen}^2 \mathbf{d} = \frac{1}{2}, \quad (8b)$$

$$\left(\mathbf{w} \gg \frac{R_r}{L_r}\right) \quad \mathbf{d} \rightarrow 90^\circ, \quad \text{sen}^2 \mathbf{d} \rightarrow 1. \quad (8c)$$

Para frecuencias mucho menores que la frecuencia de corte, la fuerza depende cuadráticamente de la frecuencia y la resistencia del anillo, para frecuencias considerablemente mayores a la frecuencia de corte esta alcanza un límite que es independiente de la resistencia del anillo.

## II. ARREGLO EXPERIMENTAL

El dispositivo está compuesto por un solenoide de 7 cm de altura de 340 vueltas de cable de cobre de 1 mm de diámetro dispuestas

en 5 capas, su resistencia es de 1,5  $\Omega$ . El núcleo es un cilindro de ferrite de 19,7 cm de altura y 18 mm de diámetro. Se armó el dispositivo como indica la figura 1. El anillo que se utilizó es de aluminio de 25 mm de diámetro externo, 3 mm de espesor y 9 mm de longitud. Este es sostenido por un caño de p.v.c., que está apoyado sobre una balanza electrónica. Al suministrarle corriente al solenoide este produce una fuerza sobre el anillo que es medida directamente con la misma. Dicho tubo es lo suficientemente largo para evitar alteraciones en la balanza debido al campo magnético.

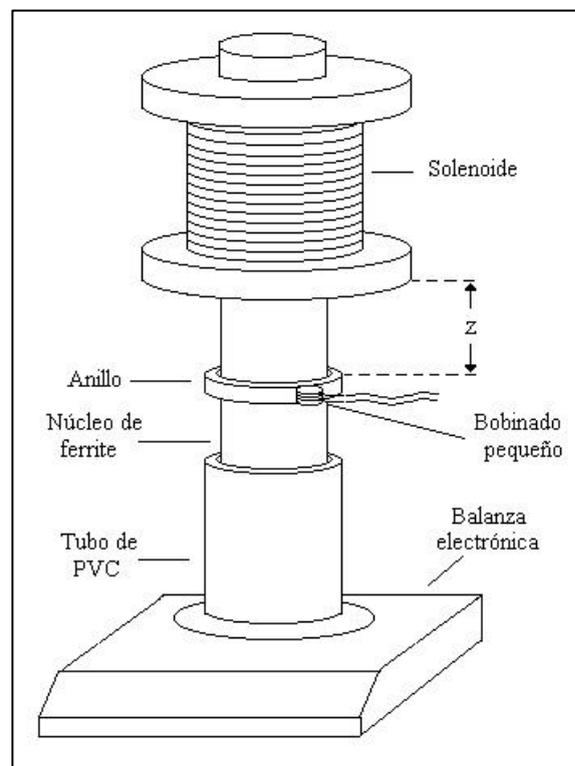


Fig.1. Arreglo experimental.

## III. MEDICIONES

Se comenzó haciendo las mediciones correspondiente a la fuerza en función de la corriente que circula por el solenoide. Con lo cual se conectó en serie con el solenoide un multímetro y en serie con el mismo un Variac, cerrando el circuito. Se mantuvieron constante: la distancia entre el solenoide ( $z$ ) y el anillo y la frecuencia (50 Hz). Luego para cada valor

de corriente se midió la fuerza media con la balanza. Es importante destacar que no se debe utilizar el aparato mucho tiempo con corrientes altas ya que el anillo se calienta y por lo tanto varía su resistencia, que necesitamos constante para nuestras mediciones.

Luego, se procedió a hacer las mediciones de la fuerza en función de la distancia  $z$ . Manteniendo la corriente constante, al igual que la frecuencia. Se movió el anillo a lo largo del núcleo y se midió la fuerza en los distintos puntos.

Posteriormente se hicieron las mediciones correspondientes a la fuerza en función de la frecuencia. Para variar la frecuencia de la corriente alterna se utilizó un amplificador de audio. Con lo cual, se conectó un generador de funciones (Stanford Research Systems DS345) a la entrada de dicho amplificador y la salida en serie con una resistencia y el solenoide. La corriente se midió sabiendo la caída de potencial sobre dicha resistencia con un osciloscopio (Tektronix TDS 340 A) que también fue usado para medir el valor de la frecuencia. La corriente fue fijada en 0,5 A. Luego variando la frecuencia y ajustando la amplitud del voltaje suministrado de forma de mantener la corriente constante (ya que la impedancia del circuito varía con la frecuencia), se hicieron las mediciones de la fuerza en distintos valores de  $z$ .

Finalmente, se realizaron las mediciones de la diferencia de fase  $d$ . Para lo cual se utilizó un bobinado pequeño de 2,5 mm de diámetro y 20 vueltas de cable de cobre, como indica la figura 1. De esta manera, debido al campo producido por el anillo se produce una variación de flujo en el bobinado y así una fem inducida. La señal proveniente del bobinado fue amplificada y luego conectada al osciloscopio, al integrarla esta señal es proporcional a la corriente que circula por el anillo.

## IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### A. Fuerza en función de la corriente

Con una frecuencia fija de 50 Hz se hicieron las mediciones para tres valores de  $z$ . El

comportamiento esperado es el propuesto por la ec. (5), suponiendo todo constante menos la corriente, la fuerza depende cuadráticamente de la corriente. Los resultados obtenidos se grafican en las figuras 2 y 3. La totalidad de los datos obtenidos se encuentra en la figura 2, donde se resalta el rango de comportamiento cuadrático, más allá de este el comportamiento es otro, esto puede deberse a la saturación del núcleo. En la figura 3 se observan los datos dentro de este rango y las curvas que aproximan el comportamiento cuadrático.

Para ver si lo que suponíamos era cierto, observamos cómo variaba el campo magnético generado por el solenoide con la corriente aplicada. Se bobinó cable de cobre fino alrededor de un anillo como el nuestro pero cortado (de forma que no halla fem inducida sobre el mismo) se conectó la salida a un osciloscopio, y se lo colocó dentro del aparato.

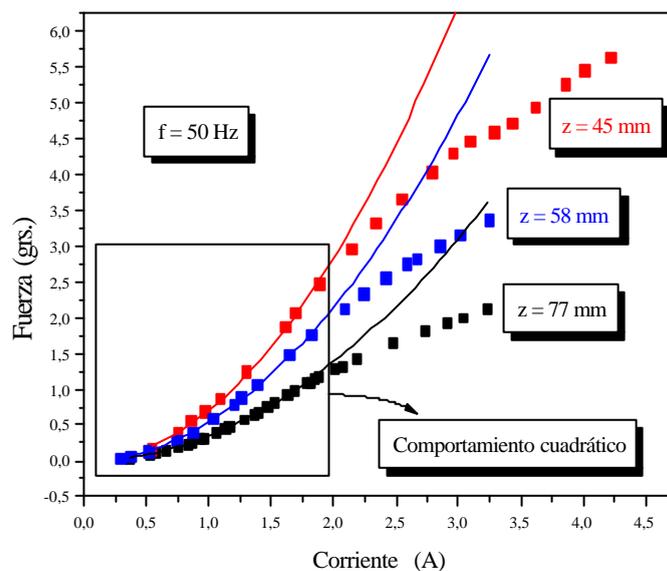


Fig. 2 . Fuerza en función de la corriente para los distintos valores de  $z$ . Los puntos en la zona que se indica fueron aproximados por una función de la forma  $y = a \cdot x^2$ .

Luego se suministró corriente al solenoide, y se procedió a medir la fem inducida sobre el bobinado. Esta señal integrada es proporcional al campo magnético producido por el solenoide. Por otro canal del osciloscopio se adquirió la caída de potencial sobre una resistencia (voltaje

proporcional a la corriente). La frecuencia se mantuvo fija en 50 Hz al igual que la distancia  $z$  al solenoide. Luego de realizar las mediciones integró la señal

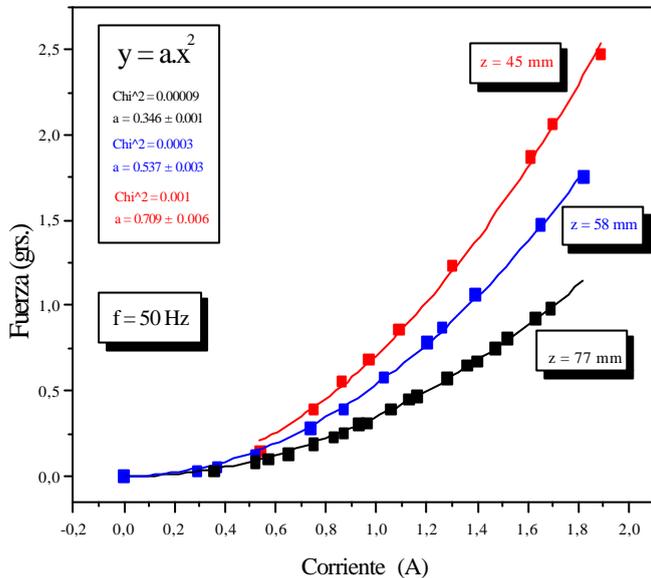


Fig. 3. Gráfico del rango de comportamiento cuadrático de la fuerza en función de la corriente.

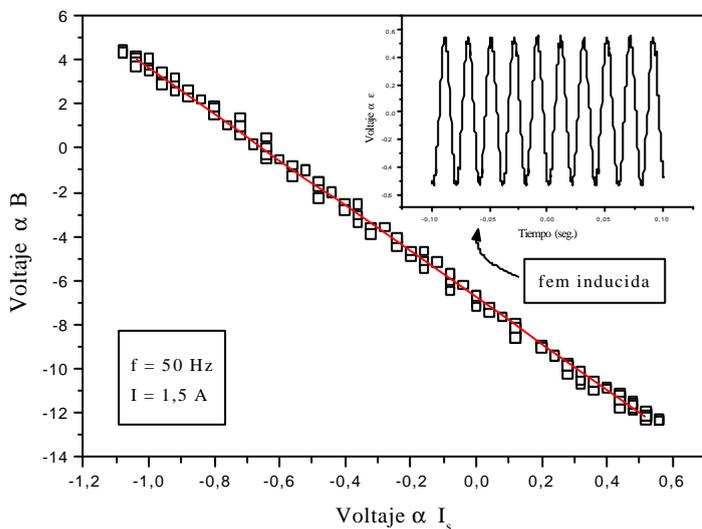


Fig. 4. Gráfico de  $B$  vs.  $I$  para una corriente de 1,5 A. También se muestra la señal proveniente de la fem inducida.

proveniente del bobinado y se construyeron los gráficos como los que se observan en las figuras 4 y 5. Para corrientes menores a 2 A lo que se obtuvo fue un comportamiento lineal entre la corriente suministrada y el campo magnético

generado, figura 1. Para corrientes mayores a 2 A se obtuvieron gráficos donde se evidencia una saturación al alcanzar el valor máximo de corriente suministrada en la oscilación, figura 2. También se puede observar en la figura como se deforma la señal para dicha corriente. Otro

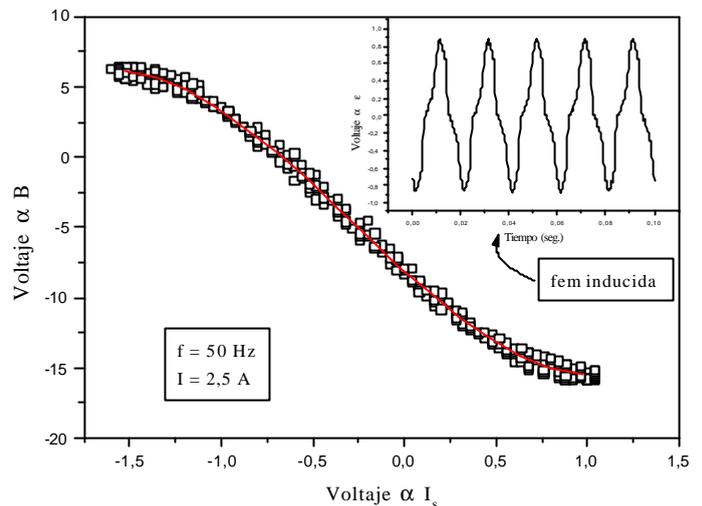


Fig. 5.  $B$  vs.  $I$  para una corriente de 2,5 A, en este gráfico se advierten los puntos donde comienza la saturación. También se observa la señal proveniente de la fem inducida y como esta se deforma.

dato importante es que la pendiente de la recta y la pendiente (dentro del rango lineal) del otro gráfico son aproximadamente iguales. Si  $I_s$  es proporcional a  $H$ , y la permeabilidad diferencial es  $dB/dH$ , observamos que para corrientes menores a 2 A esta es constante. Pero para corrientes mayores esta deja de serlo y en promedio temporal es menor a lo que debería ser si esta no variase ya que a este promedio aporta la parte donde la derivada disminuye (debido a la saturación). Por lo tanto vemos que en nuestro gráfico los datos obtenidos se apartan de un comportamiento cuadrático, y al hacerse menor la permeabilidad la fuerza aumenta con la corriente pero más débilmente.

## B. Fuerza en función de la distancia

Se fijó la corriente en 1,8 A y la frecuencia en 50 Hz. Luego, se midió la fuerza para distintos valores de  $z$ . Los datos obtenidos se

encuentran en la figura 6. Estos fueron aproximados por una función exponencial decreciente (no tenemos un desarrollo teórico para esta dependencia), hasta un punto a partir del cual la fuerza comienza a decrecer más fuertemente.

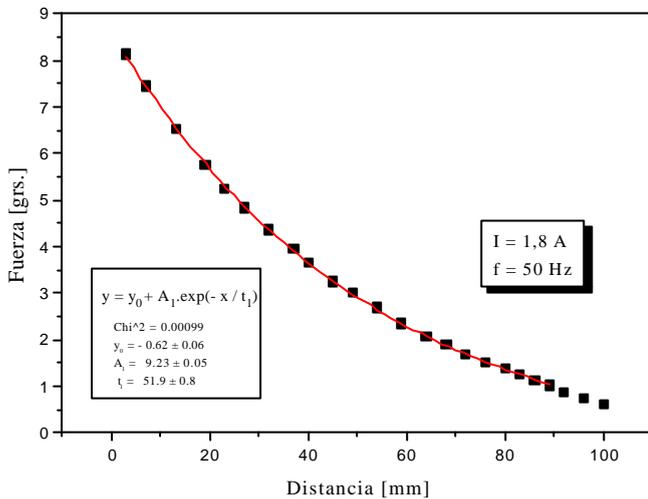


Fig. 6. Fuerza en función de la distancia y ajuste de los datos mediante una función exponencial decreciente.

### C. Fuerza en función de la frecuencia

Para estas mediciones se fijó la corriente en 0,5 A y se hicieron para algunos valores de  $z$ , como indica la figura 7. El comportamiento esperado se encuentra descrito por la ec. (7). Con lo cual se aproximaron los datos obtenidos por una función de la forma  $y = a / [(f_c / f)^2 + 1]$ , ( $a$  y  $f_c$  son constantes), de esta forma encontramos los distintos valores de frecuencia de corte para las distintas distancias al solenoide. Observamos como la frecuencia de corte aumenta de 56 Hz a 12 mm del solenoide a 95 Hz a 93 mm (tabla 1). Con lo cual la inductancia del anillo en presencia del núcleo varía con la distancia. Si la resistencia del anillo calculada es aproximadamente de  $5,8 \cdot 10^{-5} \Omega$  (usando que la resistividad del aluminio es de  $r = 2,655 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{mm}$ ) y la autoinductancia<sup>4</sup> del anillo fuera del aparato es aproximadamente de  $1,8 \cdot 10^{-8} \text{ H}$ . Por lo tanto esta aumenta estando en el solenoide con el núcleo de  $9,75 \cdot 10^{-8} \text{ H}$  a 93 mm a  $1,65 \cdot 10^{-7} \text{ H}$  a 12 mm.

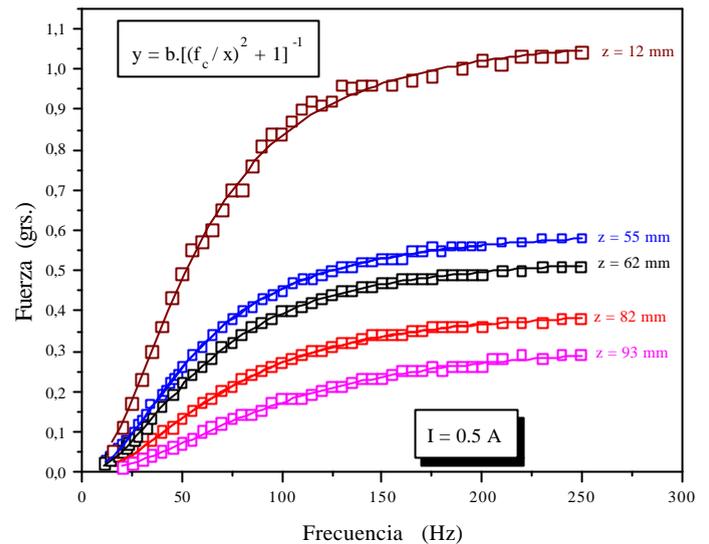


Fig. 7. Fuerza en función de la frecuencia y ajuste de los datos.

| $z$ (mm) | $f_c$ (Hz) | $L_r$ (H)            |
|----------|------------|----------------------|
| 12       | 56         | $1,65 \cdot 10^{-7}$ |
| 55       | 58         | $1,60 \cdot 10^{-7}$ |
| 62       | 62         | $1,49 \cdot 10^{-7}$ |
| 72       | 73         | $1,27 \cdot 10^{-7}$ |
| 93       | 95         | $9,75 \cdot 10^{-8}$ |

Tabla 1. Valores de  $f_c$  y  $L_r$  para los distintos valores de  $z$ . El error estimado para cada frecuencia es de 4 Hz.

### D. Fase en función de la frecuencia

Para la realización de estas mediciones se utilizó un bobinado pequeño como el que se observa en la figura 1. El mismo fue colocado, junto con el anillo, a una distancia de 93 mm del solenoide de forma que la contribución a la fem inducida sobre el bobinado sea proveniente mayormente del campo producido por el anillo. La señal de salida amplificada fue conectada a un osciloscopio de esta manera obtuvimos una señal la cual integrada era proporcional a la corriente que circula por el anillo. Al otro canal del osciloscopio le fue conectada una señal (proporcional a la corriente que circula por el solenoide, esta fue fijada en 0,5 A) proveniente

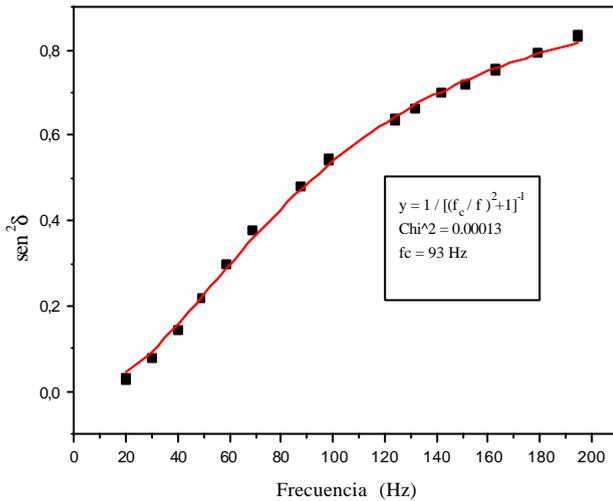


Fig. 8. Gráfico de  $\text{sen}^2 \mathbf{d}$  vs.  $f$ . Los datos fueron ajustados por la función que figura en el gráfico de esta manera se halló la frecuencia de corte para esta distancia.

de la caída de potencial sobre una resistencia conectada en serie con el solenoide. La primer señal fue integrada y luego mediante las figuras de Lissajouse se calculó su desfasaje. En la figura 8 se esquematiza el gráfico de  $\text{sen}^2 \mathbf{d}$  vs. frecuencia, y el ajuste de los datos que están descritos por la ecuación 7. Se puede observar que los datos ajustan en gran forma a la curva predicha. De la misma se puede obtener el valor de la frecuencia de corte que si lo comparamos con el hallado de la medición de fuerza en función de frecuencia entra dentro del rango. También este podría haber sido obtenido de ver que  $\mathbf{d} = 45^\circ$  cuando  $f = f_c$ .

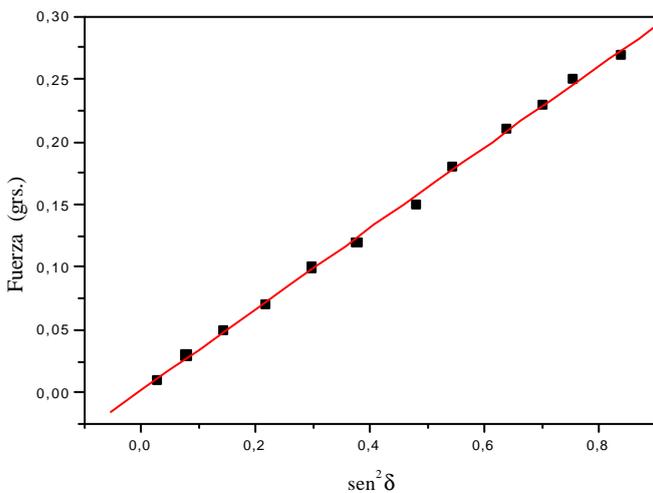


Fig. 9. Gráfico de Fuerza vs  $\text{sen}^2 \mathbf{d}$  y ajuste lineal de los datos.

Luego se hizo un gráfico de fuerza vs.  $\text{sen}^2 \mathbf{d}$ . Esperando obtener un comportamiento lineal como indica la ecuación 5. Se puede observar en la figura 9 que los datos ajustan en gran forma con lo esperado.

## V. CONCLUSIONES

Se pudo observar que la fuerza que siente un anillo conductor dentro de un aparato de Thomson concuerda con la explicación teórica de una fuerza promedio dependiente de la diferencia de fase inductiva proveniente de la corriente del anillo. Mediante la medición directa de esta diferencia de fase y la fuerza se pudieron ajustar los datos a las predicciones teóricas. También se pudo observar la dependencia de la fuerza con los distintos parámetros: la frecuencia, la distancia al solenoide y la corriente. Para las mediciones de esta última se encontraron y verificaron las explicaciones del porque no se ajustan los datos a lo predicho teóricamente fuera de un rango de corrientes.

Quedaría por medir el campo radial producido por el solenoide utilizando un bobinado pequeño como el anterior pero colocado de forma que la fem inducida en el mismo sea debida a dicho campo, de esta forma podríamos llegar a determinar la fuerza sabiendo la corriente que pasa por el solenoide y el radio del anillo.

## REFERENCIAS

- <sup>1</sup> W. M. Saslow, "Electromechanical implications of Faraday's law: A problem collection," Am J. Phys. **55** (11), 986 – 993 (1987).
- <sup>2</sup> P.J.H.Tjossem and V. Cornejo "Measurements and mechanisms of Thomson's jumping ring," Am. J. Phys. **68** (3), 238-244 (2000).
- <sup>3</sup> C.S.Schneider and J. P. Ertel, "A classroom jumping ring," Am. J. Phys. **66** (8), 686 – 692 (1998).
- <sup>4</sup> W.T.Scott, "Física de la electricidad y el magnetismo," Pág. 425, C.E.C.S.A. , 2ª Ed. (1966).