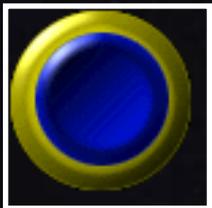


**Precesión
del
perihelio
de
Mercurio**

Relatividad



ENTRAR

General



ÍNDICE



**RELATIVIDAD
ESPECIAL**, (por
J.F. González
Martínez)

 [Introducción](#)

 [Relatividad
General](#)

 [Campos
gravitatorios](#)

 [Movimiento
de Mercurio](#)

 [Precesión del
perihelio](#)

 [Simulación
en *Modellus*](#)

[Agradecimientos](#)

[Links y
bibliografía](#)

[Sugerencias](#)

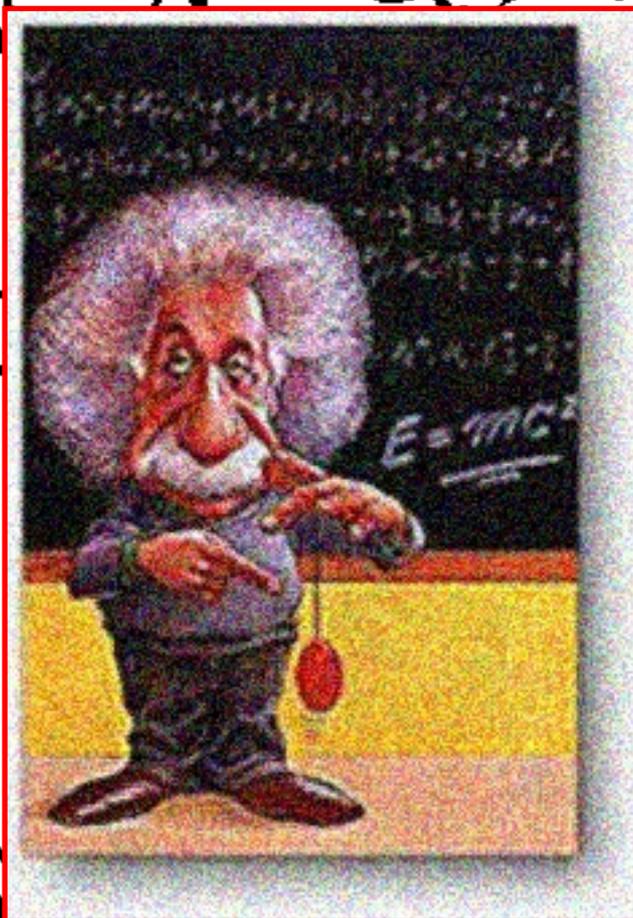
INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta página es mostrar una sucinta introducción a la teoría de la Relatividad General, y más concretamente a los efectos que de ella se derivan en el movimiento de Mercurio.

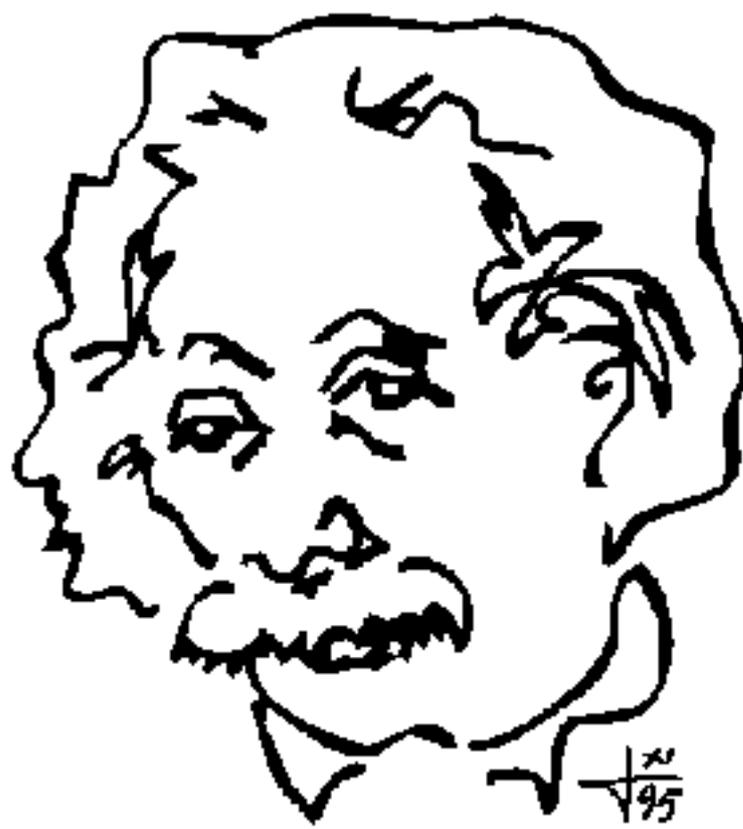
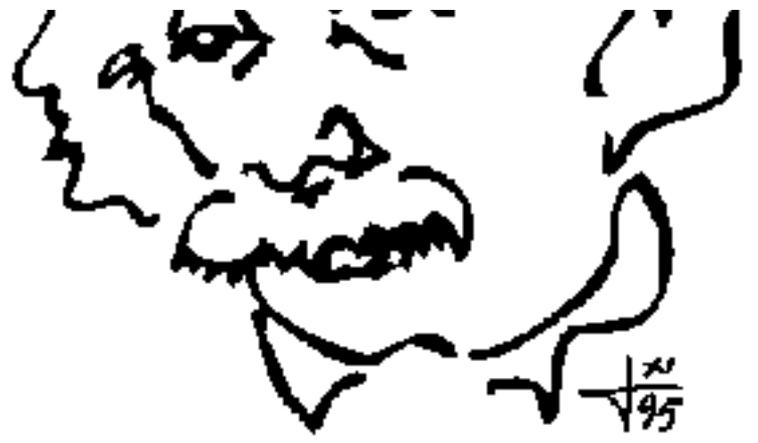
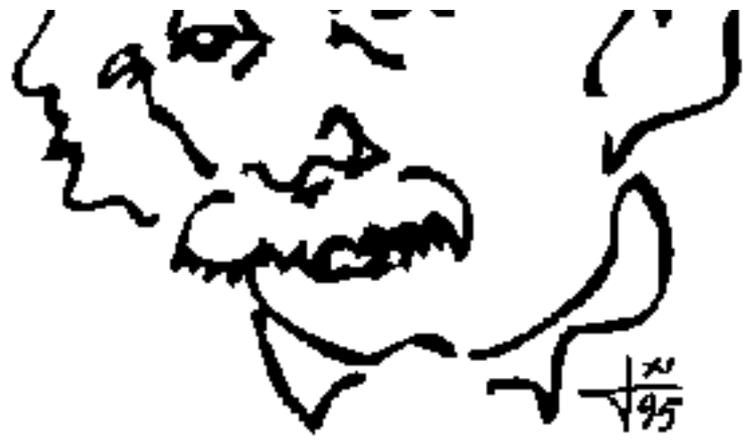
Para ello, se realiza una simulación de la precesión del perihelio de Mercurio en Modellus, por lo que se recomienda la instalación del Programa.

Por otra parte, se supone al lector familiarizado con la teoría de la Relatividad Especial y con conceptos básicos como 'suceso', 'intervalo', 'tiempo propio'... Sin embargo, se ha preferido soslayar el formalismo matemático y centrarse en la interpretación física.

*Un sencillo modelo
Relativista*



A ALBERT EINSTEIN



Indice

1.-La Relatividad Especial:Origen y desarrollo

1.1-Electromagnetismo: En busca del éter

2.-Los experimentos sobre el éter

2.1-Experimento de Michelson-Morley

2.2- La aberración de la luz y el efecto Fizeau

3.- La Teoría de la Relatividad Especial

3.1.-Los nuevos postulados y sus consecuencias

3.1.1-Intervalo

3.1.2-Simultaneidad

3.2.- Tiempo propio

3.3.- La transformación de Lorentz

4.- Mecánica Relativista

4.1.-Momentum lineal y Fuerza

4.2.-Energía

4.3.-Relaciones Energía-Momentum;Función de Hamilton

4.4.-Transformaciones de Lorentz: Energía y Momentum

5.- Las aplicaciones relativistas

5.1- La contracción de FitzGerald-Lorentz

5.2- La dilatación del tiempo

5.3- La expresión relativista de la aberración

5.4- Efecto Doppler

5.4.1- Efecto Doppler longitudinal

5.4.2- Efecto Doppler transversal

[5.5.- El grupo de Lorentz](#)

[5.6.- La formula de Fresnel](#)

[5.7.- El teorema de los relojes](#)

[5.8.- Covariancia de las ecuaciones electrodinamicas](#)

[5.9.- Teoria de la Relatividad y teoria cuantica](#)

[5.10.- Sobre \$E=mc^2\$](#)

[6.-El modelo Relativista](#)

[7.- Relatividad General](#)

[7.1.-El nuevo principio:El principio de Equivalencia](#)

[7.2.-Consecuencias del Nuevo Principio](#)

[8.-Aplicaciones de la Relatividad General](#)

[*8.1.-Solución de Schwarzschild*](#)

[*8.2.-Cosmología*](#)

[*Conclusiones Relativistas*](#)

-

[*Bibliografía*](#)

[*Links*](#)

1.-La Relatividad Especial: Origen y desarrollo

1.1- Electromagnetismo: En busca del éter

Cómo surgió la Relatividad, qué pensamiento llevó en el siglo XIX a Albert Einstein a descubrir una nueva manera de observar el mundo. Son preguntas que aparecen en nuestra mente y que tienen fácil respuesta si volvemos nuestra vista al pasado.

Hacia 1864, [James Clerk Maxwell](#) (1831-1879) estableció las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, denominadas ecuaciones de Maxwell, que resumen todas las leyes del electromagnetismo y llevan a importantes consideraciones sobre la naturaleza electromagnética de la luz. Sin embargo es interesante resaltar aquí el profundo significado de éstas. Como sabemos, es posible formular las ecuaciones de Maxwell en unas condiciones tales que la densidad de carga y la intensidad de corriente eléctrica sean nulas ($\text{div}E=0, j=0$). Tal vez para

nosotros no sea sorprendente ver como las ecuaciones de Maxwell tienen como consecuencia, en las condiciones impuestas, la propagación de una onda electromagnética en el vacío, y determinan una velocidad para tales ondas:

$$c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \text{ (m/s)}$$

Pero para los científicos del siglo XIX, era muy difícil imaginar que la radiación electromagnética se propagara sin necesidad de un medio. Por este motivo, los científicos supusieron la existencia de un medio "luminífero" a través del cual se propagaran las ondas luminosas en el espacio libre, denominado como "éter". En efecto, Maxwell no podía imaginar un campo como un sistema que por sí mismo se estuviese propagando por el medio libre. Pero este medio cuasi fluido no podía tener unas propiedades cualesquiera: debía soportar esfuerzos tangenciales (en contraposición a la misma definición de fluido). Aún así, Maxwell afirmaba: "[...] Siempre que se transmita energía de un cuerpo a otro en el tiempo, debe existir un medio o substancia en el que exista la energía después que abandone uno de los cuerpos y antes de que alcance el otro, porque la energía, como Torricelli hacia notar, *es una quinta esencia de naturaleza tan sutil que no puede estar contenida en ningún recipiente excepto en la sustancia intima de las cosas materiales.* [...] no puede haber duda de que los espacio interplanetarios e interestelares están ocupados por una sustancia o cuerpo material, que es ciertamente el mayor, y probablemente el más uniforme, de todos los cuerpos de que tengamos noticia (J.C.Maxwell, "*Encyclopedia Britannica*", 9ªed., Vol.8, 1878)". Es evidente, que en este estado, la actitud post-maxwelliana (pre-einsteniana con el tiempo llego a preponderar), era que la electrodinamica son las ecuaciones de Maxwell, más la especificación de las densidades de carga y corriente contenidas en dichas ecuaciones, más una conjetura

sobre la naturaleza del éter. Sobre esto último muchos científicos ayudaron a construir la escuela del siglo XX del *plenum*, un éter para la luz, el calor, la electricidad y el magnetismo. Sin embargo, también existían candidatos del siglo XIX para un éter único, algunos anteriores a la teoría de Maxwell, como los éteres de Fresnel, Cauchy, Stokes, Neuman, MacCullagh, Kelvin, Planck, y probablemente otros, que se distinguían entre sí por propiedades tales como el grado de homogeneidad, compresibilidad y proporción en que la tierra los arrastraba. La cuestión más importante para todos estos fabricantes de éteres era lograr una comprensión dinámica de la aberración de la luz, del arrastra de Fresnel, y, después, del experimento de Michelson-Morley. Era necesaria una forma de probar la existencia del éter, aunque las medidas fueran de un orden muy pequeño.

Por ejemplo, supongamos que la tierra se mueve a través del éter con velocidad v sin perturbarlo; entonces la velocidad de la luz con respecto de la tierra deberá depender de la velocidad de propagación de la luz. Así, se debería satisfacer la transformación Galileana de las velocidades: la velocidad de la luz debe ser $c-v$ para un rayo que se propaga en la misma dirección y sentido en que la tierra se mueve a través del éter, y $c+v$ para un rayo que se propaga en la misma dirección y sentido opuesto. Era necesario, pues, un experimento que desvelara la existencia del éter. En esta empresa se embarcaron muchos científicos: [Los experimentos sobre el éter](#)

2.- Los experimentos sobre el éter

Entre los muchos experimentos que se realizaron sobre la existencia del éter, destacan también otros que ayudaron a descartarlo. Aquí citamos los más importantes.

2.1.- Experimento de Michelson-Morley



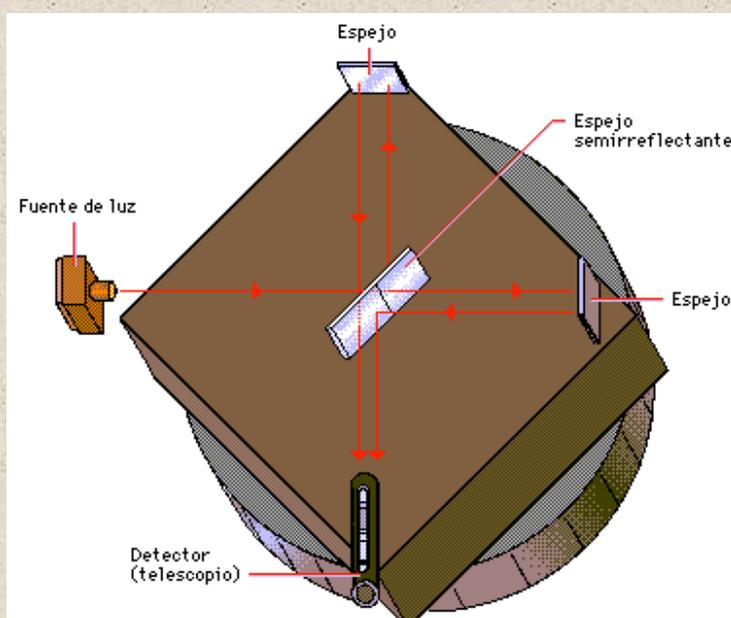
A.A. Michelson

Año y medio después de la muerte de Maxwell, en agosto de 1881, apareció en un número de *American Journal of Science* un artículo firmado por Albert Abraham Michelson (1852-1931), Master en la Marina de Estados Unidos. Michelson, con licencia de la Marina entonces, y trabajando en el laboratorio de Helmholtz en Berlín, había leído un escrito de Maxwell: "[...] Todos los métodos... por los cuales es posible determinar la velocidad de la luz con métodos terrestres, dependen de la medición del tiempo para el viaje doble, de una estación a otra y regreso" , esto nos conduce a un efecto a lo sumo de $O((v/c)^2)=O(10^{-8})$. Michelson ya era reconocido perito en la medición de la velocidad de la luz, y concluía que Maxwell había subestimado la precisión con que era posible hacer experimentos terrestre (determinó, en 1878, la velocidad de la luz en 299.910 Km/s, equivocándose en la medida tan solo en 117,542 Km/s). El instrumento que él diseñó en Berlín para medir el efecto de Maxwell de segundo orden se conoce como el interferómetro de Michelson. Para no verse perturbado por vibraciones de la calle Michelson efectuaba sus experimentos en el observatorio astrofísico del cercano Potsdam. El método que usaba era comparar los tiempos invertidos por la luz en atravesar la misma distancia, una vez en forma paralela y otra en forma transversal con respecto al movimiento de la tierra relativo al éter. Con esta disposición, un éter estacionario, daría una diferencia de tiempo equivalente a 1/25 de la longitud de onda de la luz amarilla, en más cuando marchasen en forma paralela; el efecto puede detectarse haciendo interferir los haces paralelo y transversal. Michelson no obtuvo evidencia de un viento de éter: " el resultado de la hipótesis de un éter estacionario ha mostrado así ser incorrecto, y la conclusión necesaria que se sigue es que la hipótesis es errónea"

(K. von Mosengeil, *Annalen der Physik*, nº 22, 867 (1907)). Los consejos de Rayleigh , Kelvin y Lorentz hicieron que Michelson realizara una nueva experiencia. Entonces se

encontraba en la Case School of Applied Science (Escuela Case de ciencia aplicada) y decidió realizar de nuevo el experimento, esta vez en colaboración con Edward William Morley (1838-1923), un químico de la vecina Universidad Western Reserve. Procediendo según las mismas líneas seguidas en la experiencia de Postdam, construyeron un nuevo interferómetro y se tomo gran cuidado en minimizar las influencias perturbadoras. En agosto de 1887, Michelson escribió a Rayleigh que nuevamente se había hallado un efecto nulo, haciéndose publico en el noviembre siguiente. Michelson volvió a realizar su experimento varias veces en años posteriores, y por ultima vez en 1929 (Albert Einstein pregunto una vez a Michelson porque había invertido tanto esfuerzo en la medición de la velocidad de la luz con alta precisión. Michelson contestó: " *Weil es mir Spass macht* ", *porque me divierte*).

Básicamente este experimento es la base de la constancia de la velocidad de la luz. Muestra claramente que la velocidad de la luz siempre es la misma en todas las direcciones, sin importar el estado de movimiento del observador. Sin embargo, este resultado llevo a ciertas consecuencias que formularemos más adelante.



Dispositivo de Michelson-Morley

Mediante el interferómetro dividieron un haz de luz en dos haces que se propagaban formando un ángulo recto y lo hacían interferir, formando un diagrama característico de franjas claras y oscuras. Si la Tierra (y por tanto el aparato) se moviera respecto al éter, la velocidad de los haces sería distinta, igual que la velocidad de un barco que va río arriba y después río abajo difiere de la de un barco que cruza el río. La diferencia de velocidades de los haces modificaría el diagrama de interferencia. Sin embargo, no se halló ninguna modificación. Éste y otros fracasos en la detección del movimiento de la Tierra en el éter llevaron 18 años después a Albert Einstein a desarrollar la teoría de la relatividad restringida, con lo que se abandonó la teoría del éter.

2.2.- La aberración de la luz y el efecto Fizeau

A causa de la velocidad v de la tierra, una estrella que debiera verse en el cenit de estar la tierra en reposo, se ve realmente formando un ángulo α con la vertical, con

$$\operatorname{tg}\alpha = v/c$$

El concepto de éter en reposo absoluto, introducido en 1818 por [Augustin Fresnel](#) (1788-1827) en su famosa carta a [Dominique François Jean Arago](#), obedecía al propósito explícito de explicar este efecto de aberración (que sería cero si el éter se moviese junto con la tierra). En el capítulo de Relatividad se ofrecerá un desarrollo del efecto.

En lo que se refiere al efecto Fizeau, Fresnel había predicho que si un líquido se mueve a través de un tubo con velocidad v respecto al éter y un haz de luz atraviesa el tubo en la misma dirección, la velocidad c' de la luz resultante con respecto al laboratorio está dada por

$$c' = c/n + v (1 - 1/n^2) \quad (A)$$

donde n es el índice de refracción del líquido (supuesto sin dispersión). Fresnel dedujo este resultado de la hipótesis de que la luz imparte vibraciones elásticas al éter que atraviesa. Según él, la presencia del factor $1 - 1/n^2$ (conocido ahora como el coeficiente de arrastre de Fresnel) expresa el hecho de que la luz no puede adquirir toda la velocidad adicional v debido a que es parcialmente retenida por el éter del tubo. En 1851 Fizeau envió luz de una fuente terrestre a un tubo lleno con un líquido en movimiento y halló razonable acuerdo experimental con la ecuación A.

Ambos efectos fueron analizados por Lorentz desde el punto de vista de la teoría electromagnética. Sin embargo en su trabajo de 1895, el éter de Fresnel se postula de manera explícita lo que es incorrecto.

Ante estos problemas surgió una nueva teoría : [La Teoría de la Relatividad Especial](#)

[La Relatividad Especial: Origen y desarrollo](#)

[La Teoría de la Relatividad Especial](#)

3.-La Teoría de la Relatividad Especial

3.1.-Los nuevos postulados y sus consecuencias

La nueva teoría se basa por completo sobre dos postulados:

1.- *Las leyes de la física toman la misma forma en todos los sistemas inerciales.*

2.- *En cualquier sistema inercial, la velocidad de la luz c es la misma, tanto si es emitida por un cuerpo en reposo como si lo es por un cuerpo en movimiento uniforme.*

Las consecuencias de los postulados son inmediatas y se desarrollan como sigue.

3.1.1-Intervalo

En primer lugar definiremos el concepto de suceso. Un suceso se define por el lugar en el que ocurre y por el instante en que ocurre. Por tanto todo suceso en una partícula material tiene tres coordenadas espaciales y una temporal.

Establezcamos un pseudoespacio cuadridimensional cuyos ejes se marcan con dichas coordenadas. Los sucesos en este espacio vienen dados por puntos, los *puntos de universo*. Además a cada partícula corresponde una cierta línea, la *línea de universo*. Los puntos de esta línea determinan las coordenadas de la partícula en todo instante.

Para expresar el principio de la invariancia de la velocidad de la luz, consideraremos dos sistemas con movimiento relativo uniforme, A y A' . Los ejes X y X' coinciden mientras que los ejes Y y Z son paralelos a los Y' y Z' ; representemos el tiempo en los sistemas K y K' por t y t' .

Supongamos que ocurren dos sucesos, el primero consiste en la emisión de una señal (que se propaga con la velocidad de la luz) en (x_1, y_1, z_1, t_1) y el otro en su llegada (x_2, y_2, z_2, t_2) . La distancia recorrida por ella es así $c(t_2 - t_1)$. Por otro lado esta misma distancia es igual a $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2]^{1/2}$. La relación por tanto entre las coordenadas de ambos sucesos en A es :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$$

Ambos sucesos se pueden observar desde A' . Ahora (x_1', y_1', z_1', t_1') y (x_2', y_2', z_2', t_2') son las coordenadas en A' de ambos sucesos. Como la velocidad de la luz debe ser la misma en los sistemas

A y A' , tenemos :

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = 0$$

Y denominaremos intervalo entre dos sucesos cualesquiera a la cantidad :

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$$

Si c es una invariante, y el intervalo entre dos sucesos es cero, también lo es para cualquier otro sistema.

Consideremos ahora dos sucesos infinitesimalmente separados, entonces se tiene

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Es posible pues considerar 2 y 3 como una distancia entre dos puntos en un espacio cuatridimensional (coordenadas x, y, z y el producto ct). La diferencia con la geometría ordinaria reside en una manera especial de la forma cuadrática expresada por 3, introducida por [Hermann Minkowski](#) .

Hemos visto que si $ds=0$ en un sistema inercial, también $ds'=0$ en cualquier otro sistema. Pero como ambos ds y ds' son del mismo orden, se sigue que el cuadrado de los infinitesimos deben ser proporcionales entre si :

$$ds^2 = a ds'^2$$

donde a solo puede depender del modulo de la velocidad relativa de los dos sistemas inerciales. Esto se sigue de las suposiciones de Albert Einstein plasmadas en un manuscrito escrito en 1921:

1.- Homogeneidad : las propiedades de las reglas y relojes no dependen de su posición ni del instante en que se mueve ,sino solamente de la forma en que se mueve.

2.- Isotropía : las propiedades de las reglas y relojes son independientes de la dirección.

3.- Estas propiedades son también independientes de la historia previa. Es decir, si a dependiera de las coordenadas y del tiempo se contradecía la homogeneidad de espacio y tiempo. Y análogamente no puede depender de la dirección de la velocidad relativa, pues contradeciría la isotropía del espacio. Operando y comparando se obtiene que a solo puede ser una constante, la unidad.

Esto implica la igualdad entre intervalos.

Llegamos así a un resultado muy importante : el intervalo entre dos sucesos es el mismo en todos los sistemas de referencia, es decir, es invariante respecto de la transformación que lleva de un sistema inercial a cualquier otro. Esta invariancia es la expresión matemática de la constancia de la velocidad de la luz.

[Los experimentos sobre el éter](#)

[La Simultaneidad](#)

3.1.2-Simultaneidad

Sean de nuevo (x_1, y_1, z_1, t_1) y (x_2, y_2, z_2, t_2) las coordenadas de dos sucesos en un determinado sistema de referencia A. Intentemos ver si existe un sistema A' en que estos dos sucesos ocurran en el mismo punto espacial.

Sean

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2$$

Tenemos que respecto al sistema A el intervalo entre dos sucesos es :

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

Mientras que respecto a A'

$$s'_{12}{}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 - l'_{12}{}^2$$

Y por la invariancia de los intervalos

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 - l'_{12}{}^2$$

Y si ocurren en el mismo punto espacial respecto de A' :

$$s'_{12}{}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 - 0$$

Por lo tanto, un sistema A' que cumpla dicha propiedad existe si el intervalo entre dos sucesos es un número real. Los intervalos reales se califican de temporales. Es fácil ver que el tiempo que transcurre entre los dos sucesos que ocurren en el mismo lugar (en A') es igual a

$$t'_{12} = 1/c(c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2)^{1/2} = s_{12}/c$$

Intentemos ahora encontrar un sistema de referencia en el que dos sucesos ocurran en el mismo instante. Al igual que antes, en los sistemas A y A' tenemos $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 - l'_{12}{}^2$. Y como deben ocurrir en un mismo instante :

$$s_{12}^2 = - l'_{12}{}^2 < 0$$

Por lo tanto, el sistema existirá solo si el intervalo entre los dos sucesos es imaginario. Los intervalos imaginarios se califican de espaciales.

De esta manera si el intervalo entre los dos sucesos es espacial, existe un sistema de referencia en el que los dos sucesos ocurren simultáneamente. La distancia entre dos puntos en que

ocurren estos sucesos es igual a (en A') :

$$l'_{12} = (l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2)^{1/2} = \Delta s_{12}$$

Debido a la invariancia de los intervalos su clasificación es un concepto absoluto. El carácter temporal o espacial de un intervalo es independiente del sistema de referencia.

Si O es origen de un suceso y tomamos una sola dimensión espacial y el tiempo podremos ver qué relación liga los demás sucesos con el suceso dado O . Consideremos el movimiento uniforme y rectilíneo de una partícula que pasa por $x = 0$ en $t = 0$. Su movimiento debe representarse por una recta cuya pendiente es la velocidad de la partícula, y puesto que la máxima velocidad es c , la pendiente no podrá superar el ángulo formado por la recta de pendiente c y el eje t , como se muestra en la siguiente figura:

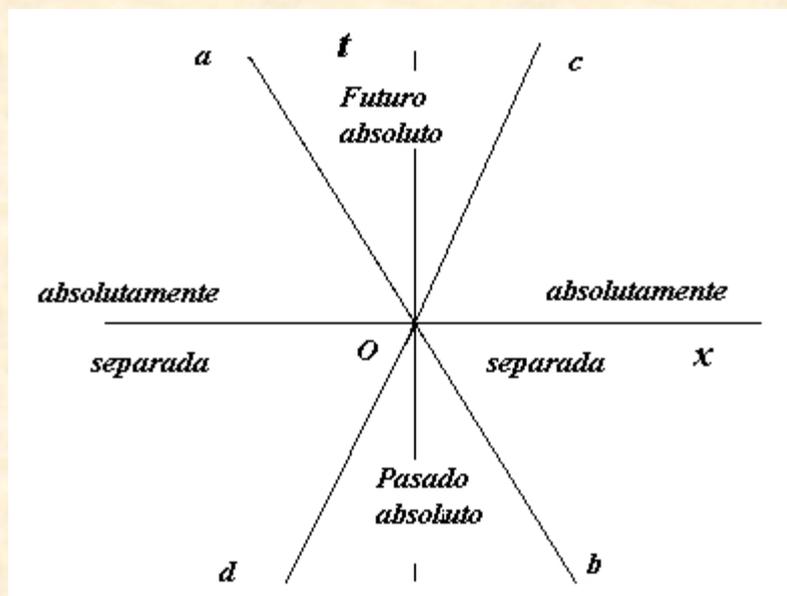


FIG.1

Las rectas que representan movimientos de partículas pueden estar solo en las regiones aOc y dOb . Consideremos la región aOc . Es fácil ver que para todos los puntos, el intervalo en esta región es

$c^2 t^2 - x^2 > 0$. Es decir el intervalo entre un suceso cualquiera de esta región y el suceso O es temporal.

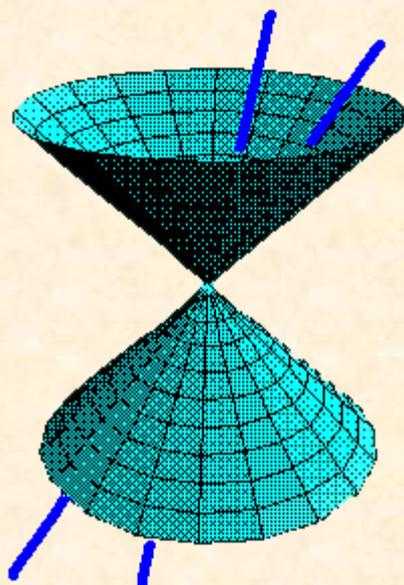
Evidentemente ocurre que $t > 0$, es decir, los sucesos en aOc ocurren " después " que el suceso O . Pero dos sucesos que están separados por un intervalo temporal, nunca podrán ser simultáneos en ningún otro sistema de referencia. Por lo tanto, no existe ningún sistema de referencia para el que un suceso ocurrido en la región aOc ocurra antes que el suceso O . Los sucesos de esta región son futuros respecto de O para todo sistema de referencia, de ahí que sea llamada " futuro absoluto " respecto del suceso O .

De la misma manera, los sucesos de la región bOt pertenecen al pasado absoluto respecto de O , y por consiguiente, los sucesos de esta región ocurren antes que el suceso O para todo sistema de referencia.

Consideremos finalmente las regiones dOa y cOb . Es claro que el intervalo entre un suceso

cualquiera de estas región(dOa o cOb) y el suceso O, es espacial. Estos sucesos ocurren en puntos diferentes del espacio respecto de cualquier sistema de referencia. Por ello estas regiones, se pueden calificar de " absolutamente separadas " respecto de O. Sin embargo, los conceptos " simultáneos " " antes ", y " después " son relativos para estos sucesos. Por tanto en esta región, para un suceso existen sistemas de referencia en los que el suceso ocurre después que el suceso O, sistemas en los que ocurre antes y, sistemas en los que dicho suceso y O son simultáneos.

Si consideramos las tres coordenadas espaciales en lugar de solo una, obtendríamos, a diferencia de la fig.1 , un " cono " $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$ en el sistema de coordenadas cuatridimensional x, y, z, t , cono cuyo eje coincide con el eje t (este cono se llama [cono de luz](#)). Las regiones del "futuro absoluto " y del " pasado absoluto " son entonces las correspondientes a las dos regiones interiores de este cono. Aquí puede verse un ejemplo :



En conclusión, dos sucesos se pueden vincular causalmente entre si, sólo si el intervalo entre ellos es temporal, como se deduce del hecho de que ninguna interacción se puede propagar con velocidad mayor que la velocidad de la luz. Como hemos visto es precisamente para estos sucesos para los que los conceptos " antes " y " después " tienen un significado absoluto, condición necesaria para que los conceptos de causa y efecto tengan sentido.

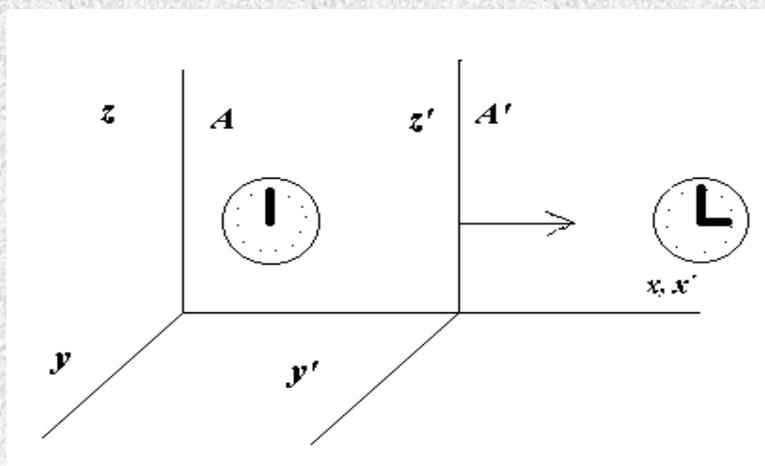
[Los nuevos postulados y sus consecuencias](#)

[Tiempo propio](#)

3.2.- Tiempo propio



Supongamos que nuestro sistema de referencia inercial se observa un reloj que se mueve de manera cualquiera respecto del mismo, con un movimiento uniforme en cada instante. Por esta razón consideraremos también sistemas inerciales respecto de los cuales el reloj esta en reposo.



Durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt (indicado por un reloj ligado a nuestro Sistema, y por tanto en reposo respecto a él) el reloj en movimiento recorre una distancia: $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

Veamos que intervalo de tiempo dt' indica estas condiciones el reloj en movimiento. En el sistema de coordenadas en el que el reloj se encuentra en reposo este será $dx' = dy' = dz' = 0$. Por la [invariancia de los intervalos](#) se tendrá :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2$$

de donde, haciendo la raíz y dividiendo por c ,

$$dt' = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

o también,

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}$$

Pero,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2,$$

donde v es la velocidad del reloj; por consiguiente,

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.2.1)$$

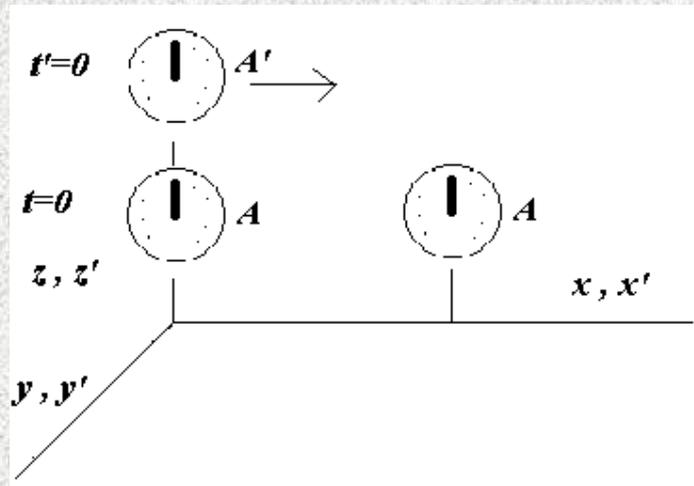
Integrando esta expresión, obtendremos el tiempo indicado por el reloj en movimiento cuando el tiempo transcurrido según el reloj en reposo es $t_2 - t_1$:

$$dt' = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.2.2)$$

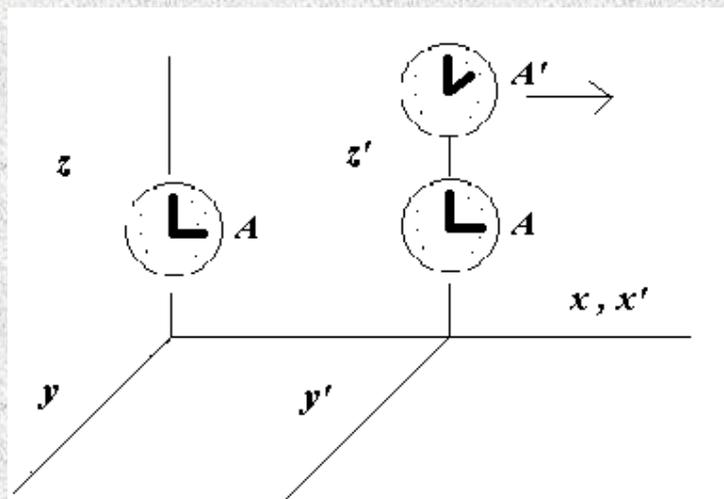
El tiempo indicado por un reloj que se mueve junto con un objeto se llama *tiempo propio* de este objeto. Las formulas (3.2.1) y (3.2.2) expresan el tiempo propio (que llamaremos τ) en función del tiempo perteneciente al sistema de referencia desde donde se considera el movimiento.

De las anteriores ecuaciones también se deduce que τ de un objeto en movimiento será siempre menor que el correspondiente intervalo del sistema en reposo. Es decir, "un reloj en movimiento atrasa respecto de un reloj en reposo".

Volvamos a la [figura 2](#). Supongamos que un reloj se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme respecto de un sistema inercial A. Un sistema de referencia A' vinculado a A también es inercial. En estas condiciones, el reloj de A' retrasa desde el punto de vista de un observador situado en A. El recíproco también es cierto. En ello no hay ninguna contradicción si se considera el problema de la siguiente manera. Supongamos que un cierto instante un reloj en A' pasa por delante de un reloj en A, y ambos relojes coinciden:



Para comparar las marchas de los dos relojes en A y en A' , hemos de comparar de nuevo las indicaciones del mismo reloj en movimiento con las de un reloj en A . Pero ahora comparamos dicho reloj con otro reloj en A - aquel por delante del cual pasa A' en el otro instante:



Se encuentra entonces que el reloj de A' retrasa respecto del reloj de A con el que se le compara. Por tanto, vemos que para comparar las marchas de relojes en dos sistemas de referencia son necesarios varios relojes en uno de ellos y uno en el otro. Por lo tanto este proceso no es simétrico respecto de los dos sistemas. El reloj que atrasa es el que se compara con diferentes relojes del otro sistema.

Si tenemos dos relojes, y uno de los cuales describe una trayectoria cerrada que vuelve al lugar donde se encontraba un reloj en reposo, el reloj que se mueve es precisamente el reloj que atrasa (respecto del reloj en reposo). El razonamiento inverso es ahora imposible, y el reloj en reposo no puede atrasar, puesto que el reloj en movimiento no se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme, y por tanto un sistema de coordenadas ligado a él no será inercial.

Por el [primer postulado de la relatividad](#), los sistemas de coordenadas vinculados al reloj en reposo (sistema inercial) y al reloj en movimiento (no inercial) tienen propiedades diferentes, y el reloj en reposo no puede atrasar.

[La Simultaneidad](#)

[La transformación de Lorentz](#)

3.3.- La transformación de Lorentz

Trataremos ahora de obtener las formulas que permitan pasar de un sistema de referencia inercial a otro, es decir, formulas mediante las que dadas las coordenadas x, y, z, t , de un cierto suceso en el sistema A, podamos encontrar las coordenadas x', y', z', t' , del mismo suceso en otro sistema inercial A'.

En mecánica clásica, la solución es simple. Dada la naturaleza absoluta del tiempo, tenemos que $t = t'$; si además se eligen los ejes de coordenadas como de ordinario (movimiento a lo largo de X, X', que son coincidentes; Y,Z, paralelos a Y', Z'), las coordenadas x y x' diferirán en la distancia recorrida por uno de los sistemas con relación al otro; si en $t = t' = 0$, tenemos $x = x' = 0$ y si la velocidad de A' respecto de A es V , dicha distancia es igual a Vt . Por consiguiente,

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (3.1)$$

Estas formulas se llaman *transformación de Galileo*. Es fácil ver que esta transformación no deja [invariantes en los intervalos entre sucesos](#).

Las formulas de transformación relativistas las obtendremos, precisamente, partiendo de la condición de que dejen invariantes dichos intervalos.

En efecto, la física sería incompleta si la desigualdad $t_1 = t'_1$ no pudiera precisarse en una relación específica entre los dos lapsos. Einstein obtuvo esa relación deduciendo [la transformación de Lorentz](#) de sus postulados. Ahora expondremos dos formas de deducir dichas transformaciones.

En esta primera deducción utilizaremos el razonamiento de Einstein. Su argumento es esencialmente como sigue. Sean dos sistemas inerciales (x, y, z, t) y (x', y', z', t') , el segundo de los cuales se mueve respecto al primero, con velocidad v a lo largo de x . En $t = t' = 0$, los dos sistemas coinciden. En ese instante, una onda de luz, esférica, es emitida desde el origen común. t segundos más tarde, la onda alcanza la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (3.2)$$

La compatibilidad de ambos postulados exige que la onda también haya alcanzado la superficie

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2 (t')^2 \quad (3.3)$$

Las relaciones entre los dos sistemas de coordenadas implicados en estas dos ecuaciones se suponen lineales, de acuerdo con la homogeneidad del espacio y el tiempo. Entonces, con simple aritmética se obtiene

$$x' = \frac{\varepsilon(x - vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = \varepsilon y$$

$$z' = \varepsilon z$$

$$t' = \frac{\varepsilon\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.4)$$

donde ε es un factor de escala arbitrario, que depende solamente de v . Como el producto de esta transformación debe dar la identidad, se tiene

$$\varepsilon(v)\varepsilon(-v) = 1$$

la asimetría requiere que las transformaciones de y y de z no cambien si $v \rightarrow -v$, y por lo tanto

$$\varepsilon(v) = \varepsilon(-v)$$

Así, $\varepsilon(v) = 1$ (ya que $\varepsilon(0) = 1$), y

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.5)$$

La transformación inversa, es decir, expresar x , y , z , t en función de x' , y' , z' , t' , se obtiene cambiando $-v$ por v .

La deducción de las transformaciones de Lorentz, a partir de principios iniciales aparece por primera vez en el trabajo de Einstein.

La segunda deducción es algo más geométrica. Sin embargo, seguiremos partiendo de la invariancia de los intervalos. Como veíamos en el epígrafe 2 ([intervalo](#)) el intervalo entre dos sucesos se puede considerar como distancia entre los dos puntos de universo correspondientes en el sistema de coordenadas tetradimensional.

En consecuencia, podemos decir que la transformación buscada debe conservar todas las distancias

en el espacio de cuatro dimensiones x, y, z, ct . Por tanto, las transformaciones solo podrán ser traslaciones o rotaciones del sistema de coordenadas. Hablaremos de transformación de Lorentz pura cuando no implique rotación espacial, sino solo sistemas en movimiento uniforme cuyos ejes son paralelos. Cualquier transformación general de Lorentz es el producto de una rotación espacial y de una transformación de Lorentz pura. Las traslaciones del sistema de coordenadas carecen de interés, pues en esencia solo son un corrimiento del origen de coordenadas y un cambio en el origen del tiempo. Por consiguiente, la transformación que buscamos debe poderse expresar como una rotación del sistema de coordenadas cuadrimensional x, y, z, t .

Cualquier rotación en el espacio tetradimensional se puede descomponer en seis rotaciones en los planos xy, zy, xz, tx, ty, tz (análogamente a la descomposición en tres rotaciones en los planos xy, zy, yz de una rotación en el espacio ordinario). De las anteriores seis rotaciones, las tres primeras transforman únicamente coordenadas de espacio.

Consideremos una rotación en el plano tx ; por efecto de la misma las coordenadas y y z no cambian. Si ψ es el ángulo de rotación, la relación entre las coordenadas antiguas y nuevas se determina por la formula

$$x = x' \cosh \psi + ct' \sinh \psi, ct = x' \sinh \psi + ct' \cosh \psi, \quad (3.6)$$

donde ψ es el " ángulo de giro "; es fácil ver que $c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2$:

$$c^2 t'^2 - x'^2 = x'^2 \sinh^2 \psi + c^2 t'^2 \cosh^2 \psi + 2x'ct' \sinh \psi \cosh \psi - x'^2 \cosh^2 \psi - c^2 t^2 \sinh^2 \psi - 2x'ct' \cosh \psi \sinh \psi =$$

$$= ct'^2 (\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi) - x'^2 (\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi) = c^2 t'^2 - x'^2$$

Las formulas (3.3.1) difieren de las formulas ordinarias de transformación correspondientes a las rotaciones de los ejes de coordenadas en la substitución de las funciones trigonométricas por funciones hiperbólicas. En esto se manifiesta la diferencia entre la geometría pseudoeuclídea y la euclídea (ver [espacio universal](#) o [espacio de Minkowski](#)).

Veamos la formula de transformación que permite pasar de un sistema de referencia inercial A un sistema A' que se mueve respecto de A con velocidad V a lo largo del eje X. Es evidente que solo varia la coordenada x y el tiempo t . La transformación debe ser de la forma (3.3.1). Falta determinar el ángulo ψ , que puede depender únicamente de la velocidad relativa V .

Consideremos el movimiento, en el sistema A, del origen de coordenadas del sistema A'. En estas condiciones $x' = 0$ y las formulas (3.6) toman la forma

$$x = ct' \sinh \psi, ct = ct' \cosh \psi,$$

o, dividiendo la una por la otra,

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{tgh} \mu'$$

Pero x/t es , evidentemente, la velocidad V de A' respecto de A .Por consiguiente,

$$\operatorname{tgh} \mu' = \frac{V}{c}$$

De aquí se deduce,

$$\operatorname{senh} \mu' = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \operatorname{cosh} \mu' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Substituyendo en (3.6) resulta

$$x = \frac{x' V t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3.7)$$

De nuevo, para expresar x' , y' , z' , t' , en función de x , y , z , t , sólo tenemos que cambiar V por $-V$.

Observando las formulas vemos que al pasar al limite $c \rightarrow \infty$ de la mecánica clásica, las formulas de transformación de Lorentz se reducen, en efecto, a la transformación de Galileo.

Además para $V > c$ en (3.3.2), las coordenadas x , t se hacen imaginarias, debido a que ningún movimiento puede poseer una velocidad mayor que la velocidad de la luz. Ni siquiera existe un sistema de referencia con velocidad igual a la de la luz, pues se anularían los denominadores de (3.7).

Para velocidades V pequeñas respecto de la velocidad de la luz se pueden utilizar las formulas aproximadas

$$x = x' + Vt'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$x = t' + \frac{V}{c^2} x' \quad (3.8)$$

Deduzcamos ahora las transformaciones de Lorentz para la velocidad. Supongamos de nuevo que el sistema A' se mueve con relación al sistema A con velocidad V a lo largo del eje X . Sea $v_x = dx/dt$ la componente x de la velocidad de la partícula en el sistema A' y $v'_x = dx'/dt'$ la correspondiente componente de la velocidad de la misma partícula en el sistema A'. De (3.7) podemos deducir que

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz' \quad (3.9)$$

Dividiendo las tres primeras ecuaciones por la cuarta e introduciendo las velocidades, se encuentra

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \quad (3.10)$$

Para obtener la transformación inversa se sustituye V por $-V$.

Para una velocidad V considerablemente menor que la velocidad de la luz (la velocidad v puede ser cualquiera) se tiene, aproximadamente, hasta el primer orden en V/c :

$$v_x = v'_x + V \left(1 - \frac{v'^2_x}{c^2} \right), \quad v_y = v'_y + v'_x v'_y \frac{V}{c^2}, \quad v_z = v'_z - v'_x v'_z \frac{V}{c^2} \quad (3.11)$$

Estas tres formulas se pueden resumir en una sola formula vectorial

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + V - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \times \mathbf{v}') \times \mathbf{v}' \quad (3.12)$$

Si la velocidad V es cercana a la de la luz debemos utilizar la formula vectorial

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (3.13)$$

Las leyes de transformación de las componentes de la aceleración se obtendrían derivando respecto al tiempo la expresión (3.10). Para una componente de la aceleración, a'_x , por ejemplo, se deduciría:

$$a'_x(t') = \frac{dv'_x(t')}{dt'} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_x(t) - V}{1 - Vv_x(t)/c^2} \right) \times \frac{dt}{dt'}$$

Con

$$t(t') = \frac{t' + Vx'(t')/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Siguiendo este procedimiento se obtendrían las siguientes relaciones generales para la transformación de las componentes de la aceleración:

$$a'_x = \frac{a_x (1 - V^2/c^2)^{3/2}}{(1 - v_x V/c^2)^3}$$

$$a'_y = \frac{(1 - V^2/c^2) \times (a_y + v_y V a_x / (c^2 - v_x V))}{(1 - v_x V/c^2)^2}$$

$$a'_z = \frac{(1 - V^2/c^2) \times (a_z + v_z V a_x / (c^2 - v_x V))}{(1 - v_x V/c^2)^2} \quad (3.14)$$

y relaciones semejantes, permutando las variables de un sistema por las del otro y V por $-V$, para la transformación inversa.

[Tiempo propio](#)

[Mecánica Relativista](#)

[Home](#)

4.-Mecánica Relativista

4.1.-Momentum lineal y Fuerza

Admitir el principio de relatividad y la transformación de Lorentz obliga a cambiar la mecánica de Newton: sus leyes no se modifican al aplicar la transformación de Galileo pero si lo hacen con la transformación de Lorentz.

La nueva mecánica, (Mecánica relativista), se basa en magnitudes y relaciones que, en el limite de bajas velocidades, se reducen a las de la Mecánica Newtoniana. Su ley fundamental establece que, en un sistema de referencia inercial, el movimiento de una partícula de masa m , posición $\mathbf{r}(t)$ y velocidad $\mathbf{v}(t)$ puede escribirse mediante la ecuación :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (4.1)$$

siendo \mathbf{F} la fuerza que actúa sobre la partícula y

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.2)$$

su momentum lineal relativista. De acuerdo con (4.2) el momentum lineal relativista es mayor que el predicho por el momentum lineal newtoniano, $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$, llegando a divergir cuando la velocidad de la partícula se acerca a la velocidad de la luz. Sin embargo, cuando la velocidad es muy baja frente a c , la ecuación (4.1) equivale a la Segunda Ley de Newton.

Analizando la expresión para el momentum lineal relativista, podemos obtener la expresión de la Fuerza, definida ahora como $d\mathbf{p}/dt$. Por tanto podemos redefinir la Fuerza como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (4.3)$$

Si tratamos el movimiento rectilíneo es fácil ver que, considerando sólo magnitudes,

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{mv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \quad (4.4)$$

Si ahora consideramos el caso del movimiento circular uniforme la velocidad permanece constante en magnitud, pero la dirección y sentido varían y la ecuación (4.3) es, para este caso,

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

pero dv/dt es la aceleración normal o centrípeta cuya magnitud es v^2/R , donde R es el radio del círculo descrito. Por tanto la magnitud de la Fuerza normal o centrípeta viene dada por

$$F = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v^2}{R} \quad (4.5)$$

En el caso general del movimiento, el movimiento curvilíneo, debemos observar que dv/dt es la aceleración tangencial a_T y que v^2/R es la aceleración normal a_N . Por tanto, en el movimiento curvilíneo, las componentes de la Fuerza según (4.4) y (4.5) a lo largo de la tangente y la normal de la trayectoria son

$$F_T = \frac{mv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} a_T \quad (4.6)$$

$$F_N = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} a_N \quad (4.7)$$

Una consecuencia inmediata de la nueva definición de momentum es que la Fuerza deja de ser paralela a la aceleración, ya que los coeficientes que multiplican a a_T y a_N son distintos. Sin

embargo, la relación más fundamental, $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, sigue siendo válida. Además, las ecuaciones (4.7) y (4.8) muestran que conforme una partícula se acerca a la velocidad de la luz, la fuerza requerida para producir una aceleración aumenta considerablemente.

4.2.- Energía

Vamos a obtener la expresión de la energía cinética a partir de la nueva definición de momentum. Como sabemos $v=ds/dt$, (donde s es el arco recorrido) y por lo tanto obtendremos

$$T = \int_0^y F_T ds = \int_0^y \frac{dp}{dt} ds = \int_0^y v dp$$

Integrando por partes y aplicando la expresión del momentum relativista obtenemos

$$T = vp - \int_0^y p dv = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \int_0^y \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dv = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - mc^2$$

y finalmente

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (4.8)$$

Esta fórmula muy importante, pone de manifiesto, en particular, que en mecánica relativista la Energía de una partícula material no tiende a cero cuando $v \rightarrow 0$, sino que tiende a un valor no nulo

$$E = mc^2 \quad (4.9)$$

Esta magnitud es la Energía en reposo de la partícula.

Por otra parte la magnitud

$$E = T + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.10)$$

se conoce como Energía total de la partícula. La Energía total de la partícula, según la definimos aquí, incluye la energía cinética y la de reposo, pero no a la potencial. (Una demostración en la sección [Aplicaciones de la Relatividad](#)).

Para velocidades pequeñas ($v/c \ll 1$), el desarrollo de (4.10) en serie de potencias de v/c conduce a la relación

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

que, salvo la Energía en reposo, coincide con la expresión clásica de la Energía cinética de una partícula.

Las magnitudes expuestas, al igual que el momentum lineal relativista, divergen cuando $v \rightarrow c$. Esto expresa que la velocidad de la luz es una velocidad límite de la propagación de las interacciones.

4.3.-Relaciones Energía-Momentum: Función de Hamilton

Si elevamos al cuadrado la expresión del momentum lineal relativista obtendremos

$$p^2 = \frac{mv^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4.11)$$

La identidad

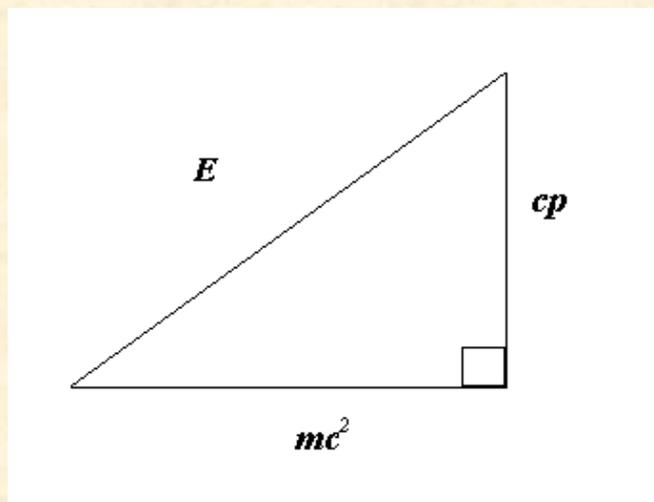
$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{v^2/c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 \quad (4.12)$$

es ya un invariante Lorentz, porque 1 es una constante. Multiplicando por $m^2 c^4$, tenemos

$$\frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^4 \Rightarrow \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4.13)$$

Esta relación es más sencilla de recordar si la asociamos al Teorema de Pitágoras:



Como la masa en reposo es una constante, $m^2 c^4$ lo será también y por lo tanto un invariante Lorentz. Hemos obtenido, la función de Hamilton:

$$\mathcal{H} = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} \quad (4.14)$$

De las expresiones (4.2) y (4.10) se deduce también la siguiente relación entre la energía, el impulso y la velocidad de una partícula libre:

$$\vec{p} = E \frac{\vec{v}}{c^2} \quad (4.15)$$

Como se deduce de esta ecuación, en mecánica relativista pueden existir partículas de masa nula que se muevan a la velocidad de la luz. De (4.15) se tiene para tales partículas:

$$p = E \frac{v}{c} \quad (4.16)$$

4.4.- Transformaciones de Lorentz: Energía y Momentum

La relación entre Energía y momentum, dada por la función de Hamilton (4.14), debe ser la misma para todo observador inercial. Vamos a comparar estas cantidades según dos observadores que se mueven con velocidad relativa v . Ambos observadores tienen sus ejes de coordenadas paralelos y X y X' paralelos a la velocidad relativa. Para el observador situado en el origen O que ve una partícula de masa m y momentum p , la ecuación (4.13) puede escribirse como:

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2 c^2 \quad (4.17)$$

Como sabemos el momentum p es un vector de componentes p_x , p_y y p_z . Entonces $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ y la ecuación anterior se puede expresar como

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2 c^2 \quad (4.18)$$

Como esta expresión debe ser invariante para todos los observadores inerciales, cuando O' observe la misma partícula debe escribirse

$$p'^2_{x'} + p'^2_{y'} + p'^2_{z'} - \frac{E'^2}{c^2} = -m^2 c^2 \quad (4.19)$$

La estructura de las ecuaciones (4.18) y (4.19) es semejante a la expresión dada para el [intervalo](#) entre sucesos, por tanto podemos hacer la correspondencia

$$p_x \rightarrow x, p_y \rightarrow y, p_z \rightarrow z, ct \rightarrow E/c^2 \quad (4.20)$$

Es decir, la invariancia de la ecuación (4.17) requiere una transformación de p_x , p_y , p_z y E/c^2 igual a la transformación de Lorentz válida para x , y , z y t . Por tanto

$$\begin{aligned} p'_{x'} &= \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ p'_{y'} &= p_y \\ p'_{z'} &= p_z \\ E' &= \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Es fácil ver que la transformación de Lorentz para la Energía y el momentum es muy parecida a la de las coordenadas espaciales. Por tanto, podemos esperar que otras cantidades se transformen de manera semejante. La característica común de estos conjuntos es que tienen cuatro componentes, es decir están expresados mediante cuatro cantidades; por tanto, se les conoce como cuadvectores en un espacio representativo cuatridimensional, que recibe el nombre de [Espacio de Minkowski](#), que ya hemos citado. Precisamente fue Hermann Minkowski el matemático que ayudó a la simplificación formal de la Teoría de la Relatividad Especial (Ver Bibliografía) y facilitó el camino a la Teoría de la Relatividad General. El método cuadvectorial, que es sencillo, se empleará en el modelo relativista.

La transformación inversa se realiza sustituyendo $-v$ por $+v$

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{p'_x + vE'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \\ E &= \frac{E' + vp'_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

La relación impulso-velocidad, y las transformaciones para la Energía y el momentum fueron comunicadas por primera vez por [Max Planck](#), quien fue el primero en aplicar la Relatividad a la teoría cuántica.

[La transformación de Lorentz](#)

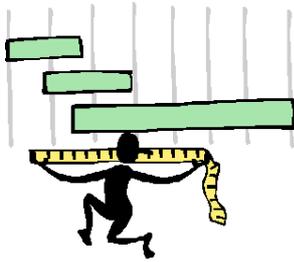
[Las aplicaciones Relativistas](#)

[Home](#)

5.- Las aplicaciones relativistas

Enunciaremos ahora algunas de las más importantes aplicaciones de la Relatividad Especial.

5.1- La contracción de FitzGerald-Lorentz



Supongamos que una regla se encuentra en reposo en el sistema A, paralela a su eje X.

Consideremos $\Delta x = x_2 - x_1$ su longitud medida en este sistema (x_2 y x_1 son las coordenadas de los dos extremos de la regla en el sistema A). ¿Cuál será la longitud de esta regla medida desde el sistema A'?. Determinemos, en primer lugar las coordenadas de los dos extremos de la regla (x'_2 y x'_1) en este sistema en un mismo instante t' . De las [transformaciones de Lorentz](#) se deduce,

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (5.1)$$

La longitud de la regla en el sistema A' es $\Delta x' = x'_2 - x'_1$; restando

x_1 de x_2 , se obtiene

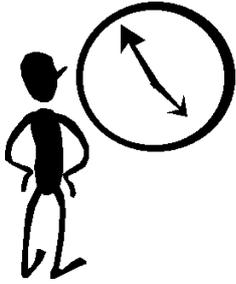
$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (5.2)$$

La " longitud propia " de una regla es, por definición, su longitud en un sistema de referencia en el que se encuentra en reposo. Si consideramos $l_0 = \Delta x$ como la longitud propia, y l' la longitud de la regla en otro sistema de referencia A' , tenemos

$$l_0 = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (5.3)$$

Y la longitud de la regla es máxima en el sistema de referencia en el que se encuentra en reposo. En un sistema A' que se mueva con velocidad V la longitud resulta reducida por el factor $\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Esta es la llamada *contracción de FitzGerald-Lorentz*. Dicho efecto fue llamado así en honor de [George Francis FitzGerald](#) y de [Hendrik Antoon Lorentz](#) que ofrecieron una interpretación dinámica del efecto, y por tanto incorrecta. La interpretación correcta es cinemática.

5.2- La dilatación del tiempo



Utilizando de nuevo la [transformación de Lorentz](#) podemos obtener de nuevo los resultados ya mostrados acerca del tiempo propio ([epígrafe 3.2](#)). Coloquemos un reloj en reposo en un sistema A'. Consideremos dos sucesos que ocurren en un mismo punto x', y', z' del espacio con relación a A'. Si $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ es el tiempo transcurrido entre estos dos sucesos en el sistema A' podemos determinar el tiempo Δt que transcurre entre ellos en el sistema A, mediante las transformaciones de Lorentz:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (5.4)$$

Es decir, restando,

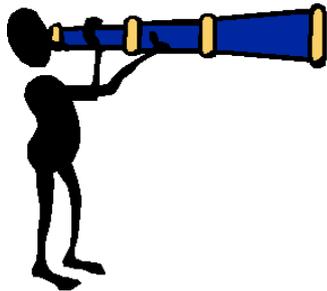
$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (5.5)$$

De aquí se deduce que el resultado de dos transformaciones sucesivas de Lorentz depende, en general, de su orden, a diferencia de las transformaciones de Galileo, que si son conmutables.

Los orígenes cinemáticos de las relaciones (5.3) y (5.5) no fueron entendidos en seguida en forma general cuando se enunció la teoría. En 1911 Einstein explicaba: *"la cuestión de saber si la contracción de Lorentz existe o no existe, es confusa. No existe*

"realmente", en el sentido de que no existe para un observador que se mueva [con la regla]; existe "realmente", sin embargo, en el sentido de que puede ser demostrada por un observador en reposo".

5.3- La expresión relativista de la aberración



La desviación de la luz al pasar a un nuevo sistema de referencia es el fenómeno conocido por *aberración* de la luz. Para una estrella situada directamente sobre nuestras cabezas (cuando la velocidad de la Tierra v_e es

perpendicular a la línea de observación), el ángulo de inclinación, o de aberración, del telescopio viene dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_e}{c} \quad (5.6)$$

Que es el resultado no relativista. Consideremos el problema desde el punto de vista relativista utilizando la transformación de Lorentz.

Supongamos que en un sistema de referencia A en el que la estrella está en reposo se observa una señal luminosa procedente de la estrella a lo largo del eje z , con $x = y = 0$. El sistema de

referencia A' en el que la Tierra está en reposo se mueve con velocidad v_e en la dirección x . Entonces la trayectoria de la señal luminosa se encuentra directamente de la transformación de Lorentz, con $x = 0$

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{V/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ct \\z' &= z = ct \\ct' &= \frac{ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}\quad (5.7)$$

El ángulo de inclinación es entonces

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{(-x')}{z'} = \frac{v_e/c}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}\quad (5.8)$$

El resultado (5.8) está de acuerdo con el resultado con el resultado no relativista (5.7) dentro de la exactitud de las mediciones, porque $v_e/c \cong 10^{-4}$ para la Tierra. El resultado correcto es (5.8).

5.4- Efecto Doppler

5.4.1- Efecto Doppler longitudinal

Consideremos dos cursos de luz emitidos en $t = 0$ y $t = \tau$ por un transmisor en reposo en $x = 0$ de un sistema de referencia. El sistema A' se mueve con velocidad $V \hat{x}$ respecto a A . El pulso inicial se recibe en $x' = 0$ en A' en el tiempo $t' = 0$. El punto en A' que coincide con $x = 0$ para $t = \tau$, viene dado por [la transformación de Lorentz](#) :

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{-V\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (5.9)$$

tomando $x = 0$. El tiempo correspondiente en A' es

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (5.10)$$

el tiempo necesario para que el segundo pulso viaje en A' desde $-V\tau/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ hasta el origen es

$$\Delta t' = \frac{\gamma \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (5.11)$$

de modo que el tiempo total en A' entre la recepción en $x' = 0$ de los dos pulsos es

$$t' + \Delta t' = \gamma \frac{1 + \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}} \quad (5.12)$$

el tiempo entre dos señales puede interpretarse igualmente como el tiempo transcurrido entre dos nodos sucesivos de una onda luminosa. La frecuencia es la recíproca del periodo de la onda, de modo que

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} \quad (5.13)$$

aquí ν' es la frecuencia recibida en A' y ν la que se transmite en A. Si el receptor está alejándose de la fuente, entonces el término V/c es positivo y ν' es menor que ν . Si el receptor se acerca el término V/c es negativo y ν' es mayor que ν . En función de la longitud de onda $\lambda = c/\nu$ y $\lambda' = c/\nu'$, de modo que

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (5.14)$$

La ecuación (5.14) describe el efecto Doppler longitudinal relativista para las ondas luminosas en el vacío.

5.4.2- Efecto Doppler transversal

El efecto Doppler transversal se aplica a las observaciones realizadas en ángulo recto con la dirección de movimiento de la fuente luminosa, que es normalmente un átomo. En la aproximación no relativista no existe efecto Doppler transversal. La teoría relativista predice un efecto Doppler transversal para las ondas luminosas; las frecuencias deben estar relacionadas entre sí por la fórmula :

$$\nu' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \times \nu \left(1 - \frac{v \cos \phi}{c} \right) \quad (5.15)$$

Donde ϕ es el ángulo entre un rayo de luz monocromática de frecuencia ν , y la dirección x . Einstein es así el descubridor del efecto Doppler transversal, ν' difiere de ν aun si el movimiento de la fuente de luz es perpendicular a la dirección de observación.

5.5.- El grupo de Lorentz

Einstein señaló que las transformaciones del tipo de las ecuaciones (3.3.1) formaban grupo: dos transformaciones sucesivas con velocidades v_1 , v_2 en la misma dirección producen una nueva transformación de la forma de las ecuaciones (3.3.1), en la que se obtiene una velocidad v dada por la *ley de adición de Einstein*

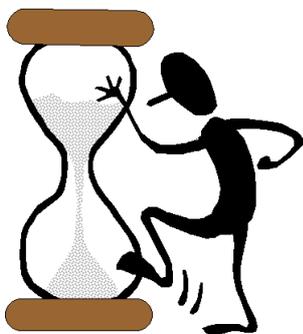
$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (5.16)$$

Veinte años más tarde, Einstein supo algo sobre el grupo de Lorentz que le sorprendió mucho. En Octubre de 1925 George Eugene Uhlenbeck y Samuel Goudsmit descubrieron el spin del electrón, y con ello explicaron la aparición de los dobletes alcalinos, pero durante un corto tiempo pareció que la magnitud de la separación del doblete no resultaba con el valor correcto. Entonces Llewellyn Thomas suministró el factor faltante, 2, conocido ahora como el factor de Thomas. Aunque parezca increíble que un efecto relativista tenga un factor 2 en lugar de algo del orden de v/c es un efecto sencillo. En el fondo de la precesión de Thomas está el hecho de que una transformación de Lorentz con velocidad v_1 , seguida por otra con velocidad v_2 en una dirección diferente, no conduce al mismo sistema inercial que una transformación de Lorentz única, con la velocidad $v_1 + v_2$.

5.6.- La formula de Fresnel

A partir de la ecuación (5.16) se obtiene la conocida formula de Fresnel. Se toma $v_1 = c/n$, $v_2 = v$, y se desarrolla hasta el primer orden en $v_1 v_2 / c^2$. La primera deducción (en 1907) la realizo Max von Laue, quien señalo que según el principio de la relatividad, la luz es completamente arrastrada por el cuerpo [es decir, por el fluido en movimiento], pero justamente por eso, su velocidad respecto a un observador que no participa en el movimiento del cuerpo no es igual a la suma vectorial de su velocidad respecto al cuerpo más [la velocidad del] cuerpo con respecto al observador.

5.7.- El teorema de los relojes



Einstein afirmo que si dos relojes sincrónicos C_1 y C_2 están en la misma posición inicial y C_2 deja el punto A y se mueve según una órbita cerrada, al regresar a A, C_2 retrasara respecto a C_1 . Posteriormente a este resultado se la llamo *Paradoja del reloj*. La lógica de la relatividad espacial no es suficiente para explicar este fenómeno (que ha sido desde entonces observado en el laboratorio), ya que , según

Einstein, entran en juego sistemas de referencia que no son inerciales.

5.8.- Covariancia de las ecuaciones electrodinámicas

Einstein demostró la invariancia Lorentz de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz, primero para el caso libre de fuentes, después para el caso con fuentes. Analizo también las ecuaciones de movimiento de una partícula eléctricamente cargada con carga e y masa m , en un campo electromagnético externo. En un sistema (x, t) en el que la partícula esta instantáneamente en reposo, estas ecuaciones son :

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = e \vec{E} \quad (5.17)$$

aplicando las transformaciones de Lorentz, hallo que en un sistema con velocidad v en la dirección x :

$$m \gamma^3 \frac{d^2 x'}{d(t')^2} = F'_{x'}, m \gamma \frac{d^2 y'}{d(t')^2} = F'_{y'}, m \gamma \frac{d^2 z'}{d(t')^2} = F'_{z'} \quad (5.18)$$

$$\vec{F}' = e \left(\vec{E}' + \vec{v} \times \vec{H}' / c \right) \quad (5.19)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.20)$$

Por lo que obtuvo una nueva manera de expresión para la fuerza de Lorentz. Además obtuvo una expresión para la energía cinética T de la partícula para el caso en que las aceleraciones sean pequeñas, y por lo tanto no se pierde energía en forma de radiación. En ese caso,

$$T = \int F'_x dx' = m \int_0^v \gamma^3 v dv = mc^2 (\gamma - 1) \quad (5.21)$$

Cuando $v = c$, T se hace infinita. Por tanto, si una partícula se mueve con velocidad menor (mayor) que c en todos los sistemas inerciales. (La velocidad relativa de los sistemas inerciales es menor o igual que c por definición). Así, c es una velocidad tope en dos sentidos. De acuerdo con la ecuación (5.18) c , es el límite superior (inferior) para una partícula que se mueva con velocidad sublumínica (superlumínica).

Varios físicos han especulado sobre las fatídicas propiedades de los "taquiones", nombre acuñado por Gerald Feinberg para las hipotéticas partículas con velocidades superlumínica. Los taquiones pueden aparecer en nuestro amable mundo sub- c solamente si se los produce en pares. La física de los taquiones es por lo tanto necesariamente un tópico de la teoría cuántica de campos. La teoría cuántica de los taquiones libres ha sido desarrollada hasta cierto punto (Ver *G. Feinberg, Phys. Rev., n°159, 1089 (1967); n°D17, 1651(1978)*). La descripción teórica de las interacciones que involucren taquiones es hasta ahora un problema abierto.

5.9.- Teoría de la Relatividad y teoría cuántica

Einstein también dedujo la Ley de transformación de la energía E de un haz de luz :

$$E' = \gamma \times E(1 - v \cos \phi / c) \quad (5.22)$$

(donde ϕ esta definido como en la ecuación (5.17)). Es importante ver que con el movimiento del observador la energía y la frecuencia de un complejo luminoso varían según las mismas leyes. La relación con la frecuencia es interesante, puesto que si consideramos la ecuación dada por Einstein:

$$E = h \nu \quad (5.23)$$

Y la relación para el momentum lineal de una partícula sin masa:

$$|\vec{p}| = E/c \quad (5.24)$$

Se puede obtener fácilmente la formula propuesta por Louis de Broglie:

$$E = c|\vec{p}| \Rightarrow c|\vec{p}| = h \nu \Rightarrow |\vec{p}| = \frac{h \nu}{c} \Rightarrow |\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{|\vec{p}|} \quad (5.25)$$

Donde λ es la longitud de onda asociada a la partícula y h es la

constante de Planck, cuyo valor es $6,6262 \times 10^{-34}$.

5.10.- Sobre $E=mc^2$

En Septiembre de 1905, Einstein llegó a la conclusión de que la masa es una medida de su contenido de Energía. Por tanto, la Ley de conservación de la masa es un caso particular de la Ley de conservación de la Energía. Afirmó además, que, en lo que respecta a la inercia, una masa m es equivalente a un contenido de Energía mc^2 . Este resultado es de extraordinaria importancia, ya que implica que la masa inercial y la Energía de un sistema físico aparecen como cosas equivalentes. De hecho Fritz Hasenhörl había descubierto que la Energía de una cavidad aumenta si se la llena con radiación, de manera tal que la masa del sistema parece incrementarse.

La demostración de Einstein para la relación $E = mc^2$ es como sigue. Sea un cuerpo con Energía E_i en reposo en un sistema inercial dado. El cuerpo emite ondas planas de luz con energía $L/2$, en una dirección que forma, en una dirección que forma un ángulo ϕ con el eje x , y una cantidad igual de Energía en dirección opuesta. Después de estas emisiones, el cuerpo tiene Energía E_f , de modo que $\Delta E = E_i - E_f = L$. Consideremos esta misma situación, vista desde un sistema inercial que se mueve con velocidad v en dirección x . Según la ecuación (5.23), $\Delta E' = E'_i - E'_f = \gamma L$, independientemente de ϕ . Así que

$$\Delta E' - \Delta E = L(\gamma - 1) \quad (5.26)$$

(donde γ se define como en (5.20))

o hasta segundo orden,

$$\Delta E' - \Delta E = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{c^2} \right) v^2 \quad (5.27)$$

Ahora fijémonos en que la ecuación (5.27) es idéntica en estructura a la ecuación (5.21) para la variación de Energía cinética de una partícula, de modo que si un cuerpo entrega Energía L en forma de radiación, su masa disminuye en L/c^2 . El hecho de que la Energía que se retira del cuerpo se transforme en radiación, evidentemente no hace ninguna diferencia.

La comprobación experimental de esta relación no se llevó a cabo hasta 1937, cuando la velocidad de la luz c fue calculada a partir de reacciones nucleares en las que se conocía las masas de los productos iniciales y finales, y la energía liberada en la reacción. El valor de c fue correcto dentro de un cinco por mil.

[El Modelo Relativista](#)

[Home](#)

6.-El modelo Relativista

Como es bien conocido existe una paradoja, llamada paradoja de los gemelos, que nos muestra como el tiempo medido por un observador en reposo y el medido por otro en movimiento con respecto a él es diferente. Nosotros vamos a tratar este caso de una forma muy especial. Consideremos el experimento controlado como sigue.

Imaginemos que se ha conseguido construir una nave espacial capaz de alcanzar una velocidad muy cercana a la de la luz. Desde Princeton, se prepara el lanzamiento de esta colosal nave. Un astronauta llamado Marcel Grossmann, de 20 años de edad, se dispone a participar en esta aventura muy particular. Un grupo de científicos de todo el mundo, se disponen a poner a prueba la Relatividad mediante esta nave, para la que han programado dos viajes(uno con aceleración 9.8 m/s^2 y otro con aceleración $9.8 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-2}$) Para ello solicitan a Marcel que calcule la aceleración de su nave, que la acelere cuando se lo soliciten y que saque diversas conclusiones sobre la Energía y momentum relativistas, y el tiempo propio, comparando estas predicciones relativistas con las clásicas. El viaje de Marcel tiene su meta en una estación espacial muy lejana preparada para la ocasión. Desde allí, Marcel enviará la información a nuestro grupo de científicos.

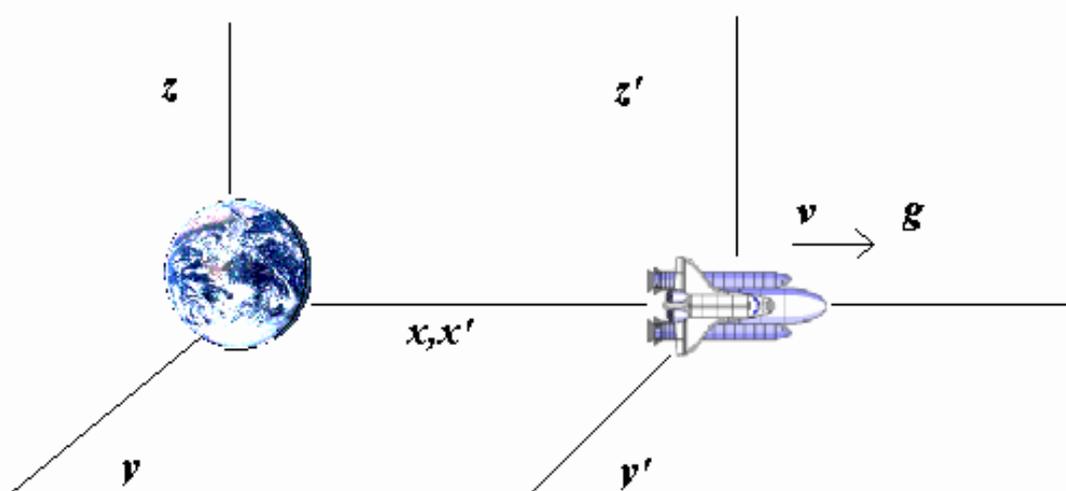
En primer lugar Marcel sincroniza su reloj con otro fijo en la tierra, de tal manera que pueda observarse el retraso de los relojes en movimiento. Una vez en el interior de la nave, Marcel recuerda que ha olvidado las anotaciones sobre las características de la nave, sin las cuales no podrá calcular las variaciones, vistas por un observador en reposo, de sus dimensiones. Entonces, recibe una señal indicándole las siguientes características: "La longitud de la nave es de 100 metros; su masa es de 10000 kilogramos". Por fin, Grossmann, puede despegar.

Para despegar Grossmann, debe acelerar uniformemente y alcanzar así una velocidad de crucero. En sus cálculos debe despreciar cualquier efecto debido a la Relatividad General. Comienza aquí su problema. En primer lugar, los científicos le informan de que debe determinar el movimiento relativista uniformemente acelerado para el que la aceleración de la nave g en el sistema de referencia propio (en cada instante) es constante.

Comienza aquí nuestra exposición general del modelo realizado con la herramienta *Modellus*. Nuestro compañero Grossmann, nos guiará por los enrevesados cálculos.

El esquema, antes de comenzar con la resolución del problema, es como sigue:

La Tierra será nuestro Sistema "fijo" ideal respecto del cual se observa el movimiento.



Vamos a resolver el problema como un sencillo ejercicio para después mostrar las pruebas numéricas. En el sistema de referencia "fijo", respecto del cual se observa el movimiento, la expresión de la aceleración conduce a la ecuación

$$\frac{du_x}{d\tau} = g \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde u_x es la velocidad medida por el observador en reposo y τ el tiempo propio del astronauta, por tanto,

$$\frac{du_x}{dt} = g \quad (6.1)$$

de donde,

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = g \quad , \text{ o bien si integramos } \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = g \cdot t + C$$

Donde v es la velocidad propia de Marcel. Fijémonos en que la ecuación (6.1) desempeña un papel muy importante en la herramienta Modellus, ya que a partir de ella, fijada una aceleración g como condición inicial, se obtiene la velocidad propia de Marcel. Con ella calculada es posible emplear la magnitud en las restantes fórmulas del Modelo.

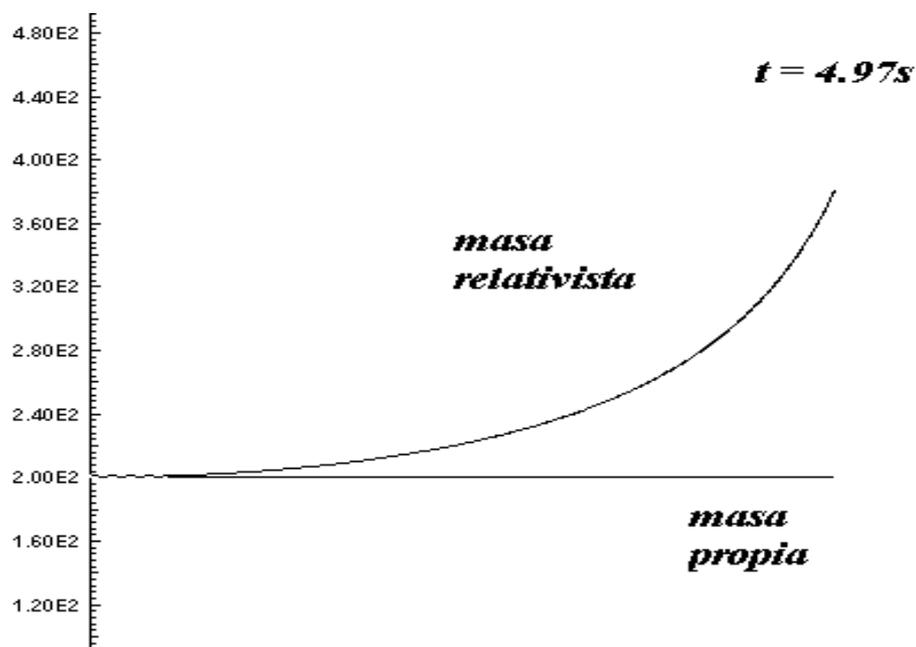
Si ahora hacemos $v = 0$ para $t = 0$, se encuentra que $C = 0$, de forma que

$$\begin{aligned} \frac{v^2/c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} &= \frac{g^2 \cdot t^2}{c^2} \\ v^2/c^2 &= \frac{g^2 \cdot t^2}{c^2} - \frac{v^2/c^2 (g^2 \cdot t^2)}{c^2} \\ v^2/c^2 \left(1 + \frac{g^2 \cdot t^2}{c^2} \right) &= \frac{g^2 \cdot t^2}{c^2} \\ v^2/c^2 &= \frac{\left(\frac{g^2 \cdot t^2}{c^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{g^2 \cdot t^2}{c^2} \right)} \\ v^2 &= \frac{\left(g^2 \cdot t^2 \right)^2}{1 + \left(\frac{g \cdot t}{c} \right)^2} \\ v &= \frac{g \cdot t}{\sqrt{1 + \left(\frac{g \cdot t}{c} \right)^2}} \quad (6.3) \end{aligned}$$

Masa Relativista y masa propia

Y el resultado es similar, (ya que "masa" es la variable y "m" la masa propia). Son necesarias aceleraciones grandes para obtener algún resultado más satisfactorio, tanto en la contracción como en la masa. Para ello, Marcel acelera su nave dando a g un valor de $9,8 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-2}$. Ahora Marcel descubre un efecto muy importante en sus tablas y gráficas:

<i>masa</i>	<i>m</i>
200.0000000000	200.0000000000
210.4006759600	200.0000000000
238.9011883139	200.0000000000
280.0285699710	200.0000000000
329.0822254561	200.0000000000
383.0288645926	200.0000000000
440.0727212632	200.0000000000
499.1530604712	200.0000000000
559.6252714491	200.0000000000
621.0829252201	200.0000000000
683.2601586837	200.0000000000

*Masa Relativista y masa propia*

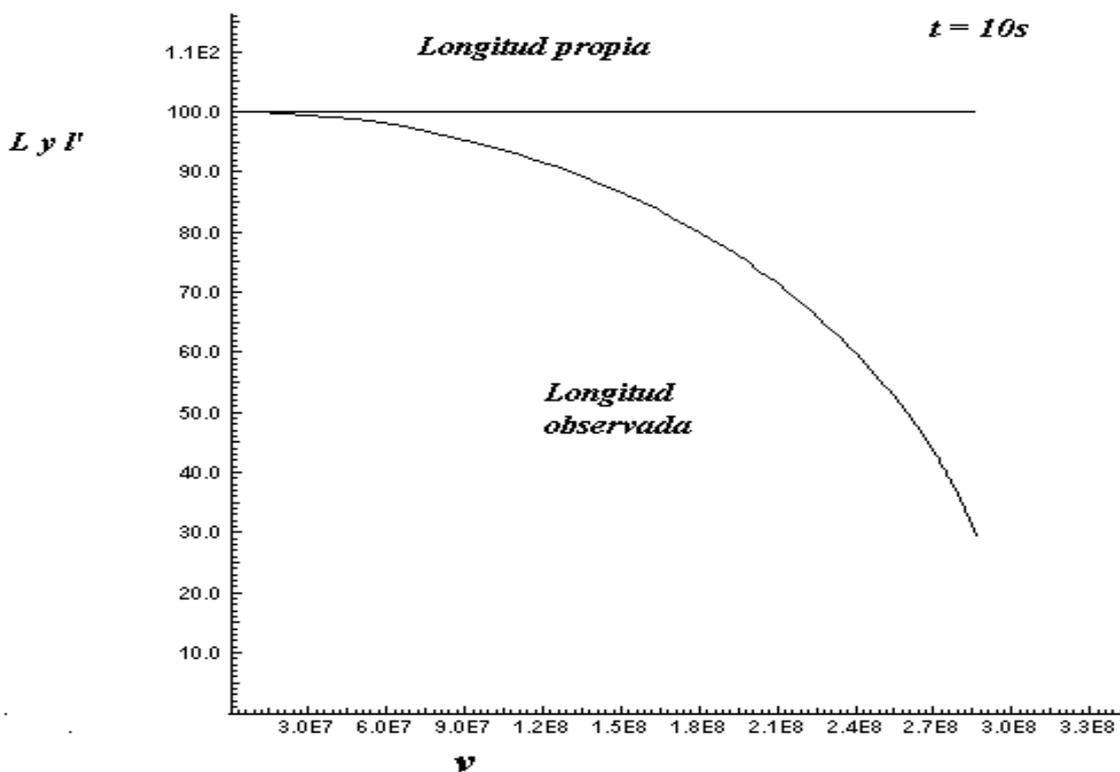
Lo que concuerda con lo predicho por la [Mecánica relativista](#).

La masa varía ahora considerablemente, pero también la longitud L que

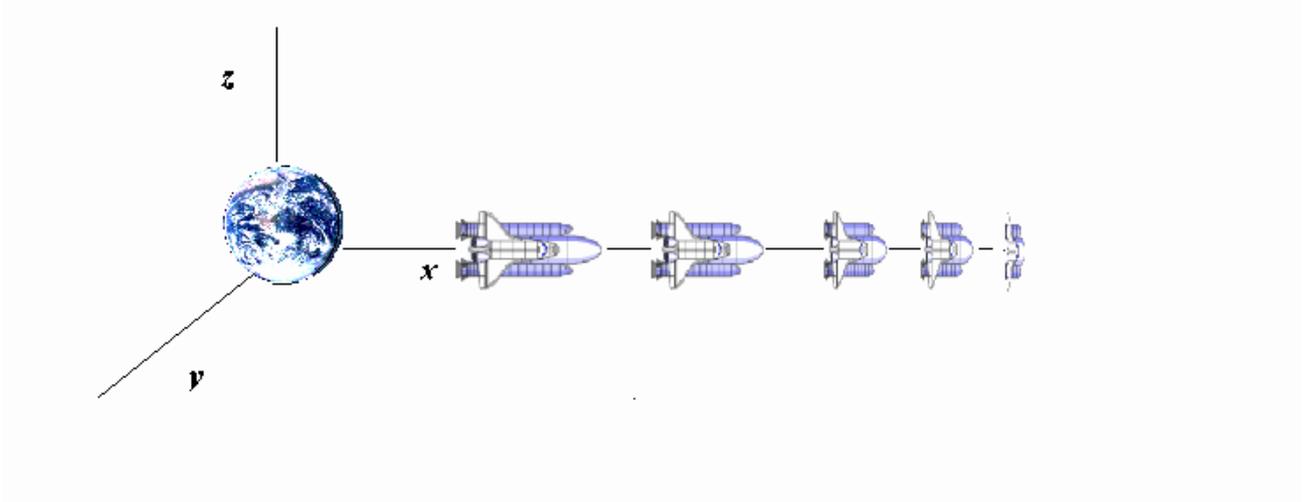
observaría un científico en reposo para el que la nave se mueve con una velocidad de 255305936 m/s, es decir, de 0.85c aproximadamente, mientras en el anterior caso se tenía una velocidad de 48,706 m/s. Las gráficas y tablas de la Longitud son las siguientes:

<i>L</i>	<i>l</i>
100.0000000000	100.0000000000
95.0503820936	100.0000000000
83.6992817479	100.0000000000
71.3970652736	100.0000000000
60.7485591880	100.0000000000
52.1891043072	100.0000000000
45.4220820976	100.0000000000
40.0445971684	100.0000000000
35.7166312247	100.0000000000
32.1818495864	100.0000000000
29.2529104627	100.0000000000

Para t = 10s la contracción es ya un hecho notable



Gráficamente sería, para nuestra nave:



Trataremos ahora el problema el espacio recorrido en un intervalo de tiempo.

Como $v=dx/dt$, integramos de nuevo y hacemos $x = 0$ para $t = 0$, encontrando que

$$x_{t-t_0} = \int_0^t \frac{g \cdot t}{\sqrt{1 + \left(\frac{g \cdot t}{c}\right)^2}} dt = \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2 \cdot t^2}{c^2}} - 1 \right) \quad (6.2)$$

Para $gt \ll c$, estas fórmulas se convierten en las expresiones clásicas $v=gt$, $x=gt^2/2$. Para $g \cdot t \rightarrow \infty$ la velocidad tiende al valor constante c .

Pero ahora nos preguntamos por el tiempo propio de nuestro astronauta Marcel. Como sabemos

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (6.3)$$

Por tanto haciendo la integral, y sabiendo que en $t = 0, \tau = 0$:

$$r = \int_0^\tau d r = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{(g \cdot t/c)^2}{1 + \left(\frac{g \cdot t}{c}\right)^2}} dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{g \cdot t}{c}\right)^2}} dt = \frac{c}{g} \operatorname{arcsen} h \left(\frac{g \cdot t}{c} \right) \quad (6.4)$$

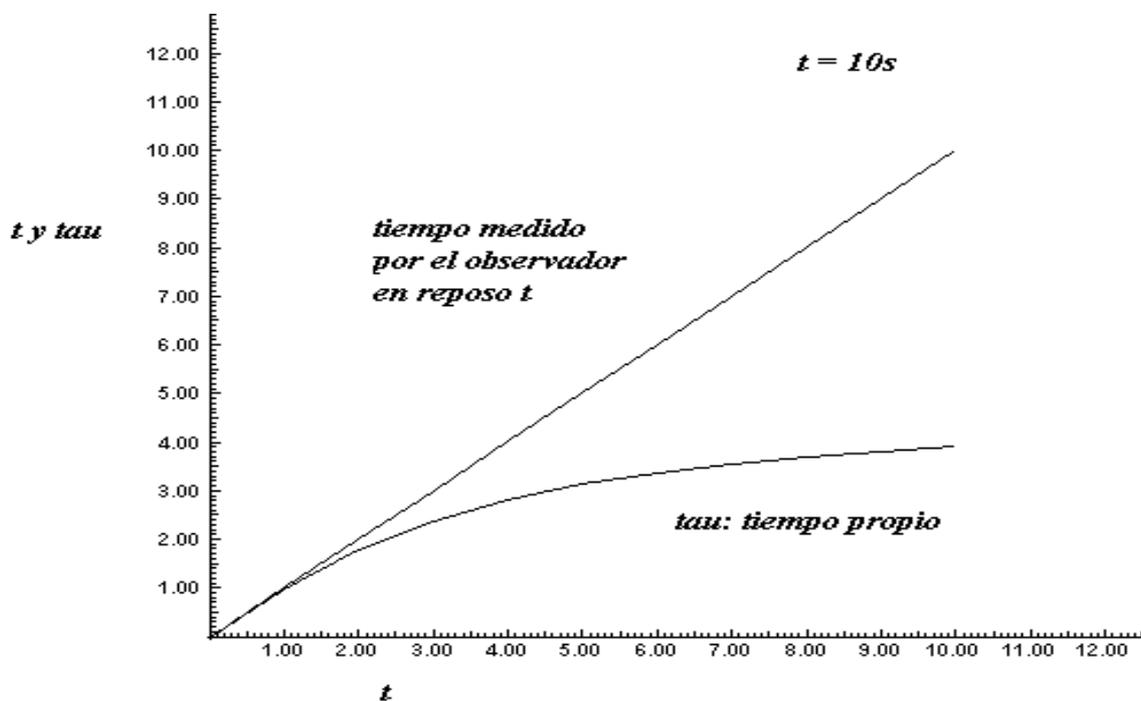
Cuando $t \rightarrow \infty$, el tiempo propio aumenta mucho más lentamente que t , precisamente de acuerdo con la ley

$$r = \frac{c}{g} \ln \left(\frac{2 \cdot g \cdot t}{c} \right) \quad (6.5)$$

Planteémonos de nuevo, una tabla comparativa para expresar el tiempo propio de Marcel, y el tiempo del observador en reposo. Marcel aplicará ahora las fórmulas (6.3) en el Modellus para poder hallar la integral, y por tanto el valor de (6.4), ecuaciones necesarias si se quiere obtener una representación gráfica y una tabla de valores, que reflejen la dilatación del tiempo propio esperada. Si el valor de g es 9.8 m/s^2 , la dilatación resulta despreciable, y $t = \tau$. Por tanto tomaremos el caso en el que $9.8 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-2}$. En este caso las tablas y gráficas para t y τ son las siguientes

t	τ
0.0000000000	0.0000000000
1.0000000000	0.9665631718
2.0000000000	1.7713458505
3.0000000000	2.3727762027
4.0000000000	2.8079642446
5.0000000000	3.1255766247
6.0000000000	3.3628697490
7.0000000000	3.5448690708
8.0000000000	3.6879477254
9.0000000000	3.8029179338
10.0000000000	3.8970743341

Para esta aceleración la dilatación del tiempo es evidente transcurridos 10s en el reloj del observador en reposo



Grossmann, observará a su regreso que es más joven que sus amigos de la Tierra. De hecho a esa aceleración el tiempo casi se ha congelado durante el tiempo que viajaba en la nave.

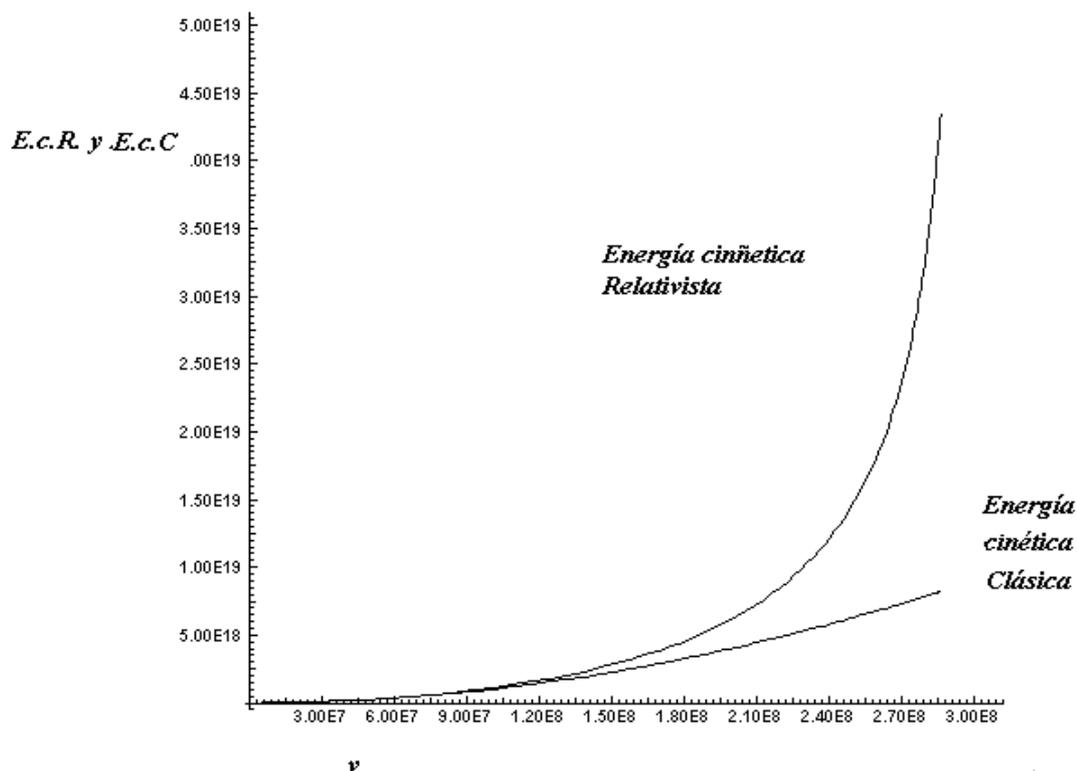
Marcel se pregunta ahora cuál será la diferencia entre la [Energía](#) cinética Relativista y la Energía cinética clásica. Como veíamos en [Mecánica Relativista](#), la primera se reducía a la segunda en el caso en el que $c \rightarrow \infty$. Pero

existían grandes diferencias. Una de ellas es que la [Energía](#) de la partícula, en nuestro caso la nave, no comienza con una Energía nula si $v=0$, sino con una Energía en reposo $E=mc^2$. Por otra parte cuando $v \rightarrow c$, la Energía y el momentum relativistas se hacían infinitas.

Por esta razón Marcel se alegró cuando vio los siguientes resultados para la [Energía](#) cinética Relativista y la clásica:

E_c	E_{clas}
0.000000	0.000000
9.360288E17	8.676806E17
3.500712E18	2.691260E18
7.201146E18	4.406110E18
1.161425E19	5.670797E18
1.646715E19	6.539610E18
2.159839E19	7.133271E18
2.691261E19	7.546335E18
3.235188E19	7.841030E18
3.787968E19	8.056737E18
4.347213E19	8.218458E18

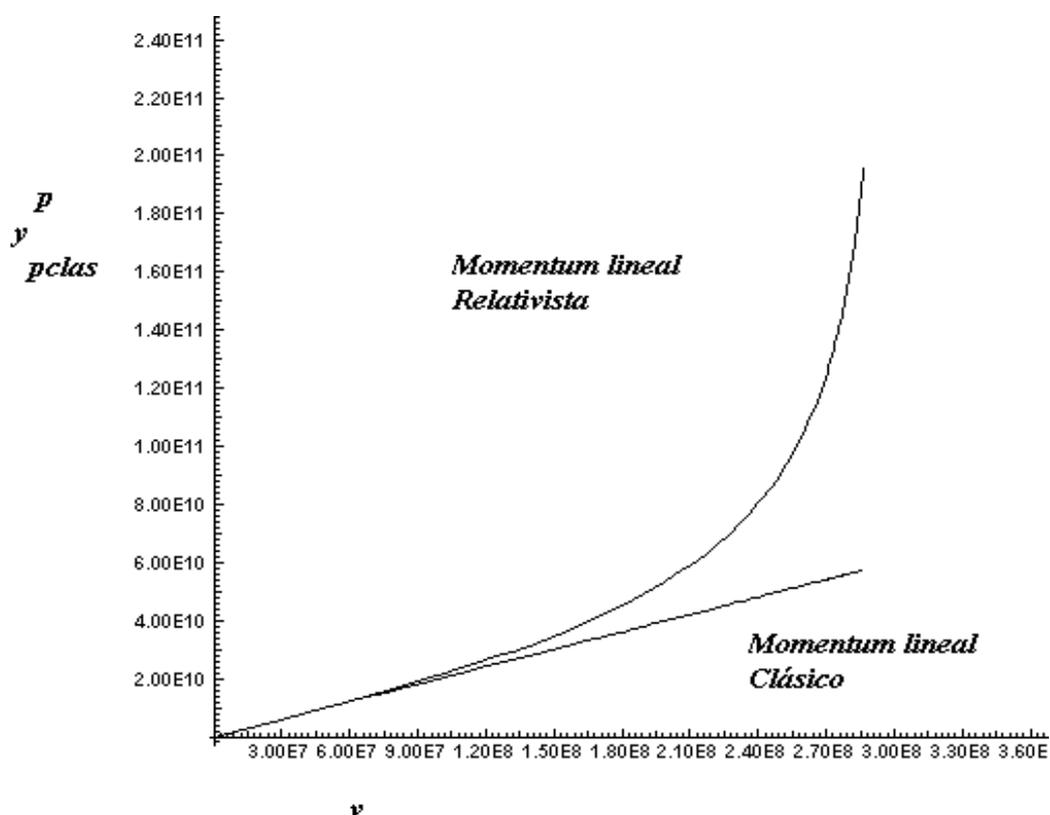
Las diferencias entre la Energía cinética Relativista (E_c) y la Clásica (E_{clas}) se hacen evidentes con este valor de g



Y para los [momentum](#) Relativista y clásico se tiene

p	p_{clas}
0.00000	0.00000
1.96000E10	1.86299E10
3.92000E10	3.28101E10
5.88000E10	4.19815E10
7.84000E10	4.76269E10
9.80000E10	5.11453E10
1.17600E11	5.34164E10
1.37200E11	5.49412E10
1.56800E11	5.60037E10
1.76400E11	5.67688E10
1.96000E11	5.73357E10

El momentum lineal Relativista (p) crece más rápidamente que el momentum lineal clásico (p_{clas})



Y se verifica que si velocidad v se acerca a c las magnitudes como la [Energía](#) o el [momentum](#) se hacen infinitas, mientras que el [tiempo propio](#) se congela en un valor límite.

Como resultado de estos viajes Grossmann dejó un programa, con el que se puede interactuar, y el usuario se convierte en el acelerador de la nave. Al mismo tiempo puede observar los efectos relativistas de la dilatación del tiempo en los relojes, la contracción de FitzGerald-Lorentz en una regla y las comparaciones entre la Energía cinética Relativista y la clásica de un modo muy intuitivo. Por otra parte, se ofrece la posibilidad de observar las gráficas y tablas comparativas de las magnitudes tal y como se ha descrito hasta ahora, pero con mayor libertad para el usuario. Para cualquier duda o referencia sobre Relatividad Especial puede consultarse el [Índice](#) y la Bibliografía, que incluye los Links.

El lector podría preguntarse hasta que punto se asemeja esta aceleración uniforme a la gravedad. Ciertamente puede existir alguna relación.

El fichero puede encontrarse [aquí](#) y es necesario el Modellus para poder visualizarlo. Para una mayor comprensión del Modelo puede observarse el esquema.

[La Teoría de la Relatividad General](#)

[Home](#)

7.-Relatividad General

La teoría de la Relatividad especial debe su creación a las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético. Y a la inversa: estas últimas no son captadas formalmente de modo satisfactorio sino a través de la teoría de la Relatividad especial.

Pero la Teoría de la Relatividad especial no es mas que un paso hacia una evolución necesaria. Ésto es, necesitamos observar que ocurre en el marco de la gravitación, cuando aplicamos la Relatividad especial. Esta pregunta se la hacía Einstein antes de publicar un artículo sobre Relatividad especial en el *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* (Anuario de Radioactividad y Electrónica). Es por tanto necesaria una modificación de las Ley newtoniana de la gravitación de manera que sus leyes armonizaran con la Teoría de la Relatividad Especial.

Para enfrentarnos a esta tarea debemos saber dos consideraciones muy importantes:

- 1.- Por consideraciones generales de la Teoría de la Relatividad especial está claro que la masa inercial de un sistema físico crece con la energía total.
- 2.- Por experimentos como los de Eötvös sabemos que la masa pesante de un cuerpo es exactamente igual a su masa inercial.

Por (1) y (2) se sigue que el peso de un sistema depende, de manera exactamente conocida, de su energía total. Con los resultados enunciados no cabe la posibilidad de que la Teoría especial se amplíe a una Teoría de la gravitación. Es aquí donde Einstein introduce su Experimento mental, desarrolla el principio de equivalencia y fusiona la Teoría de la Relatividad Especial con la General.

Trataremos ahora de hacer un desarrollo de la misma.

[El Modelo Relativista](#)

[El Principio de Equivalencia](#)

[Home](#)

7.1.-El nuevo principio:

El principio de Equivalencia

Pensemos en el siguiente razonamiento: " Si una persona está en caída libre, no siente su propio peso".

El campo gravitatorio tiene solo una existencia relativa, de manera similar al campo eléctrico generado por la inducción electromagnética. Porque para un observador que cae, en caída libre, desde el techo de una casa, no existe- por lo menos en su entorno inmediato - campo gravitatorio. En verdad si el observador suelta algunos cuerpos, éstos permanecen con respecto a él, en estado de reposo o de movimiento uniforme, independientemente de su particular naturaleza física y química (la resistencia del aire, naturalmente se ignora en esta consideración). El observador tiene por lo tanto derecho a interpretar su estado como en reposo.

A causa de esta idea, la ley experimental, notablemente peculiar , de que en un campo gravitatorio todos los cuerpos caigan con la misma aceleración, adquiere de inmediato un profundo significado físico. En efecto, si existiera un solo objeto que cayese en un campo gravitatorio de manera distinta que todos los demás, con su ayuda el observador podría comprobar que se encuentra en un campo gravitatorio. Tiene en cambio derecho a considerar su estado como reposo, y su entorno como libre de campo, en cuanto a gravitación se refiere.

La independencia experimentalmente conocida, de la aceleración de caída, con respecto a la materia, es por lo tanto un poderoso argumento para el hecho de que el postulado de la Relatividad tenga que ser extendido a sistemas de coordenadas que estén en movimiento uniforme uno con respecto al otro.

Formalmente podemos decir que en un sistema de referencia inercial, el movimiento libre de todos los cuerpos es uniforme y rectilíneo y si, por ejemplo, en el instante inicial sus velocidades eran todas las mismas, seguirán siendo las mismas en cualquier instante. Es claro, pues que si consideramos este movimiento desde un sistema no inercial dado, también respecto de este sistema todos los cuerpos se moverán de la misma manera.

Enunciamos así el principio de equivalencia:

Las propiedades del movimiento de un sistema no inercial son las mismas que en un sistema inercial cuando existe un campo g . Es decir, un sistema de referencia no inercial equivale a un cierto campo gravitatorio.

Por tanto podemos decir que no existe experimento alguno que pueda realizarse en una pequeña región del espacio (como debe ser para que el campo se pueda considerar uniforme en ella) que permita distinguir entre un campo gravitacional y una aceleración uniforme equivalente.

Sin embargo, los campos a que equivalen los sistemas de referencia no inerciales no son por completo idénticos a los campos gravitatorios reales que encontramos también en los sistemas de referencia inerciales. En efecto, existe una diferencia esencial en cuanto a su comportamiento en el

infinito. A distancia infinita de los cuerpos que producen el campo, un campo gravitatorio real tiende siempre a cero. Por el contrario los campos a que equivalen los sistemas de referencia no inerciales aumentan sin límite en el infinito, o, en cualquier caso conservan en él un valor no nulo.. Así, por ejemplo, la fuerza centrífuga que aparece en un sistema de referencia en rotación aumenta sin límites cuando nos apartamos del eje de rotación; el campo al que equivale un sistema de referencia en movimiento uniforme acelerado es el mismo en todo el espacio, incluido el infinito.

Los campos a los que equivalen los sistemas de referencia no inerciales se anulan al pasara a un sistema inercial. En cambio los campos gravitatorios reales (los que existen también en un sistema de referencia inercial) no se pueden eliminar sea cual sea la elección del sistema de referencia. Ésto es evidente ya por lo dicho antes acerca de la diferencia entre las condiciones en el infinito para los campos gravitatorios reales y los campos gravitatorios a los que equivalen los sistemas no inerciales; dado que estos últimos campos no tienden a cero en el infinito, es claro que, cualquiera que sea el sistema de referencia elegido, es imposible anular un campo real, puesto que este se anula en el infinito.

Como en la Relatividad Especial, este principio trae consigo nuevas consecuencias.

[Relatividad Especial](#)

[Consecuencias del nuevo principio](#)

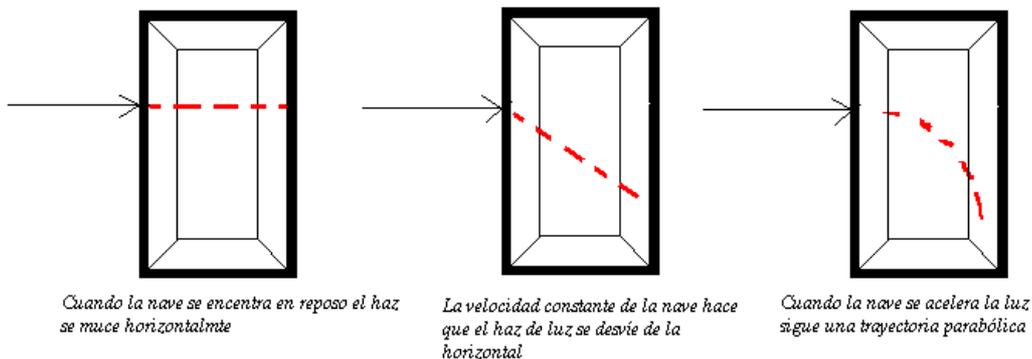
[Home](#)

7.2.-Consecuencias del Nuevo Principio

Principio

Al igual que la constancia de la velocidad de la luz llevó a predicciones sobre la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud, el principio de equivalencia lleva a algunas predicciones que alteran el modo de ver el espacio y el tiempo.

Considérese que se dispara un haz de luz a lo ancho de la nave de una fuente luminosa que se considera en reposo en una región del espacio con gravedad despreciable. Si la nave estuviera en reposo con respecto a la fuente, el haz la atravesaría directamente; si la nave se moviera a velocidad constante, perpendicular al haz de acuerdo con un observador en reposo junto con la fuente, un observador dentro de la nave vería que el haz sigue una trayectoria en línea recta pero oblicua (a un ángulo v/c , con respecto a la horizontal cuando v es pequeña). En un cohete acelerado, v varía y también el ángulo v/c se modifica; entonces el haz sigue una trayectoria curvilínea (parabólica) de acuerdo con el observador dentro de la nave.



Si el principio de equivalencia es correcto, el comportamiento del haz de luz en el cohete acelerado debe de ser el mismo que en el campo gravitacional de la tierra. Por lo tanto, el haz de luz debe de seguir una trayectoria curvilínea en el campo gravitacional de la tierra.

Un haz de luz debe de recorrer el camino mas corto y directo entre dos puntos, de ahí que sea tan especial su influencia en los conceptos de espacio y tiempo. Esto debe ser así por el primer postulado de la relatividad, ya que ningún cuerpo puede viajar más rápidamente que la luz. Por lo tanto si el haz de luz sigue una trayectoria curva como la distancia mínima entre dos puntos, entonces el espacio mínimo debe ser curvo, y deberá de ser el campo gravitacional lo que provoca la curvatura.

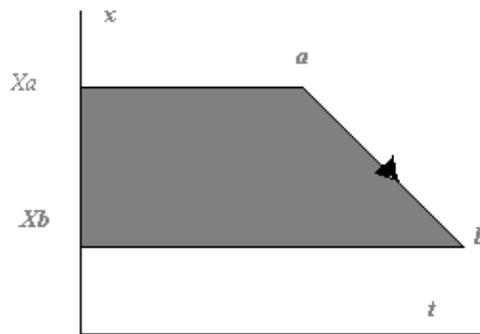
La distancia más corta entre dos puntos en una geometría curvilínea cualquiera se conoce como una geodésica. En la geometría plana las geodésicas son líneas rectas, mientras que en la esférica son arcos de círculos.

La diferencia entre la teoría gravitacional de Newton y la teoría de la Relatividad General, basada en un espacio tiempo curvo, se ilustra como sigue.

Una masa M se encuentra restringida a moverse sobre el eje X (como una bolita deslizando sin fricción por un alambre). Supongamos que la masa se mueve con velocidad constante de un punto a a otro b



El espacio-tiempo de la bolita se puede representar por el plano de dos dimensiones xt , y ya que nada interesante ocurre en las otras direcciones no se representaran. En el espacio-tiempo, la trayectoria de M es una línea recta



Trayectoria de la bolita en el espacio-tiempo

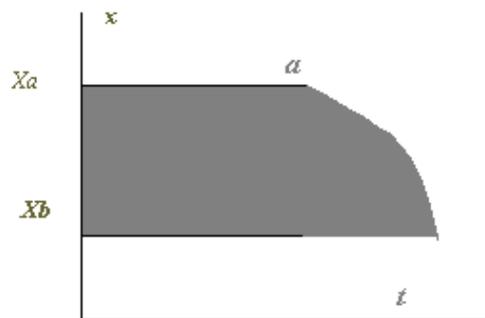
La masa comienza su movimiento en $X=X_a$ y se mueve hacia el origen.

De acuerdo con el lenguaje de la física clásica la masa se mueve según la expresión $X=X_a-vt$. En el lenguaje del espacio-tiempo, se define el intervalo

$$(ds)^2 = v(dt)^2 - (dx)^2$$

De acuerdo con la Teoría, la partícula sólo se puede mover por aquellos puntos del espacio-tiempo que están conectados por intervalos de longitud cero; el lugar geométrico de todos esos puntos define la geodésica de la partícula.

Coloquemos ahora una masa M grande en el origen; M se atrae a m con la fuerza gravitacional newtoniana normal. A medida que la partícula se mueve de a a b , se acelera; así, el camino en el espacio-tiempo es, ahora, curvo.



Trayectoria de la bolita en el espacio-tiempo

De acuerdo con la física clásica, el movimiento de la partícula puede ser descrito por :

$$x(t) = \left(x_a^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{2GM} t \right)^{2/3}$$

Expresión que se deduce al resolver la ecuación de la segunda ley de Newton $F = md^2x/dt^2$, sustituyendo la fuerza $F = GmM/x^2$. Según la teoría basada en la geometría curvilínea la presencia de la masa M curva el espacio xt de tal forma que se vería la figura (15.12). Entonces la partícula, simplemente sigue el camino más corto entre a y b al moverse en su espacio-tiempo curvo. Ahora el intervalo es

$$(ds)^2 = \frac{2GM}{x} (dt)^2 - (dx)^2$$

Por tanto la trayectoria geodésica conecta aquellos puntos con intervalo relativo nulo. La intensidad de la fuerza gravitacional ya no tiene sentido desde este punto de vista; lo importante es la curvatura del espacio-tiempo determinada por la presencia de la masa M.

Se observa así la gran diferencia entre la gravitación newtoniana y la teoría de la relatividad general: mientras la teoría de Newton concede a la fuerza una intensidad infinita y por tanto de alcance instantánea la teoría de la relatividad general reinterpreta el concepto de atracción y lo simplifica en un problema geométrico del espacio-tiempo.

El problema a resolver es el movimiento en un campo gravitacional. En el marco de la relatividad general este consiste en determinar los coeficientes $(dt)^2 (dx)^2 (dy)^2 (dz)^2$ en el intervalo (ds) . Estos coeficientes, tomados como grupo, forman la métrica del espacio-tiempo; la métrica está determinada en parte por las masas gravitantes que se encuentren presentes, y a su vez, esta determina el movimiento de las masas y los haces de luz.

La elevada matemática necesaria para resolver los problemas gravitatorios nos obligan a adoptar aquí una actitud menos formal y más generalizada. Encontremos ahora la expresión de las ecuaciones que determinan la métrica del espacio-tiempo.

Las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General son ecuaciones tensoriales las cuales,

requieren un elevado nivel matemático. Aun así se ofrece la ecuación del campo gravitatorio:

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi K}{c^4} T_i^k$$

Donde los elementos R y T son tensores, y K es una constante.

Básicamente podemos decir que esta ecuación básica se puede escribir simbólicamente como:

$$(\text{Curvatura del espacio}) = \frac{8\pi K G}{c^4} = (\text{Densidad de Energía-Masa})$$

Es fácil ver que esta ecuación lleva la gravitación (constante G) y la Relatividad especial (constante c). En el límite de la cinemática clásica ($c \rightarrow \infty$), y en el caso de materia o energía nulas, el miembro derecho se anula y el espacio es plano.

Como la teoría de la relatividad especial, la general también tiene unas aplicaciones que detallaremos a continuación.

[El Principio de Equivalencia](#)

[Aplicaciones de la Relatividad General](#)

[Home](#)

8.-Aplicaciones de la Relatividad General

8.1.-Solución de Schwarzschild

En este primer caso, las soluciones a la ecuación de Einstein se derivan en la región cercana a una masa individual M que no efectúa ningún movimiento de rotación. La métrica del espacio-tiempo curvo cuadridimensional en la vecindad de dicha masa, fue calculada por primera vez por [Karl Schwarzschild](#) en 1916; para este caso el intervalo en coordenadas esféricas es :

$$(ds)^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} - r^2 (d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (1)$$

Esta ecuación incluye un problema aparentemente desconcertante: un

término $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)$, en el que el denominador causa que la separación explote en el radio de Schwarzschild.

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (2)$$

donde r_s es la distancia medida desde el centro de M. Esta circunstancia podría llevar a la conclusión de que es imposible que exista un cuerpo (de masa dada) con un radio menor que el radio que el radio gravitatorio. En realidad, sin embargo, tales conclusiones serían de hecho incorrectas. Esta situación se debe parcialmente a un problema de las coordenadas que utilizamos en la ecuación (1). Ninguna de las coordenadas tiende al infinito cuando $r = r_s$. Un objeto que caiga hacia una masa en gravitación no sentiría ningún efecto al tiempo que pasara por $r = r_s$. Sin embargo, la situación es muy diferente para los observadores externos; a un observador externo , en reposo , lejos de M, le parecería que los relojes que están en el objeto que cae marchan más despacio a medida que el objeto cae hacia $r = r_s$; y cuando el objeto llega r_s los relojes y, el objeto mismo, parece que se detienen y se congela para siempre en el tiempo en ese mismo punto. Al mismo tiempo la luz que emite el objeto en caída se corre más hacia el rojo, tornándose infinito cuando el objeto llega a r_s . Entonces de acuerdo con el observador distante el objeto desaparece. El objeto mismo no nota ningún efecto a medida que cae, con una excepción, a cualquier tiempo antes de llegar a por r_s , el objeto en caída puede escapar de la atracción gravitacional de M, por ejemplo encendiendo los motores de sus cohetes.. Una vez pasado el por r_s , ya no es posible escapar. En un lenguaje conocido la velocidad sería mayor que c , y nada ni siquiera la luz podría escapar. Es lo que conocemos como [Agujero negro](#).

8.2.-Cosmología

Esta segunda aplicación fue introducida por Einstein, motivado éste por su conocimiento sobre los principios de [Ernst Mach](#) (1838-1916),y trata así de responder a la pregunta : ¿ Será el espacio- tiempo del

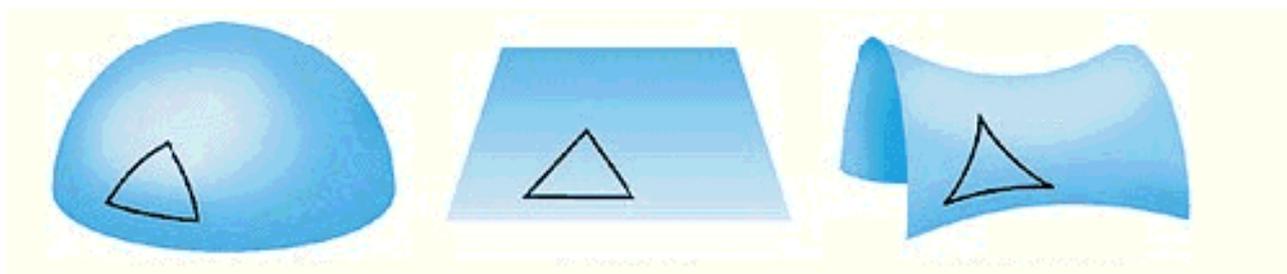
universo en su totalidad (no sólo en la vecindad de objetos masivos) curvo o plano ?. En este caso lo que buscamos es el tamaño o el radio R del universo, y cómo cambia con el tiempo. Sería conveniente determinar $R(t)$ para proyectar esa expansión hacia el pasado indefinido y hacia el futuro infinito y estudiar el origen y destino del universo.

Haciendo ciertas suposiciones, las soluciones a las ecuaciones de Einstein para este caso se pueden escribir:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho R^2 - kc^2 \quad (3)$$

Donde $R(t)$ representa el tamaño o factor de escala de distancia del universo de en el tiempo t y ρ representa la densidad de masa - energía del universo en ese mismo tiempo. La densidad se debe interpretar como una densidad promedio a gran escala, medida sobre una región grande del espacio comparada con el espaciamiento entre las galaxias.

La constante k que aparece en la ecuación especifica la estructura geométrica general del universo: $k=0$ si el universo es plano , $k=+1$ si el universo es curvo y cerrado , $k=-1$ si el universo es curvo y abierto.



$k=+1$; $k=0$; $k=-1$

En estos casos $R(t)$, debe considerarse como un factor de escala que representa la expansión del espacio; la magnitud absoluta de R en este caso no es significativa y sólo interesa su variación en el tiempo, ya que la distancia entre las galaxias variará según varíe R .

Podemos ahora introducir una segunda ecuación, designando por ρ y $p(t)$ la densidad y la presión universales:

$$\left(\frac{d^2 R}{dt^2}\right) = -\left(\frac{4\pi G}{3}\right)\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right)R \quad (4)$$

que junto con

$$p=p(\rho) \quad (5)$$

determinan completamente la evolución temporal del universo.

A partir de estas ecuaciones es posible determinar, además, aspectos como el [corrimiento al rojo cosmológico](#). Nosotros nos centraremos en simplificar las anteriores ecuaciones y, a partir de ahí construir un sencillo modelo.

Consideremos el factor de escala normalizado $a(t)=R(t)/R_0$ donde R_0 , refleja el factor de escala en un instante actual. (Se supone conocida la relación entre el factor de escala y la constante de Hubble, $H_0= R'_0/R_0$). De acuerdo con las anteriores ecuaciones la evolución temporal del universo vendrá descrita por:

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \left(\frac{8\pi G, \rho}{3}\right) / a^2 - kc^2/R_0^2$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -(4\pi G, \rho_m/3)(\rho + 3p/c^2)a \quad (6)$$

Simplificando las ecuaciones para el estado actual de presión y materia, tenemos

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \left(\frac{8\pi G, \rho}{3}\right) / a - kc^2/R_0^2 \quad (7)$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -(4\pi G, \rho_m/3) / a^2 \quad (8)$$

Entonces según (8), la aceleración será siempre negativa ; su valor absoluto decrece al aumentar "a" y tiende a cero cuando el factor de escala tiende a infinito.

De acuerdo con (7), para que la velocidad da/dt , esté definida, la

diferencia entre $\left(\frac{8\pi G, \rho}{3}\right) / a$ y la constante kc^2/R_0^2 debe ser positiva. El factor de escala podrá evolucionar según (7) y (8) , de tres formas distintas, dependiendo del signo de la constante de curvatura k:

1.- (Curvatura positiva, $k = +1$)

La velocidad disminuye al aumentar da/dt , se hace nula en

$a_{max} \cong \frac{8\pi GR_0^2, \rho_m}{3c^2}$ y seguidamente negativa, empezando una fase de contracción que lleva de nuevo, a la singularidad $a = 0$, del instante inicial.

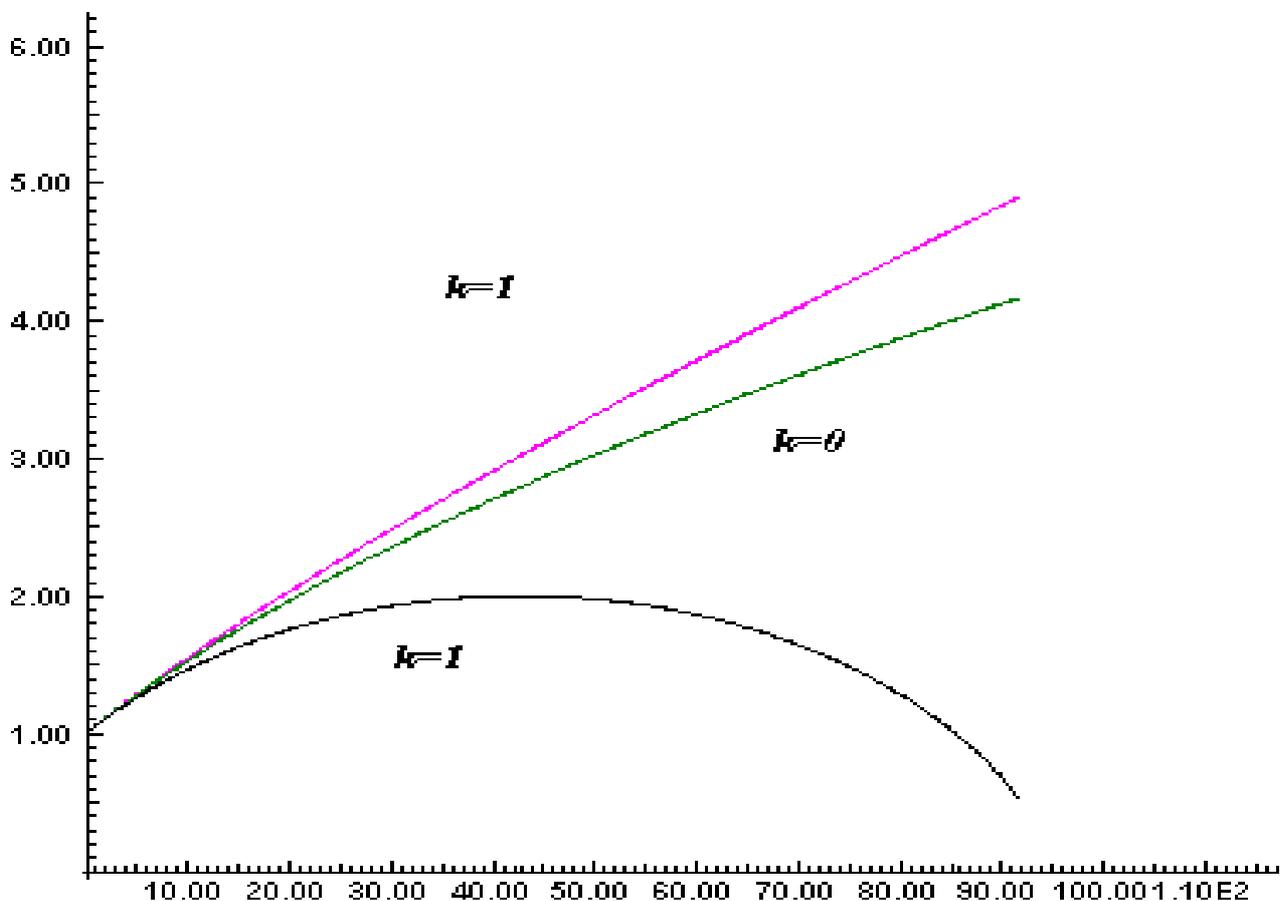
2.- (Curvatura nula, $k = 0$)

La velocidad da/dt disminuye al aumentar " a " tendiendo a cero cuando " a " tiende a infinito; la expansión es pues indefinida, debilitándose progresivamente y tendiendo a anularse para un tiempo infinito.

3.- (Curvatura negativa, $k = -1$)

La velocidad da/dt disminuye al aumentar " a ", tendiendo al valor finito c/R_0 cuando " a " tiende a infinito; la expansión es indefinida, debilitándose progresivamente hasta alcanzar la velocidad de crucero c/R_0 , que se mantiene indefinidamente.

La evolución temporal de " $a(t)$ " es por tanto como sigue gráficamente:



El modelo para esta representación ha partido de las anteriores ecuaciones, y de algunas simplificaciones que se sobreentiende pueden realizarse con un conocimiento de la Teoría de la Relatividad General. El modelo puede ser modificado y [aquí](#) se ofrece sólo como un sencillo ejemplo. Para ser visualizado requiere de la herramienta Modellus.

Aspectos más detallados sobre Cosmología y relatividad general podemos encontrarlos en el siguiente temario: [Physics](#).

[Conclusiones](#)

[Relativistas](#)

[Home](#)

Conclusiones

Relativistas

La Relatividad es un mundo desde el que cualquier punto de vista parece coherente. Es decir, en su corazón físico encierra un profundo significado filosófico que pretende conceder al hombre la libertad de expresar su circunstancia con plena libertad, con privilegio igual a todos los demás individuos. Einstein sabía que si su Relatividad especial sentaba la Leyes de la Naturaleza en una Nueva Mecánica y con unos principios sencillos, esta debía expandirse y "de la inclusión sacar una generalización" que transformara de manera radical el modo de ver, sentir y comprender el mundo que nos rodea. Sí, tal vez aquel año, 1915, supuso una ruptura con aquella mecánica a la que llamamos clásica, una ruptura que aún hoy alcanza a las más pequeñas mentes, como las del autor de este trabajo. Pero es cierto que la sencillez de los postulados encierra en su interior una Naturaleza especial que desvela aspectos inusitados y grandiosos de la Naturaleza. La sencillez con que se trazan las ideas en la Relatividad Especial, no es mas que el preludio de la idea más genial que se haya podido generalizar, el principio de equivalencia. Un principio que apareció en la mente de Einstein, mientras estaba en la oficina de patentes en Berna, y que llegó a nuestras mentes casi como un principio intrínseco a la propia Naturaleza nuestra. ¿Qué belleza encierran la Relatividad Especial y la General?. Tal vez será su sencillez al ser comprendidas, por

ser aspectos que se funden con el pensamiento del físico. Aspectos que arraigan en una estructura que a nuestros ojos parecen leyes superiores. Tal vez sea su matemática, bella hermosa, transparente, hilada con interpretaciones físicas que parecen deleitar la mente del físico clásico.

Quizás este trabajo no reúna más que un breve y rápido vistazo a la Relatividad en todos sus aspectos, pero era necesario para el autor comprender la estructura de esta hermosa teoría. Volver a la consideración del continuo, del campo, del clasicismo que reviste la teoría de Albert Einstein.

Inicio

Bibliografía

"El Señor es sutil ..." *La ciencia y la vida de Albert Einstein*,
Abraham Pais

Editorial Ariel (methodos), 1984.

"Sobre la teoria de la relatividad especial y general", Albert
Einstein

Editorial Alianza, 1984.

"Notas Autobiograficas", Albert Einstein

Editorial Alianza, 1984.

"Teoria Clásica de los campos", L.D. Landau y E.M. Lifshitz

Editorial Reverté, 1973.

"Fisica", M. Alonso y Finn

Editorial Addison-Wesley, 1995.

"Fisica", Serway

Editorial Mc Graw Hill, 1992.

*"The Principle of Relativity, A collection of original papers on the
special and general theory of relativity. Notes by A. Sommerfeld"*,
A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Weyl, H. Minkowski

Editorial Dover Publications, INC, 1952.

"Mecanica Clasica", H. Goldstein

Editorial Adison-Wesley, 1972.

Links

Los siguientes links han ayudadi a la formalización:

[MathWorld](#)

[Physics7](#)

Los siguientes links han ayudado a la filosofía del trabajo:

- [Albert Einstein Biography](#)
- [Einstein: Image and Impact](#)
- [Einstein Revealed](#)
- [Albert Einstein Biography](#)
- [Albert Einstein Biography](#)
- [Albert Einstein Galerie](#)
- [Albert Einstein Biografia](#)
- [Albert Einstein Information](#)
- [Albert Einstein](#)
- [The Albert Einstein Page](#)
- [Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics](#)
- [The Ritz-Einstein Agreement to Disagree \(Present Stand on the Radiation Problem\)](#)
- [The Light Cone: Einstein-Minkowski Spacetime](#)
- [Einstein's Blackboards](#)
- [Australian Journal of Physics](#)
- [Gravity B Probe](#)
- [Faster Than Light,](#)
- [Relativity for 6th graders](#)
- [Unifying field Theory based on Riemannian Metrics and Distant Parallelism](#)
- [Einstein's interview with the F.B.I.](#)
- [Why Socialism?](#)
- [Einstein's letter to President Roosevelt.](#)
- [Abstract](#)
- [Books by Einstein](#)
- [Einstein Archive](#)

- [Why War?](#)
- [Albert Einstein Reference Archive](#)
- [Uncle Albert's Quotes](#)
- [Collected Quotes from Albert Einstein](#)
- [Einstein's Wisdoms](#)
- [Quotes of Albert Einstein](#)
- [Albert Einstein](#)
- [Encounter With Einstein](#)
- [Einstein on God](#)
- [Albert Einstein Quotes](#)
- [LIGO, the gravity wave detector](#)
- [The Albert Einstein Screen Saver](#)
- [The Einstein Challenge](#)
- [Unified Field Theory of the Classical Fields](#)
- [Relativity](#)
- [Black Hole Studies](#)
- [Albert Einstein Institut](#)
- [Einsteinium](#)
- [Albert Einstein Planetarium](#)
- [Graphology Report](#)
- [Challenge](#)
- [Einstein Alive](#)

-

-

INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta página es mostrar una sucinta introducción a la teoría de la Relatividad General, y más concretamente a los efectos que de ella se derivan en el movimiento de Mercurio.

Para ello, se realiza una simulación de la precesión del perihelio de Mercurio en Modellus, por lo que se recomienda la instalación del Programa.

Por otra parte, se supone al lector familiarizado con la teoría de la Relatividad Especial y con conceptos básicos como 'suceso', 'intervalo', 'tiempo propio'... Sin embargo, se ha preferido soslayar el formalismo matemático y centrarse en la interpretación física.

1. BASES DE LA RELATIVIDAD GENERAL

En 1905 Albert Einstein propuso una serie de ideas nuevas referentes a la naturaleza del espacio, el tiempo y la materia, conjunto de ideas que se conoce como teoría de la relatividad especial y que dice lo que sucede cuando se viaja muy cerca de la velocidad de la luz. Durante los últimos años del siglo XIX, se hizo aparente que había serias dificultades con los conceptos tradicionales del espacio y del tiempo. En particular, a través del trabajo de James Maxwell se tuvo un mejor conocimiento de la naturaleza y de las propiedades de la luz y como resultado, los conceptos de espacio y tiempo se hicieron claramente inadecuados y por tanto necesitaban una revisión. Einstein llevó a cabo esta revisión suponiendo que la velocidad de la luz era una constante absoluta y además encontró especialmente ventajoso incluir el tiempo como una cuarta dimensión, junto con las tres dimensiones tradicionales espaciales. Todas las predicciones usuales de la relatividad especial se derivaban entonces como una consecuencia de la constancia de la velocidad de la luz y de un continuo espacio-tiempo cuatridimensional.

Se puede sin embargo aspirar a mucho más de lo que se presenta en la teoría de la relatividad especial. Se observa, por ejemplo, que la gravitación es una de las fuerzas más importantes de la naturaleza; debido a la gravitación los planetas permanecen en órbita alrededor del sol; la gravedad controla el movimiento del sol y de las estrellas en nuestra galaxia; la gravitación domina la interacción entre las galaxias y quizás la evolución del universo como un todo; si se pudiera incluir la gravitación en el concepto cuatridimensional de espacio-tiempo se podrían de seguro aclarar enormemente las ideas.

El astrónomo está intensamente motivado para concebir el universo en términos de un espacio-tiempo cuatridimensional, pues realmente, cuando se mira al espacio se está mirando hacia atrás en el tiempo; si se observa una estrella que está retirada veinte años luz, entonces la luz que golpea el ojo dejó la estrella hace veinte años. En otras palabras, la estrellase observa como era hace veinte años. Es obvio, entonces que cada vez que se piense en objetos astronómicos se encuentre que las ideas acerca del espacio y del tiempo están íntimamente relacionadas. Teniendo en cuenta, especialmente el hecho de que la gravitación es la interacción dominante entre los objetos astronómicos, se observa que hay una motivación muy real para expandir o generalizar la teoría de la relatividad especial para incluir la gravedad.

Pero ¿cómo lograr esta generalización? quizás el más provechoso enfoque implica suponer que la naturaleza del espacio-tiempo se altera con la presencia del campo gravitacional; en otras palabras, en condiciones libres de gravedad las partículas y los haces de luz viajan en líneas rectas, mientras que en un campo gravitacional las partículas y los rayos de luz aún tratan de viajar de la manera más eficiente, pero dado que el espacio-tiempo se altera, la trayectoria resultante ya no es una línea recta. El problema es ahora describir en qué forma se altera el espacio-tiempo y qué tanto.

En la teoría de la relatividad especial, la cual no incluye la gravitación, el espacio-tiempo es “plano”, pero quizás en presencia del campo de gravitación el espacio-tiempo se vuelva “curvo”: un campo de gravitación débil causará un ligero alabeo del espacio-tiempo y las trayectorias de las partículas y de los rayos de luz se desviarán ligeramente de las líneas rectas clásicas, mientras que un campo gravitacional intenso haría que el espacio-tiempo sea alabeado fuertemente, dando por resultado mayores cambios en las trayectorias que siguen las partículas y los rayos de luz.

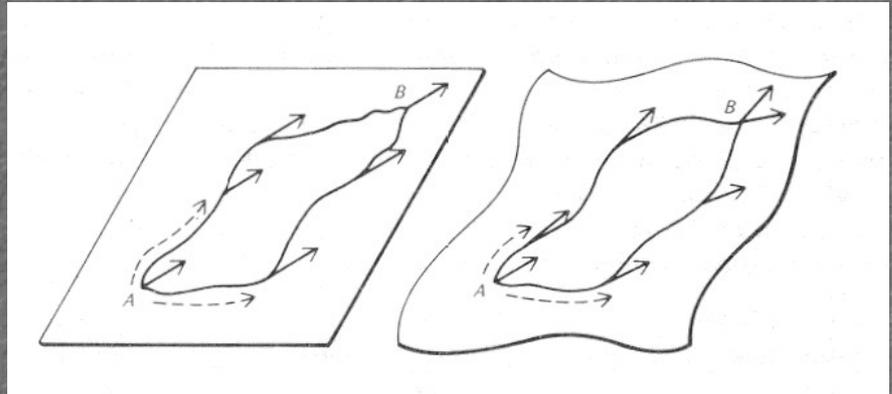
Para apreciar el significado de este tipo de tratamiento a la gravedad, se debe tener una idea muy clara acerca de lo que se entiende por espacio “plano” o “curvo”. Para una mejor ilustración, la explicación se restringe a las superficies bidimensionales y después si las ideas se han fijado en la forma más conveniente y lógica, se podrán expandir los conceptos a los espacios tridimensionales, cuatridimensionales o aún infinitodimensionales.

Se tiene un concepto intuitivo muy claro de si una superficie bidimensional es “curva” o “plana”; el piso es plano, así como lo es la superficie de la mesa, pero la superficie de una pelota es curva. Para poder formular estas observaciones intuitivas de una manera útil, se definirá algo llamado vector: un vector es cualquier cosa que tiene tanto tamaño como dirección, como por ejemplo la velocidad; en una autopista se puede viajar con una velocidad de 60 millas por hora hacia el este. Este vector se puede simbolizar por medio de una flecha, cuya longitud describe su magnitud o tamaño y cuya dirección da su orientación. Por ejemplo, se puede visualizar un mapa meteorológico cubierto de pequeñas flechas que describen la velocidad del viento en un día en particular: el tamaño de las flechas reflejarán la velocidad del viento y la orientación mostrará la dirección en que el viento sopla; de un solo golpe de vista se puede obtener una descripción clara de cómo circulaba el aire en esta fecha.

Ahora imaginemos un vector sobre una superficie bidimensional: empezamos a mover este vector sobre esta superficie, de un lugar a otro, sin cambiar su tamaño u orientación. Este proceso, conocido como el transporte paralelo, se lleva a cabo de la manera siguiente: supóngase que se desea mover del punto A al punto B sobre una trayectoria determinada; a cada paso sobre el camino se detiene y se examina el vector y se toman las seguridades de que el tamaño y la dirección en que se orienta el vector permanecen invariables.

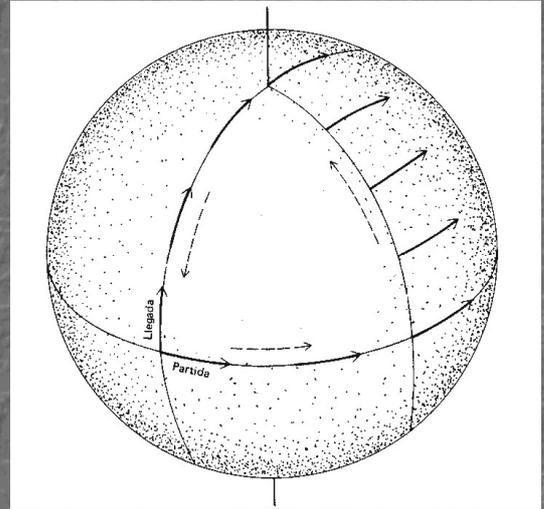
Se observa ahora un hecho interesante que se muestra en la Figura 1: en una superficie plana para ir del punto A al punto B, se obtiene siempre el mismo resultado al final de la jornada, independientemente de la trayectoria que se haya tomado de A a B; pero en una superficie curva, cuando se llega a un punto B se tiene un vector diferente, que depende de la trayectoria que se haya elegido. En otras palabras, en el espacio plano el resultado final del transporte paralelo de un vector es independiente de la trayectoria que se haya seguido, pero en el espacio curvo el resultado final del transporte paralelo de un vector depende de la trayectoria seguida; este criterio para establecer si el espacio es o no curvo se puede extender a espacios de cualquier número de dimensiones.

Finalmente se presenta un ejemplo muy claro de este fenómeno considerando un vector que se desplaza sobre la Tierra. Supóngase que se parte del ecuador con un vector de determinada longitud que se dirige



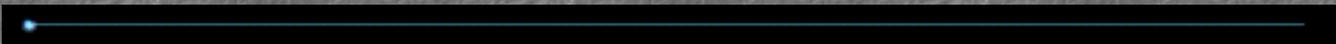
hacia el este, después se desplaza sobre el ecuador a través de 90° de longitud; de este punto se desplaza el vector hacia el polo norte y desde el polo norte se regresa al punto de partida. A través de este largo viaje se tuvo extremo cuidado para que paso a paso el vector no cambiara la dirección en que se señalaba; en la Figura 2 se muestra que cuando se regresa al punto de partida sobre el ecuador, el vector señala hacia el norte y no hacia el este.

El uso de transporte paralelo de vectores constituye un medio muy preciso de describir un espacio curvo. En el siglo XIX, matemáticos tales como Georg F.B. Riemann, Bruno Christoffel y Gregorio Ricci desarrollaron la teoría completa del espacio curvo de cualquier dimensión, que hasta principios del siglo XX no era más que un juguete inteligente, pero Albert Einstein fue el primero en darse cuenta de lo extremadamente útil que esta matemática podría ser, solamente faltaba darle interpretación física correcta a los símbolos algebraicos abstractos.



Cuando Einstein comenzó a formular la teoría de la relatividad general, utilizó el análisis tensorial recientemente inventado, rama de las matemáticas que trata de cantidades matemáticas llamadas tensores. A principios del siglo XX Riemann, Gauss, Ricci y Christoffel habían descubierto un número de tensores que fueron sumamente útiles en la descripción de la naturaleza del espacio curvo, particularmente el llamado tensor de Ricci que describe cómo giran los vectores cuando se hace el transporte paralelo en un espacio curvo; es esto exactamente lo que Einstein había estado buscando. A partir del tensor de Ricci, Einstein construyó entonces las ecuaciones de campo, ecuaciones de toda importancia que dicen cuanto es necesario saber acerca de las propiedades del espacio-tiempo en un campo gravitacional.

Pero es claro que esto no es suficiente. Las ecuaciones de campo de Einstein dicen cómo el campo gravitacional produce una curvatura en el espacio-tiempo pero no dicen cómo se mueven los objetos en un espacio curvo. Para tratar este asunto, se supone que las partículas y los rayos de luz viajan de la manera más eficiente a través del espacio-tiempo, o más precisamente que si un objeto viaja del punto A al punto B, la trayectoria que sigue será la distancia más corta que conecta esos dos puntos en el espacio-tiempo. Si el espacio-tiempo es plano, es claro que la trayectoria será una línea recta, pero si el espacio-tiempo es curvo, la trayectoria resultante, más eficiente, se llama una geodésica. Las ecuaciones que deben resolverse para conocer la trayectoria seguida por un objeto o rayo de luz se denominan las ecuaciones geodésicas. Muchos de los problemas en la relatividad general consisten entonces en resolver simultáneamente las ecuaciones de campo y las ecuaciones geodésicas.



2. PARTÍCULAS EN UN CAMPO GRAVITATORIO

2.1. Los campos gravitatorios en mecánica no relativista

Los llamados campos ‘gravitatorios’ o campos de ‘gravedad’ tienen la propiedad fundamental de que todos los cuerpos se mueven en ellos de la misma manera, con independencia de la masa, con tal de que las condiciones iniciales sean las mismas.

Por ejemplo, las leyes de la caída libre en el campo gravitatorio terrestre son las mismas para todos los cuerpos; cualquiera que sea su masa, todos adquieren la misma aceleración.

Esta propiedad de los campos gravitatorios hace posible establecer una analogía esencial entre el movimiento de los cuerpos en un campo gravitatorio y el movimiento de los cuerpos que no están situados en ningún campo exterior, pero que se consideran desde el punto de vista de un sistema de referencia no inercial. En efecto, en un sistema de referencia inercial, el movimiento libre de todos los cuerpos es uniforme y rectilíneo y si, por ejemplo, en el instante inicial sus velocidades eran todas las mismas, seguirán siendo las mismas en cualquier instante. Es claro, pues, que si consideramos este movimiento desde un sistema no inercial dado, también respecto de este sistema todos los cuerpos se moverán de la misma manera.

Las propiedades del movimiento en un sistema no inercial son, por consiguiente, las mismas que en un sistema inercial cuando existe un campo gravitatorio. Con otras palabras, un sistema de referencia no inercial equivale a un cierto campo gravitatorio. Éste es el llamado ‘principio de equivalencia’.

Consideremos, por ejemplo, el movimiento de un sistema de referencia uniformemente acelerado. Un cuerpo de masa arbitraria que se mueve libremente en dicho sistema posee, respecto del mismo, una aceleración que, claro está, es constante e igual y opuesta a la aceleración del propio sistema. Lo mismo vale para el movimiento en un campo gravitatorio constante y uniforme, por ejemplo, el campo de gravedad de la Tierra (en pequeñas regiones donde el campo se puede considerar uniforme). Así, un sistema de referencia uniformemente acelerado equivale a un campo exterior uniforme y constante. Un caso algo más general es el de un sistema de referencia en un movimiento rectilíneo no uniformemente

acelerado -que equivale, evidentemente, a un campo gravitatorio uniforme, pero variable.

Sin embargo, los campos a los que equivalen los sistemas de referencia no inerciales no son por completo idénticos a los campos gravitatorios 'reales' que encontramos también en los sistemas inerciales. En efecto, existe una diferencia esencial en cuanto a su comportamiento en el infinito. A distancia infinita de los cuerpos que producen el campo, un campo gravitatorio 'real' tiende siempre a cero. Por el contrario, los campos a los que equivalen los sistemas de referencia no inerciales aumentan sin límite en el infinito, o, en cualquier caso, conservan en él un valor no nulo. Así, por ejemplo, la fuerza centrífuga que aparece en un sistema de referencia en rotación aumenta sin límites cuando nos apartamos del eje de rotación; el campo al que equivale un sistema de referencia en movimiento rectilíneo acelerado es el mismo en todo el espacio, incluido el infinito.

Los campos a los que equivalen los sistemas no inerciales se anulan no bien pasamos a un sistema inercial. En cambio, los campos gravitatorios 'reales' (los que existen también en un sistema de referencia inercial) no se pueden eliminar sea cual sea la elección que se haga del sistema de referencia. Esto es evidente ya por lo dicho antes acerca de la diferencia entre las condiciones en el infinito para los campos gravitatorios 'reales' y los campos gravitatorios a los que equivalen los sistemas no inerciales; dado que estos últimos campos no tienden a cero en el infinito, es claro que, cualquiera que sea el sistema de referencia elegido, es imposible anular un campo 'real', puesto que éste se anula en el infinito.

Todo lo que cabe hacer mediante una elección adecuada del sistema de referencia, es anular el campo gravitatorio en una región dada del espacio, suficientemente pequeña para que el campo se pueda considerar uniforme en ella. Esto es posible eligiendo un sistema en movimiento acelerado, cuya aceleración sea igual a la que hubiera adquirido una partícula colocada en la región del campo que estamos considerando.

El movimiento de una partícula en un campo gravitatorio está determinado, en mecánica no relativista, por una función de Lagrange que (en un sistema de referencia inercial) tiene la forma

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\phi$$

donde ϕ es una cierta función de las coordenadas y del tiempo que caracteriza al campo y se llama 'potencial gravitatorio'. De acuerdo con esto, las ecuaciones del movimiento de la partícula son

$$\dot{\vec{v}} = -\vec{\nabla} \phi$$

Estas ecuaciones no contienen ni las masas ni ninguna otra constante que caracterice las propiedades de la partícula, lo que constituye la expresión matemática de la propiedad fundamental de los campos gravitatorios.

2.2 El campo gravitatorio en la mecánica relativista

La propiedad fundamental de los campos gravitatorios que hemos señalado en la sección anterior, a saber, que todos los cuerpos se mueven en ellos de la misma manera, conserva su validez también en mecánica relativista. En consecuencia, subsiste también la analogía entre campos gravitatorios y sistemas de referencia no inerciales. Por lo tanto, es natural que al estudiar las propiedades de los campos gravitatorios en mecánica relativista se parta también de esta analogía.

En un sistema de referencia inercial y en coordenadas cartesianas, el intervalo ds viene dado por la relación:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Al pasar a cualquier otro sistema de referencia inercial (es decir, en una transformación de Lorentz), el intervalo, conforme sabemos, conserva la misma forma. Sin embargo, si pasamos a un sistema de referencia no inercial, ds^2 no será igual ya a la suma de los cuadrados diferenciales de las coordenadas.

Así, por ejemplo, si pasamos a un sistema de coordenadas en rotación uniforme

$$x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \quad y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t, \quad z = z'$$

(Ω es la velocidad angular de la rotación, dirigida en el sentido del eje Z), el intervalo toma la forma

$$ds^2 = \left[c^2 - \Omega^2 (x'^2 + y'^2) \right] dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt.$$

Cualquiera que sea la ley de transformación de la coordenada tiempo, esta expresión no se puede reducir a una suma de cuadrados de las diferenciales de las coordenadas.

En un sistema no inercial de referencia, el cuadrado del intervalo aparece, pues, como una forma cuadrática en las diferencias de las coordenadas de tipo

general, esto es, tiene la forma

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k,$$

donde las g_{ik} (g es un tensor) son ciertas funciones de las coordenadas espaciales x^1, x^2, x^3 y de la coordenada temporal x^0 . Por consiguiente, cuando utilizamos sistemas de referencia no inerciales, el sistema cuatridimensional de coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3 es curvilíneo. De las cantidades g_{ik} , que determinan todas las propiedades geométricas en cada sistema de coordenadas curvilíneas, diremos que representan la ‘métrica del espacio-tiempo’.

Es evidente que las cantidades g_{ik} se pueden siempre considerar simétricas respecto de los índices i y k ($g_{ki} = g_{ik}$), ya que están determinadas por la forma simétrica, donde g_{ik} y g_{ki} aparecen como coeficientes de un mismo producto, $dx^i dx^k$. En el caso general, existen diez cantidades g_{ik} diferentes -cuatro con índices iguales y $4 \cdot 3/2 = 6$ con índices distintos. En un sistema de referencia inercial, cuando utilizamos coordenadas espaciales cartesianas $x^{1,2,3} = x, y, z$ y el tiempo $x^0 = ct$, las cantidades g_{ik} son

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{ik} = 0 \text{ para } i \neq k$$

Un sistema de coordenadas (cuatridimensional) con estos valores de las g_{ik} se denomina sistema ‘galileano’.

En el párrafo anterior se demostró que un sistema de referencia no inercial equivale a un cierto campo de fuerzas. Vemos ahora que en mecánica relativista estos campos están determinados por las cantidades g_{ik} .

Lo mismo vale para los campos gravitatorios ‘reales’. Todo campo gravitatorio no es sino un cambio en la métrica del espacio-tiempo, en correspondencia con el cual el campo viene determinado por las cantidades g_{ik} . Este importante hecho significa que las propiedades geométricas del espacio-tiempo (su métrica) están determinadas por fenómenos físicos y no son propiedades invariables del espacio y del tiempo.

Como en la mecánica no relativista, existe una diferencia radical entre campos gravitatorios ‘reales’ y campos a que son equivalentes los sistemas de referencia no inerciales. Al pasar a un sistema de referencia no inercial, la forma cuadrática, es decir, las cantidades g_{ik} , se obtienen a partir de sus valores galileanos mediante una simple transformación de coordenadas, y se pueden reducir en todo el espacio de

nuevo a sus valores galileanos mediante la transformación de coordenadas inversa. Que estas formas de las g_{ik} son muy particulares resulta claramente del hecho de que mediante una mera transformación de las ‘cuatro’ coordenadas es imposible reducir las ‘diez’ cantidades g_{ik} a una forma fijada previamente.

Un campo gravitatorio ‘real’ no se puede anular por una transformación de coordenadas. Con otras palabras, en presencia de un campo gravitatorio el espacio-tiempo es tal que las cantidades g_{ik} que determinan su métrica no pueden reducirse, cualquiera que sea la transformación de coordenadas, a sus valores galileanos en todo el espacio. De un espacio-tiempo con estas características se dice que es ‘curvo’ en contraposición al espacio-tiempo ‘plano’ en el que es posible dicha reducción.

Mediante una elección adecuada de coordenadas, podemos, sin embargo, reducir las cantidades g_{ik} a la forma galileana en un punto cualquiera del espacio-tiempo no galileano: ello equivale a la reducción de una forma cuadrática con coeficientes constantes (los valores de las g_{ik} en el punto dado) a la forma diagonal. De un sistema de coordenadas de estas características se dice que es ‘galileano en el punto dado’.

Observemos que, después de reducida a la forma diagonal en un punto dado, la matriz de las cantidades g_{ik} posee un valor principal positivo y tres negativos. De aquí se sigue, en particular, que el determinante g formado por las cantidades g_{ik} es siempre negativo para un espacio-tiempo real:

$$g < 0$$

Un cambio en la métrica del espacio-tiempo representa también un cambio en la métrica puramente espacial. A un conjunto g_{ik} galileano en el espacio-tiempo plano, corresponde una geometría euclídea del espacio. En un campo gravitatorio, en cambio, la geometría del espacio pasa a ser no euclídea. Esto vale tanto para los campos gravitatorios ‘reales’, en los que el espacio-tiempo es ‘curvo’, como para los campos que resultan de que el sistema de referencia es no inercial, campos que conservan el carácter plano del espacio-tiempo.

Puede demostrarse que el espacio se convierte en no euclídeo cuando pasamos a un sistema no inercial de referencia; veamos este hecho de una manera intuitiva. Consideremos dos sistemas de referencia, de los cuales uno (S) es inercial, mientras el otro (S') gira uniformemente respecto de S en torno de su eje común Z . Un círculo en el plano xy del sistema S (con centro en el origen de coordenadas) se puede considerar también como un círculo en el plano $x'y'$ del sistema S' . Midiendo

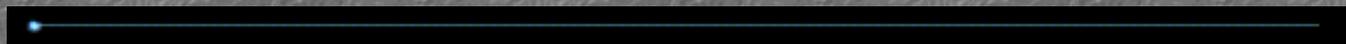
la longitud de la circunferencia y su diámetro con una regla en el sistema S , obtenemos valores cuya razón es igual a π , de acuerdo con el carácter euclídeo de la geometría en el sistema de referencia inercial. Supongamos ahora que la medida se efectúa con una regla en reposo respecto de S' . Si se observa este proceso desde el sistema S , encontramos que la regla tangente a la circunferencia experimenta una contracción de Lorentz, mientras que no cambia la regla colocada radialmente. Es claro, por lo tanto, que la razón de la circunferencia al diámetro, obtenida con esta medición, será mayor que π .

En el caso general de un campo gravitatorio variable arbitrario, la métrica del espacio no sólo no es euclídea, sino que además varía con el tiempo. Esto significa que las relaciones entre diferentes distancias geométricas cambian con el tiempo. Por lo tanto, la posición relativa de las 'partículas de prueba' introducidas en el campo no puede mantenerse inalterada en ningún sistema de coordenadas. Así, si las partículas están colocadas sobre la circunferencia de un círculo y a lo largo de un diámetro, dado que la razón de la longitud de la circunferencia a la del diámetro no es igual a π y cambia con el tiempo, es claro que si las distancias entre partículas a lo largo del diámetro se conservan, las distancias entre las situadas sobre la circunferencia deben cambiar, y recíprocamente. Por consiguiente, en la teoría de la relatividad general, es imposible, hablando en términos generales, tener un sistema de cuerpos fijos unos respecto de otros.

Este resultado cambia esencialmente el propio concepto de sistema de referencia en la teoría de la relatividad general con relación a su significado en la teoría especial. En ésta entendíamos por sistema de referencia un conjunto de cuerpos en reposo relativo los unos respecto a los otros, en posiciones relativas invariables. Tales sistemas de cuerpos no existen en un campo gravitatorio variable, y para determinar exactamente la posición de un partícula en el espacio debemos, en rigor, contar con un número infinito de cuerpos que llenen todo el espacio formando como una especie de 'medio'. Este sistema de cuerpos, con relojes que marchan de manera arbitraria fijos en cada uno de ellos, constituye un sistema de referencia en teoría de la relatividad general.

En conexión con la arbitrariedad en la elección de un sistema de referencia, las leyes de la naturaleza deben escribirse en la teoría de la relatividad general de manera formalmente adecuada a todo sistema cuatridimensional de coordenadas (o, como se suele decir, en forma 'covariante'). Esto, claro está, no implica una equivalencia física de todos estos sistemas de referencia (análoga a la equivalencia física de todos los sistemas de referencia inerciales en la teoría especial). Por el contrario, las características específicas de los fenómenos físicos, incluidas las propiedades del movimiento de los cuerpos, pasan a ser diferentes en los diferentes

sistemas de referencia.



3. EL MOVIMIENTO DE MERCURIO: LA PRUEBA DE LA RELATIVIDAD

Hacia finales del siglo pasado se había vuelto cada vez más obvio que algo anda mal en los movimientos del planeta Mercurio. Partiendo de la mecánica newtoniana se podrían calcular muy precisamente las órbitas de todos los planetas, pero aún después de haber aplicado todas las correcciones conocidas debidas a las perturbaciones de los planetas exteriores, los cálculos fallaban en la predicción del movimiento de Mercurio. En particular, la órbita elíptica de Mercurio parecía que girara o tuviera movimiento de precesión muy lento; en ausencia de la influencia de los planetas exteriores la órbita de Mercurio debía ser una elipse perfecta de acuerdo con la mecánica clásica, pero las observaciones revelaban que mientras Mercurio giraba alrededor de su órbita, la órbita había girado lentamente. Como resultado el planeta Mercurio estaba trazando una figura de rosetas en lugar de una verdadera elipse.

Este efecto es extremadamente pequeño, pero aún así la llamada precesión del perihelio de Mercurio preocupaba grandemente a los astrónomos a principios del siglo XX.

Cuando Einstein volvió su atención al movimiento de los planetas alrededor del sol o de una estrella masiva, encontró que idealmente las órbitas, en efecto, debían ser elipses con precesión. Cerca del sol o de una estrella, en donde el campo gravitacional es lo más intenso, la razón de precesión debería ser máxima y lejos de la fuente de gravedad, en donde el campo es débil, cualquier desviación de la mecánica newtoniana sería virtualmente imperceptible. En realidad, de acuerdo con los cálculos de Einstein, la razón de precesión del perihelio de Mercurio debería ser 43 segundos de arco por siglo; por primera vez se tenía una explicación del movimiento misterioso de Mercurio y la explicación requería que se cambiaran las ideas acerca de la gravitación.

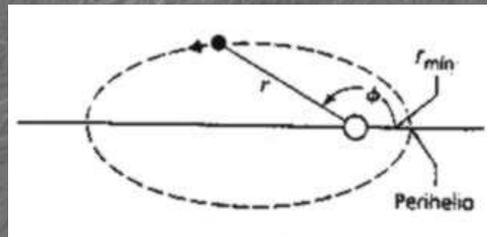
Es quizás difícil de expresar la conmoción que se extendió por toda la comunidad científica en 1916: la teoría clásica de Newton de la gravitación había permanecido como una pilastra inquebrantable de la ciencia física durante muchos siglos y ahora de repente era una teoría totalmente diferente y nueva la que parecía funcionar mejor.

La tarea inmediata de los científicos en ese momento era probar esta nueva teoría lo máximo posible. Desafortunadamente, para campos de gravitación débiles las teorías de Einstein predicen casi exactamente los mismos resultados que la vieja teoría newtoniana; el único lugar en donde se pueden encontrar campos de gravitación que no son muy débiles es cerca de la superficie del sol y en consecuencia, llevar a cabo experimentos para verificar la relatividad general no es una tarea fácil.

La precesión del perihelio de Mercurio, que se conocía desde el tiempo de Leverrier en el siglo XIX, daba la primera “prueba” de la relatividad general. En esencia, cerca del sol la curvatura del espacio-tiempo es tan grande que los planetas ya no pueden viajar en elipses simples sino que, mientras el planeta trata de girar alrededor del sol o de una estrella en la órbita elíptica predicha por Newton, esta elipse tiene precesión y cuanto más grande sea el campo gravitacional, más grande será la razón de precesión. Del hecho de que la razón de precesión en el caso de Mercurio es tan pequeña se puede apreciar que desde el punto de vista de la relatividad general el campo gravitacional del sol es comparativamente débil.

4. PRECESIÓN DEL PERIHELIO DE MERCURIO

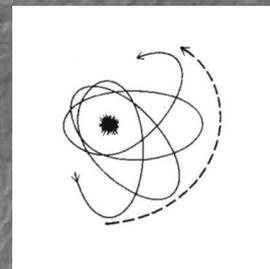
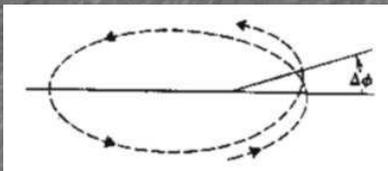
Considérese un sistema solar simple, como el que se muestra en la figura 1, que consiste en una sola estrella masiva (de masa M) y un solo planeta ligero en órbita alrededor de ella.



De acuerdo con la gravitación newtoniana, la órbita es una elipse perfecta con la estrella en uno de los focos. La ecuación de la elipse es:

$$r = r_{\text{mín}} \frac{1+e}{1+\cos\phi}$$

donde $r_{\text{mín}}$ es la distancia mínima entre el planeta y la estrella y e es la excentricidad de la órbita (el grado al cual la elipse es no circular; $e = 0$ para un círculo). Cuando $r = r_{\text{mín}}$, se dice que el planeta está en el *perihelio*; esto ocurre con regularidad en el mismo punto del espacio exactamente, siempre que $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$. De acuerdo con la relatividad general, la órbita no es una elipse completamente cerrada; el efecto del espacio curvo cerca de la estrella causa que la dirección del perihelio *preceda* una pequeña cantidad como se muestra en las figuras 2 y 3.



Después de completar una órbita, el planeta regresa a $r_{\text{mín}}$, pero con un ϕ ligeramente diferente; la diferencia $\Delta\phi$ se puede calcular de la relatividad

general, de acuerdo con la cual la órbita es

$$r = r_{\min} \frac{1+e}{1+e \cos(\phi - \Delta\phi)}$$

donde

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 r_{\min} (1+e)}$$

Para el Sol, $6\pi GM/c^2 = 27.80$ km.; así, hasta para el valor más pequeño de r_{\min} (para Mercurio, 46×10^6 km) $\Delta\phi$ es del orden de 10^{-6} rad, una cantidad extremadamente pequeña. Sin embargo, este efecto es *acumulativo*: esto es, se va sumando en cada órbita, y después de N órbitas, el perihelio ha avanzado $N\Delta\phi$. Generalmente esta precesión se expresa en términos de la precesión total por siglo (por 100 años terrestres); en la siguiente tabla se muestran algunos valores representativos:

				$N \Delta\phi$ segundos de arco por siglo	
<i>Planeta</i>	<i>N</i> <i>(órbitas por siglo)</i>	<i>e</i>	<i>r_{min}</i> <i>(10⁶ km)</i>	<i>Relatividad general</i>	<i>Por observación</i>
Mercurio	415.20	0.2060	46.0	43.00	43.1 ± 0.5
Venus	162.50	0.0068	107.5	8.60	8.4 ± 4.8
Tierra	100.00	0.0170	147.1	3.80	5.0 ± 1.2
Marte	53.20	0.0930	206.7	1.40	
Júpiter	8.43	0.0480	740.9	0.06	

Ícaro	89.30	0.8270	27.9	10.00	9.8 ± 0.8
-------	-------	--------	------	-------	---------------

Las precesiones esperadas son muy pequeñas, del orden de segundos de arco por siglo; sin embargo, se han medido con gran exactitud. Para los tres planetas más cercanos al Sol y para el asteroide Ícaro, los valores medidos concuerdan con las predicciones de la relatividad general. En el mejor de los casos, la concordancia se encuentra dentro del 1 %.

Estos experimentos son muy difíciles de realizar puesto que (excepto para Mercurio e Ícaro) las excentricidades son pequeñas y es difícil localizar el perihelio. Un problema más serio es que otros efectos, que no se encuentran asociados con la relatividad general, también causan una precesión aparente del perihelio. En el caso de Mercurio, la precesión observada es en realidad aproximadamente 5601'' por siglo; de esos, 5026'' se deben a la precesión del equinoccio de la Tierra (un efecto newtoniano clásico de la Tierra en rotación) y 532'' se deben a la atracción gravitacional de los otros planetas sobre Mercurio (también un efecto newtoniano clásico). Sólo la diferencia de 43'' se debe a la relatividad general.

5. SIMULACIÓN EN *MODELLUS*

5.1 Bajar simulación

5.2 Ecuaciones del programa

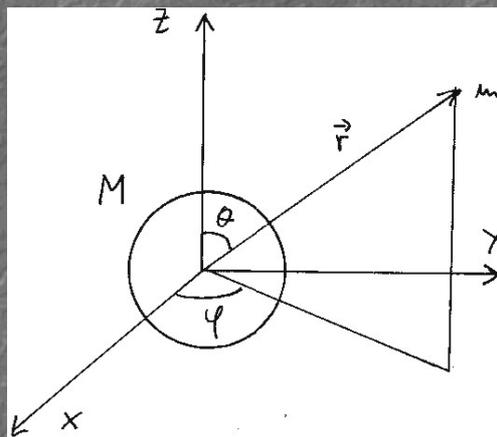
5.3 Utilización

5.2 ECUACIONES DEL PROGRAMA

Para representar el movimiento de Mercurio, parece conveniente trabajar en coordenadas polares por la simetría del modelo. Así, pues, el problema se reduce a la obtención de las ecuaciones diferenciales que expresen la evolución temporal del radio r y del ángulo ϕ (f en *Modellus*).

En las siguientes expresiones, el lector debe percatarse de que haciendo $c \rightarrow \infty$ el problema tendría el mismo carácter que en Clásica.

Puesto que tenemos una masa con simetría esférica



y de acuerdo con la definición de la métrica de Schwarzschild se tiene el intervalo

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (1)$$

siendo

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (\text{Radio de Schwarzschild})$$

Vemos que ds^2 coincide con el intervalo en relatividad restringida a

excepción de un factor $(1-r_s/r)$, que es despreciable para distancias mucho mayores que el radio de Schwarzschild ($r_{s(\text{sol})} \approx 3 \text{ km}$); se aprecia, sin embargo, una singularidad si $r \rightarrow r_s$, que conduciría al colapso gravitatorio y a la formación de agujero negro.

El sumando $r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ procede, evidentemente, del paso a coordenadas polares.

Podemos considerar el movimiento en un plano (por la simetría esférica); elegiremos $\theta = \pi/2$.

De ecuaciones de geodésicas se deducen dos constantes de movimiento:

$$E = \frac{\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{Energía (2)}$$

$$L = r^2 \dot{\phi}, \quad \dot{\phi} \equiv \frac{d}{d\tau} \quad \text{Momento angular (3)}$$

En función de ellas, el movimiento radial y angular estaría descrito por

$$E = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + U_{\mathcal{G}}(r) \quad (5) \quad \dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \quad (4)$$

$$\ddot{r} = -\frac{dU_{\mathcal{G}}}{dr} \quad (6)$$

siendo

$$U_{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3} \quad (7)$$

Nótese que la ecuación (4) coincide con la clásica obtenida directamente a partir de expresar el momento angular L en función de las componentes de la velocidad radial y transversal.

La principal diferencia que se observa en el tratamiento relativista es el término de (7) $-GML^2/c^2 r^3$; como consecuencia inmediata si $r \rightarrow 0 \Rightarrow U_{\mathcal{G}} \rightarrow -\infty$, en contraposición al potencial clásico, que tendería a $+\infty$.

Si representamos por R y l

$$R \equiv \frac{r}{r_s} \quad l \equiv \frac{L}{r_s c} \quad (8)$$

entonces

$$U_{\phi} = \frac{c^2}{2} \left[-\frac{1}{R} + \frac{l^2}{R^2} - \frac{l^2}{R^3} \right] \quad (9)$$

En virtud de la invarianza de los intervalos si cogemos un sistema de referencia solidario con el cuerpo en movimiento ($dr=0$; $d\phi=0$) e igualamos (1) con un intervalo ds' (respecto del sistema solidario) se obtiene fácilmente, en virtud de (2)

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2E}{c^2}}}{1 - \frac{1}{R}}, \quad (10)$$

expresión que relaciona el tiempo t con el tiempo propio τ .

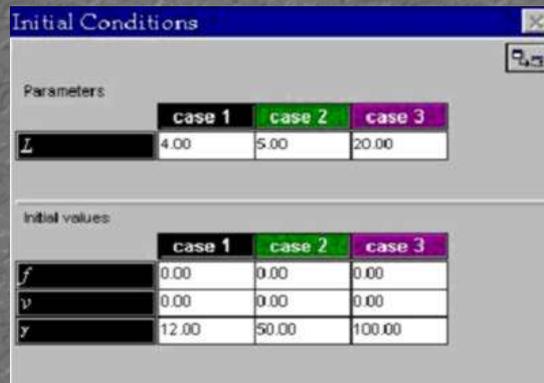
El factor p que aparece en las ecuaciones de la aplicación en *Modellus* es debido al hecho de que la evolución temporal la estamos considerando respecto al tiempo propio.

Finalmente, conviene hacer mención a la sentencia lógica *if(rs) then (p=0)*, necesaria para evitar la singularidad (colapso gravitatorio) y que hace que *Modellus* termine la simulación.

5.3 UTILIZACIÓN DEL PROGRAMA

El programa está preparado para que el usuario interactúe con él fijando los valores de L y r , para así determinar un potencial efectivo, que nos dará las distintas órbitas. También pueden variarse las condiciones iniciales del ángulo f y la velocidad v .

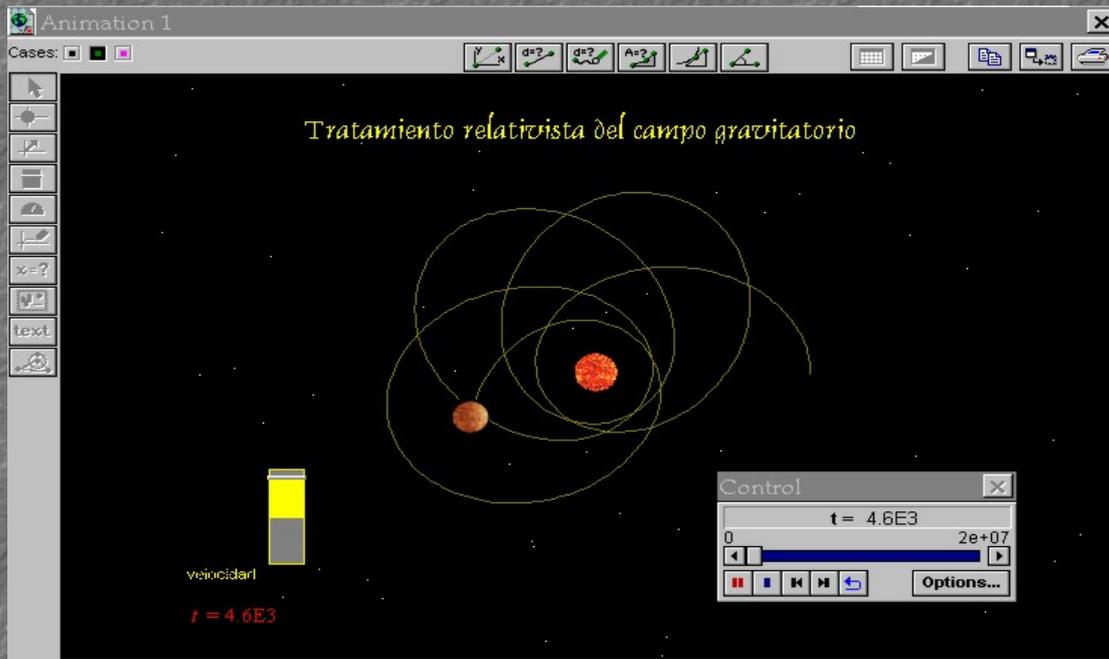
Tal y como está diseñado, se permiten tratar tres casos simultáneamente, lo que ayuda a la comparación de ellos



Initial Conditions			
Parameters:			
	case 1	case 2	case 3
L	4.00	5.00	20.00
Initial values:			
	case 1	case 2	case 3
f	0.00	0.00	0.00
v	0.00	0.00	0.00
y	12.00	50.00	100.00

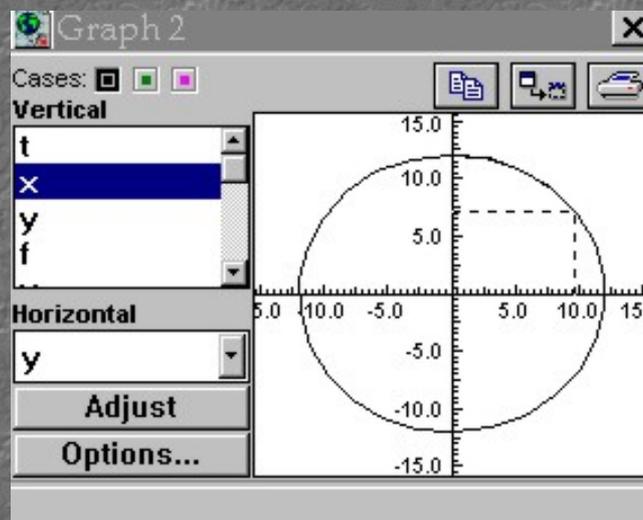
En la ventana 'Model' se encuentran las ecuaciones diferenciales discretizadas, es decir, el programa en sí. En consecuencia no debe modificarse si no se tiene conocimiento de los resultados que ello conlleva.

La ventana 'Control' es la que permite que Modellus empiece la integración numérica y realice, pues, la representación del movimiento. Ésta última puede observarse en la ventana 'Animation'

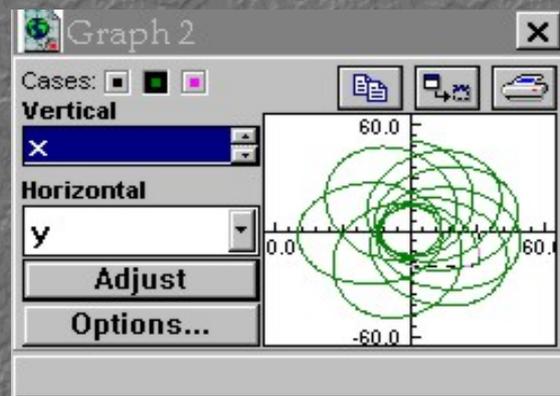
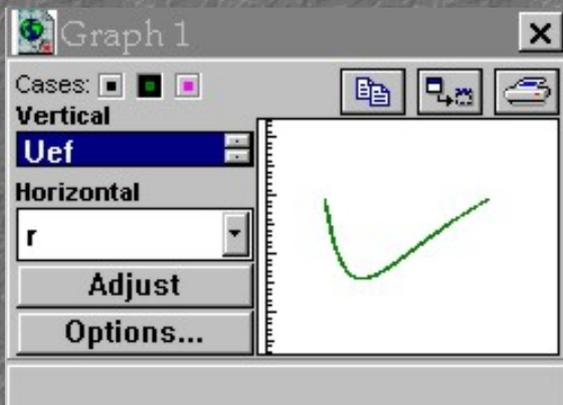


Se pueden dar tres movimientos claramente diferenciados en función de la energía asignada a través de L y r :

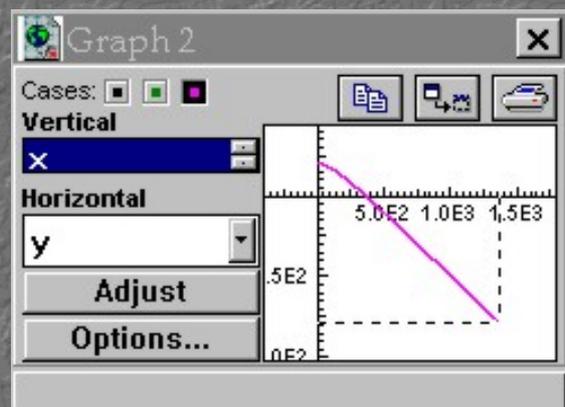
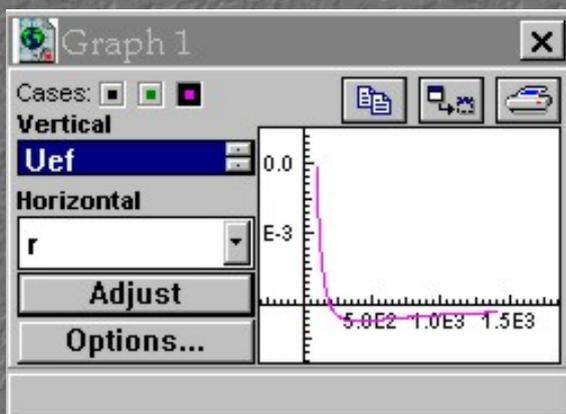
-*Caso 1*: Órbita circular. Corresponde a una energía igual al mínimo de potencial.



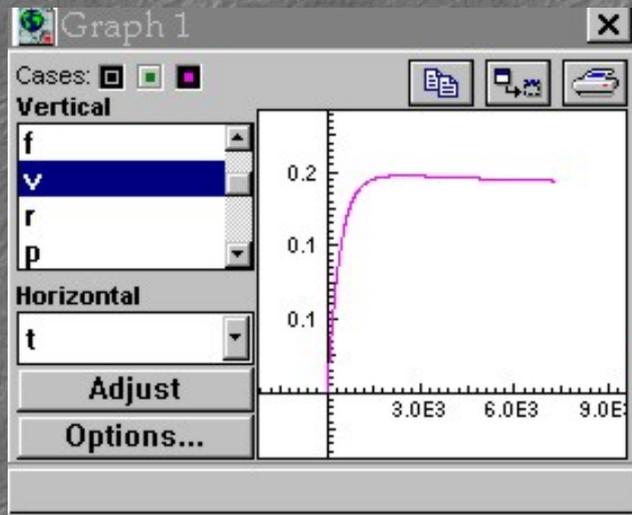
-*Caso 2*: Aquí Mercurio se mueve entre una distancia mínima y una distancia máxima, es una trayectoria acotada y, de acuerdo con el modelo de la Relatividad General, es un movimiento elíptico con precesión.



-*Caso 3*: En este tercer caso, hay una distancia máxima, pero la órbita no está acotada superiormente y, en consecuencia, el planeta iría aumentando indefinidamente su distancia al Sol.



El usuario también puede ver la relación entre otras magnitudes y así obtener resultados interesantes, que coinciden con el tratamiento teórico, tales como la conservación de la energía. Pueden ser destacables también las gráficas de la velocidad frente al tiempo. En la figura se representa la variación temporal de la velocidad para una órbita abierta.



AGRADECIMIENTOS:

Creo necesario expresar mi más sincero agradecimiento al Dpto. de Física de la Universidad de Murcia, y en especial a M^a José Nuñez y a Alfonso Navarro.

Tampoco debo olvidarme de la inestimable ayuda de Juanfran, especialmente en la elaboración de la simulación, así como la de José Manuel González Alcantud y la de Miguel Pérez, sin los cuales el trabajo me hubiera llevado un tiempo mucho mayor.

Por último, quiero hacer mención a mis compañeros de Física por su paciencia, a mis amigos (ellos saben quienes son) y a mi familia por apoyarme en todo momento.

Manuel Feito Guzmán 6-7-00

PRINCIPALES LINKS UTILIZADOS EN ESTA PÁGINA:

<http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/8084/agujero.html>

<http://www.seds.org/nineplanets/nineplanets/mercury.html>

<http://www.soest.hawaii.edu/PSRdiscoveries/Jan97/MercuryUnveiled.html>

<http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>

<http://www.friends-partners.org/~china/ins/IHEP/kepu/einstein/einstein.html>

<http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Maxwell.html>

<http://mathworld.wolfram.com/Tensor.html>

<http://mathworld.wolfram.com/Geodesic.html>

<http://www.treasure-troves.com/physics/SchwarzschildMetric.html>

<http://mathworld.wolfram.com/GeodesicEquation.html>

Enlaces a página de relatividad especial de Juan Fco. González (en construcción)

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA:

Pinche [aquí](#)

Para cualquier duda o sugerencia escribir a:

e-mail

EJUFRAN@teleline.es

feito@wanadoo.es